ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-SEPTIÈME — ANNÉE 1950

(86e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1950

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-SEPTIÈME — ANNÉE 1950

(86e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1950

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-SEPTIÈME.

Pages.

Détermination des singularités d'une surface multiple en certains points de diramation, par M. *Lucien Godeaux*..... 1

Axiome de Zermelo et nombres transfinis, par M. *Paul Lévy*..... 15

Sur un problème d'inversion dans la théorie des fonctions méromorphes, par M. *Le Van Thiem*..... 51

Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergentes (Premier mémoire), par M. *Hubert Delange*..... 99

Classes de saturation des procédés de sommation des séries de Fourier et applications aux séries trigonométriques, par M. *Marc Zamansky*..... 161

Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergentes (Deuxième mémoire), par M. *Hubert Delange*..... 199

Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, par M. *Arrigo Finzi*..... 243

Quelques propriétés des fonctions méromorphes périodiques, par M. *Pham Tinh Quat*..... 307

Sur la synchronisation des systèmes oscillants non linéaires, par M. *Jules Haag*... 321

Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation, par M. *Pierre Lelong*..... 393

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55
134494

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

DÉTERMINATION DES SINGULARITÉS D'UNE SURFACE MULTIPLE EN CERTAINS POINTS DE DIRAMATION

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Dans un Mémoire récent (1) nous avons exposé une méthode permettant de résoudre le problème suivant : Soit, sur une surface algébrique F, une involution cyclique I_p d'ordre premier p, ne présentant qu'un nombre fini de points unis. Dans le domaine du premier ordre d'un A de ces points unis, la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de l'involution, engendre l'identité ou une homographie de période p. Dans le premier cas, nous disons que le point A est uni de première espèce, dans le second qu'il est uni de seconde espèce (2). Considérons d'autre part une surface normale Φ, image de l'invo-

(1) *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Ann. Ec. Norm. sup.*, 1948, p. 189-210). *Voir* aussi notre Note : *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (*Bull. Acad. de Belgique*, 1949, p. 15-30, 262-276, et 277-284), et différentes Notes citées dans le premier Mémoire, en particulier notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient.*, n° 270. Paris, Hermann, 1935).

(2) Nous disions souvent, dans nos recherches extérieures, point uni parfait et point uni non parfait. Il nous a paru utile de modifier ces dénominations pour éviter une confusion avec les notations introduites autrefois par Pieri et reprises récemment, avec plus de précision, par M. Severi dans son Ouvrage *Serie, Sistemi d'équivalenze e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (Rome, édit. Cremonese, 1942), *voir* p. 278 et suivantes.

lution I_p, telle qu'aux points unis correspondent des points isolés : les points de diramation. Si A est uni de première espèce, le point de diramation A′ qui lui correspond est multiple d'ordre p pour la surface Φ. Si au contraire A est uni de seconde espèce, la détermination de la singularité de Φ au point A′ est beaucoup plus compliquée. Le point A est alors, sur la surface F, l'origine d'une sorte d'arbre de points unis, infiniment voisins de A. La méthode que nous avons exposée dans le Mémoire cité a pour but de déterminer cet arbre et la singularité de Φ au point A′.

Dans cette Note, nous nous proposons d'appliquer cette méthode à la détermination des singularités de points de diramation dans trois cas particuliers. Dans chaque cas, le point de diramation est un point triple triplanaire pour la surface Φ, mais ces points présentent, dans le domaine du premier ordre, des singularités très différentes. Il nous a paru intéressant de montrer la genèse de ces singularités. Notre Note débute par un bref résumé de la méthode.

1. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de cette involution. Nous pouvons prendre, pour modèle projectif de F, une surface normale, d'ordre pn, appartenant à un espace linéaire S_r dont la dimension est arbitrairement grande, sur laquelle T est déterminée par une homographie ayant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, dont le premier seul rencontre F (aux points unis de l'involution). Le système $|C|$ des sections hyperplanes de F contient p systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution, le système $|C_i|$ étant découpé par les hyperplans passant par les axes ponctuels de l'homographie, sauf par σ_i.

Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base et sa dimension r_0 peut être supposée aussi grande qu'on le veut. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, on obtient, comme transformée de F, une surface Φ, d'ordre n, image de l'involution I_p. Nous désignerons par Γ_0 les sections hyperplanes de Φ; courbes qui correspondent aux courbes C_0. Si π est le genre des courbes Γ_0, les courbes C_0 et par suite les courbes C sont de genre $p(\pi - 1) + 1$.

Aux axes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie T, nous avons attaché les nombres $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$, où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Soient A un point uni de seconde espèce de l'involution; il appartient à l'axe σ_0 et nous supposons que le plan tangent à F en A n'a que ce point en commun avec σ_0. Ce plan tangent s'appuie en un point sur deux des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. On peut toujours supposer, sauf à modifier éventuellement les notations, que l'un de ces espaces est σ_1 et nous désignerons l'autre par σ_2. Soient a_1, a_2 les tangentes à F en A s'appuyant la première sur σ_1, la seconde sur σ_2.

Nous désignerons par C_0' les courbes C_0 passant par A; elles ont en ce point la multiplicité $\lambda_1+\mu_1$, λ_1 tangentes à ces courbes en ce point étant confondues avec a_1 et μ_1 avec a_2. Nous désignerons par $|C_0''|$ le système formé par les courbes C_0' assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_2. Ces courbes ont en A la multiplicité $\lambda_2+\mu_2$, λ_2 de leurs tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et μ_2 avec a_2. Et ainsi de suite.

Si nous posons $p=2\nu+1$, nous obtenons ainsi $\nu+1$ systèmes linéaires

$$|C_0'|,\quad |C_0''|,\quad \ldots,\quad |C_0^{(\nu)}|,\quad |C_0^{(\nu+1)}|,$$

dont le dernier est formé de courbes ayant en A la multiplicité p, les tangentes en A étant variables. Nous désignerons par $\lambda_i+\mu_i$ la multiplicité du point A pour les courbes $C_0^{(i)}$, λ_i des tangentes en ce point à ces courbes étant confondues avec a_1 et μ_i avec a_2.

Nous avons

$$\lambda_1+\mu_1<\lambda_2+\mu_2<\ldots<\lambda_\nu+\mu_\nu<p.$$

De plus, les nombres λ_i, μ_i satisfont à la congruence

$$\lambda+\alpha\mu\equiv 0 \pmod p. \tag{1}$$

Si β est un entier inférieur à p tel que

$$\alpha\beta-1\equiv 0 \pmod p,$$

nous avons également

$$\mu+\beta\lambda\equiv 0 \pmod p. \tag{2}$$

Les courbes C_1 passent simplement par A en y touchant a_2; elles rencontrent chacune des courbes C_0', C_0'', ..., $C_0^{(\nu)}$ en p points confondus en A.

Parmi les solutions de la congruence (1), se trouve la solution $\lambda=p-\alpha$, $\mu=1$. Soient $C_0^{(\alpha)}$ les courbes qui correspondent à cette solution. Si chacune des courbes $C_0^{(\alpha)}$, le point A est l'origine d'une branche linéaire tangente en A à a_2. Cette branche doit avoir p points communs avec les courbes C_1 confondus en A, par conséquent les courbes $C_0^{(\alpha)}$, C_1 ont en commun une suite de $\alpha-1$ points fixes en commun, infiniment voisins successifs de A : nous les désignerons par $A_{\alpha.1}$, $A_{\alpha.2}$, ..., $A_{\alpha.\alpha-1}$. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution, sauf le dernier qui est uni de première espèce.

De même, en utilisant la solution $\lambda=1$, $\mu=p-\beta$ de la congruence (2), on voit que les courbes correspondantes ont en commun, avec les courbes C_α, une suite de $\beta-1$ points fixes infiniment voisins successifs de A, unis de seconde espèce pour l'involution, sauf le dernier qui est uni de première espèce.

2. Nous désignerons par Γ_0^i les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C_0^i. Les systèmes $|C_0^i|$, Γ_0^i ont la dimension r_0-i. En rapportant projectivement les courbes C_0^i aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0-i dimensions, il correspond à la surface F une surface Φ_i, image de l'involution.

dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(i)}$. Nous obtenons ainsi une suite de surfaces

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_\nu,\ \Phi_{\nu+1}, \tag{3}$$

à condition de supposer $r_0 \geqq \nu + 4$.

Soit A′ le point de diramation qui correspond sur Φ au point uni A. Sur Φ, les courbes Γ_0 sont découpées par les hyperplans passant par le point A′. La surface Φ_1 est donc la projection, à partir de A′, de la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant (ou est tout au moins projectivement identique à cette projection). Plus généralement, sur la surface Φ_i, les courbes $\Gamma_0^{(i-1)}$ sont découpées par les hyperplans passant par un point A_i' et la surface Φ_{i+1} est projectivement identique à la projection de la surface Φ_i, à partir de A_i', sur un hyperplan de l'espace ambiant.

L'utilisation de la suite de surfaces (3) permet d'analyser la singularité de la surface Φ au point A′, comme on le verra dans les exemples suivants.

I

3. Supposons en premier lieu $p = 17$, $\alpha = 14$ et par suite $\beta = 11$. Nous avons

$$\lambda_1 = 3,\quad \mu_1 = 1;\quad \lambda_2 = 1,\quad \mu_2 = 6;\quad \lambda_3 = 6,\quad \mu_3 = 2;\quad \lambda_4 = 4,\quad \mu_4 = 7;$$
$$\lambda_5 = 9,\quad \mu_5 = 3;\quad \lambda_6 = 2,\quad \mu_6 = 12;\quad \lambda_7 = 7,\quad \mu_7 = 8;\quad \lambda_8 = 12,\quad \mu_8 = 4.$$

Nous avons actuellement deux suites de points unis infiniment voisins successifs de A : L'une, $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,10}$, dont le premier point se trouve sur la tangente a_1 ; l'autre, $A_{2,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{2,13}$, dont le premier point se trouve sur a_2.

Les courbes C_0' ont un point quadruple en A ; elles passent trois fois par $A_{1,1}$, deux fois par $A_{1,2}$, une fois par $A_{1,3}, \ldots, A_{1,10}$ et une fois par un point $A_{1,2,1}$, infiniment voisin de $A_{1,2}$, uni de première espèce pour l'involution. Les courbes C_0' passent une fois par les points $A_{\alpha,1}, A_{\alpha,2}, \ldots, A_{\alpha,13}$.

Sur la surface Φ_1, il correspond aux domaines des points $A_{1,10}, A_{1,2,1}, A_{2,13}$, trois droites σ_1, τ, σ_2. Cette surface est d'ordre $n-3$ et ses sections hyperplanes Γ_0' sont de genre $\pi - 2$. Le point de diramation A′ est par conséquent triple triplanaire pour la surface Φ.

4. Les courbes C_0'' ont la multiplicité 7 en A, une des tangentes à ces courbes en ce point étant confondue avec a_1 et les six autres avec a_2. Ces courbes passent nécessairement une fois par les points $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,10}$; elles ne passent plus par $A_{1,2,1}$. Sur la surface Φ_1, les courbes Γ_0'' sont donc découpées par des hyperplans passant par un point A_1' appartenant à la droite τ.

Les courbes C_1 ne pouvant rencontrer les courbes C_0'' en plus de 17 points

confondus en A, ces dernières courbes ne passent plus par $A_{\alpha,13}$ et par suite le point A'_1 appartient également à la droite σ_α.

Le point $A_{\gamma,1}$ peut être sextuple pour les courbes C''_0; dans ce cas, le point $A_{\alpha,2}$ est quadruple pour ces courbes et celles-ci passent encore deux fois par deux points $A_{\alpha,2,1}$, $A_{\alpha,2,1,1}$ infiniment voisins successifs de $A_{\gamma,2}$. Le point $A_{\alpha,2,1,1}$ est uni de première espèce pour l'involution.

Sur la surface Φ_2, projection de Φ_1 à partir de A''_1, il correspond au domaine du point $A_{\alpha,2,1,1}$ une conique ρ_0 et A'_1 est double conique pour Φ_1. A la droite σ_1 correspond sur Φ_2 une droite σ_1 et aux droites σ_α, τ des points singuliers pour la surface, appartenant à ρ_0.

Puisque A'_1 est double conique pour Φ_1, le système $|\Gamma''_0|$ a le degré $n-5$ et par conséquent, $|C''_0|$ doit avoir le degré effectif $17(n-5)$. Or, dans l'intersection de deux courbes C''_0, le point A absorbe 7×17 points, alors qu'il ne doit en absorber que 5×17. Nous sommes donc conduit à une contradiction et par conséquent, les courbes C''_0 n'ont pas, en A, le comportement qui vient d'être indiqué.

5. Avant d'étudier le comportement des courbes C''_0, nous étudierons celui des courbes C'''_0.

Ces courbes ont la multiplicité 8 en A, six de leurs tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et deux avec a_α. Elles ne peuvent passer par les points $A_{1,10}$, $A_{\alpha,13}$, car alors elles seraient rencontrées en plus de 17 points confondus en A par les courbes C_α, C_1.

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ'''_0 sont découpées par les hyperplans passant par une droite s'appuyant sur les droites σ_1, σ_α. Ces courbes étant des courbes Γ'''_0 particulières, leurs hyperplans passent par le point A'_1, commun aux droites σ_1, τ.

Observons maintenant que les courbes C'''_0 passent nécessairement deux fois par les points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, $A_{\alpha,4}$, une fois par le point $A_{\alpha,5}$ et une fois par un point $A_{\alpha,5,1}$, uni de première espèce pour l'involution, infiniment voisin du point $A_{\alpha,5}$.

Cela étant, supposons que les courbes C'''_0 ne passent pas par le point $A_{1,2,1}$ (qui correspond à la droite τ). Alors ces courbes passent nécessairement quatre fois par $A_{1,1}$, deux fois par $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, une fois par $A_{1,4}$ et par un point $A_{1,4,1}$ infiniment voisin du précédent; enfin, deux fois par un point $A_{1,4,1,1}$ infiniment voisin de $A_{1,4}$. Dans ces conditions, le point A équivaut à 112 points dans l'intersection de deux courbes C'''_0. Mais ce nombre doit être multiple de 17, car $|C'''_0|$ appartient à l'involution. Nous sommes donc conduit à une absurdité, donc les courbes C'''_0 passent par $A_{1,2,1}$, c'est-à-dire que sur Φ_1, les hyperplans des courbes Γ'''_0 passent par la droite τ. On en conclut aussi que les droites σ_1 et τ se rencontrent.

Sur la surface Φ_2, les courbes Γ'''_0 sont découpées par les hyperplans passant

par un point A'_2 qui appartient à la droite σ_1 et coïncide avec le point singulier τ (qui représente la droite τ sur cette surface).

Les courbes C''_0 passent nécessairement six fois par le point $A_{1,1}$ et trois fois par chacun des points $A_{1,2}$, $A_{1,2,1}$.

Sur la surface Φ_3, il correspond à τ une cubique gauche que nous désignerons toujours par τ. Au domaine du point $A_{\alpha,3,1}$ correspond une droite ρ_2. A la droite σ_2 correspond un point singulier appartenant à la cubique gauche τ et à σ_α correspond également un point singulier dont la position sera fixée plus tard.

La surface Φ_3 est d'ordre $n-8$ et ses sections hyperplanes Γ''_0 ont le genre $\pi-5$.

6. Retournons aux courbes C''_0. Comme on l'a vu, aux courbes C''_0 correspondent sur Φ_2 les courbes Γ''_0 découpées par les hyperplans passant par un point A'_2 appartenant à σ_1 et coïncidant avec le point singulier τ. Φ_3 est la projection de Φ_2 à partir de ce point A'_2.

La droite ρ_2 de Φ_3 peut provenir soit d'une droite infiniment petite du domaine du point A'_2, soit d'une droite proprement dite ρ_2 tracée sur Φ_2.

Dans la première hypothèse, le point A'_2 serait quadruple pour Φ_2 et cette surface serait d'ordre $n-4$, puisque Φ_3 est d'ordre $n-8$. Sur les courbes C''_0, le point A devrait être l'origine d'une seule branche contenant, comme dernier point fixe commun à toutes ces courbes, un point uni de première espèce simple pour les courbes en question. On a vu que cela était impossible, le dernier point $A_{\alpha,2,1,1}$ étant double pour les courbes C''_0. Il existe donc sur Φ_2 une droite ρ_2 proprement dite et le point A'_2 est triple pour la surface.

Les courbes C''_0 passent une fois par le point $A_{\alpha,1,1}$ dont le domaine correspond à la droite ρ_2. Il en résulte que les courbes C''_0 passent nécessairement trois fois par $A_{\alpha,1}$, deux fois par $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, $A_{\alpha,4}$, une fois par $A_{\alpha,5}$ et par $A_{\alpha,5,1}$, enfin une fois par trois points $A_{\alpha,1,1,1}$, $A_{\alpha,1,1,2}$, $A_{\alpha,1,1,3}$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,1}$, le dernier étant uni de première espèce pour l'involution.

Au domaine du point $A_{\alpha,1,3}$ correspond sur Φ_2 une droite ρ_1 et le point A'_1 est donc double biplanaire pour Φ_1. Comme A'_1 est le point d'intersection de τ et σ_1 sur Φ_1 et que la droite ρ_2 ne rencontre pas τ, il faut que la droite ρ_1 rencontre τ et la droite ρ_2, la droite σ_α. En d'autres termes, sur la surface Φ_2, nous avons trois droites σ_1, ρ_1, ρ_2 et deux points singuliers τ et σ_α. Les droites ρ_1, ρ_2 se rencontrent; le point singulier τ appartient aux droites σ_1, ρ_1 et le point singulier σ_α à la droite ρ_2.

7. De ce qui précède résulte que le point de diramation A' de Φ est équivalent à cinq courbes rationnelles

$$\sigma_1,\quad \tau,\quad \rho_1,\quad \rho_2,\quad \sigma_\alpha.$$

chacune rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \tau - \rho_1 + \rho_2 + \sigma_2$$

et les degrés virtuels des courbes σ_1, τ, ρ_1, ρ_2, σ_2 sont par suite respectivement égaux à -2, -3, -2, -2, -2.

On a ensuite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 - \tau + 2(\rho_1 - \rho_2) - \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 + 2(\tau - \rho_1 - \rho_2) + \sigma_2.$$

On vérifie, en utilisant ces relations fonctionnelles, que les nombres des points d'intersection des courbes Γ'_0, Γ''_0 avec σ_1, τ, ρ_1, ρ_2, σ_2 sont bien ceux qui ont été rencontrés plus haut.

Le point de diramation A' de la surface Φ est triple triplanaire pour cette surface. L'un des plans tangents (τ) *à Φ en A' rencontre chacun des deux autres plans tangents* (σ_1), (σ_2) *suivant une droite, mais ces deux derniers plans ne se rencontrent pas en dehors de A'. Au point A' est infiniment voisin, sur la droite commune aux plans* (τ), (σ_2), *un point double biplanaire.*

II

8. Nous supposerons en second lieu $p = 23$, $\alpha = 19$, d'où $\beta = 17$. On a

$\lambda_1 = 4$, $\mu_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$, $\mu_2 = 6$; $\lambda_3 = 8$, $\mu_3 = 2$; $\lambda_4 = 5$, $\mu_4 = 7$;
$\lambda_5 = 2$, $\mu_5 = 12$; $\lambda_6 = 12$, $\mu_6 = 3$; $\lambda_7 = 9$, $\mu_7 = 8$; $\lambda_8 = 6$, $\mu_8 = 13$;
$\lambda_9 = 16$, $\mu_9 = 4$; $\lambda_{10} = 3$, $\mu_{10} = 18$; $\lambda_{11} = 13$, $\mu_{11} = 9$.

Les courbes C'_0 ont en A la multiplicité 5, quatre tangentes étant confondues avec a_1 et une avec a_2. Ces courbes passent simplement par une suite de 18 points fixes $A_{2,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{2,18}$, infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution, le dernier étant uni de première espèce.

Les courbes C'_0 passent par une suite de 16 points fixes $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,16}$, infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution, le dernier étant uni de première espèce. Elles passent précisément trois fois par le point $A_{1,1}$, une fois par les autres. Elles passent en outre une fois par deux points fixes $A_{1,17}$, infiniment voisin de $A_{1,1}$ et $A_{1,17,1}$, infiniment voisin de $A_{1,4,1}$. Ces points sont unis pour l'involution et le dernier est de première espèce.

Sur la surface Φ_1, il correspond aux domaines des points $A_{1,16}, A_{1,17,1}, A_{2,18}$, des droites σ_1, τ, σ_2. Le point A' est donc triple triplanaire pour la surface Φ. La surface Φ_1 est d'ordre $n-3$ et ses sections hyperplanes Γ_1 sont de genre $\pi - 2$.

9. Les courbes C_0'' passent sept fois par A, une de leurs tangentes en ce point est confondue avec a_1. Ces courbes passent simplement par les seize points $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,16}$. Par conséquent, les courbes Γ_0'' qui leur correspondent sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans passant par un point A_1' appartenant à la droite τ.

Les courbes C_0'' ne peuvent plus passer par le point $A_{\alpha,18}$, car autrement elles seraient rencontrées par les courbes C_1 en plus de 23 points confondus en A. Par conséquent, les hyperplans des courbes Γ_0'' sur Φ_1 passent par un point appartenant à σ_α. Le point A_1' appartient donc aux droites τ, σ_α.

Les courbes C_0'' peuvent passer six fois sur les points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, quatre fois par le point $A_{\alpha,3}$ et deux fois par un point $A_{\alpha,3,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,3}$ et par un point $A_{\alpha,3,1,1}$ infiniment voisin du précédent. Le point A_1' serait alors double conique pour la surface Φ_1 et la surface Φ_2 serait d'ordre $n-5$. Or, dans l'intersection de deux courbes C_0'', le point A absorbe 7×23 unités, de sorte que la surface Φ_2 devrait être $n-7$. L'absurdité à laquelle nous parvenons prouve que les courbes C_0' ne peuvent avoir en A le comportement qui vient d'être considéré.

10. Comme dans le cas précédent, nous étudierons d'abord le comportement des courbes C_0''' au point A.

Les courbes C_0''' ont en A la multiplicité 10, huit tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et deux avec a_α. Ces courbes passent nécessairement deux fois par les six points $A_{\alpha,1}, A_{\alpha,2}, \ldots, A_{\alpha,6}$, une fois par $A_{\alpha,7}$ et une fois par un point $A_{\alpha,7,1}$ infiniment voisin du précédent. Le point $A_{\alpha,7,1}$ est uni de première espèce pour l'involution. Au domaine de ce point correspond, sur la surface Φ_3, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0''', une droite ρ_2.

Les courbes C_0''' ne peuvent passer par $A_{1,16}$, car autrement elles seraient rencontrées sur plus de 23 points confondus en A par les courbes C_α. Il en résulte que sur la surface Φ_1, les courbes Γ_0''' sont découpées par des hyperplans passant par une droite s'appuyant sur σ_1 et passant par le point A_1' (car les courbes Γ_0''' sont des courbes Γ_0'' particulières).

Supposons en premier lieu que les courbes C_0''' ne passent pas par $A_{1,1,1,1}$. Alors, ces courbes passent huit fois par $A_{1,1}$, cinq fois par $A_{1,2}$, trois fois par un point $A_{1,2,1}$ infiniment voisin de $A_{1,2}$, deux fois par un point $A_{1,2,1,1}$ infiniment voisin du précédent, enfin une fois par un point $A_{1,2,1,1,1}$ infiniment voisin de $A_{1,2,1,1}$. Le point A absorbe 103 points dans l'intersection de deux courbes C_0'''. Ces courbes forment un système linéaire appartenant à l'involution, ce nombre devrait être multiple de 23. Il en résulte que les nombres C_0''' passent par $A_{1,1,1,1}$, c'est-à-dire que les hyperplans découpant sur Φ_1 les courbes Γ_0''' passent par la droite τ. Celle-ci doit donc s'appuyer sur σ_1 en un point que nous désignerons par A_1'''.

Les courbes Γ_0''' rencontrent τ en trois points variables au plus, c'est-à-dire que $A_{1,1,1,1}$ est au plus triple pour les courbes C_0'''.

Si $A_{1,1,1,1}$ est triple pour les courbes C_0''', il en est de même de $A_{1,1,1}$ et le point $A_{1,1}$ est multiple d'ordre 6 pour ces courbes. Cela est impossible, car la somme des multiplicités des points $A_{1,1}$, $A_{1,1,1}$ pour les courbes C_0''' est en plus égale à 8, nombre des tangentes en A à ces courbes confondues avec a_1.

Si $A_{1,1,1,1}$ est double pour les courbes C_0''', $A_{1,1,1}$ est également double pour ces courbes. Le point $A_{1,1}$ est sextuple pour les courbes C_0''' et celles-ci passent deux fois par $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{1,4}$, une fois par $A_{1,5}$ et une fois par un point $A_{1,5,1}$, uni de première espèce pour l'involution. Au domaine de ce point correspond sur Φ_3 une droite τ_1. Φ_3 est d'ordre $n-8$.

Si $A_{1,1,1,1}$ est simple pour les courbes C_0''', $A_{1,1,1}$ est également simple et $A_{1,1}$ est multiple d'ordre 7; $A_{1,2}$ est multiple d'ordre 5, $A_{1,3}$ est simple et les courbes C_0''' passent encore simplement par quatre points $A_{1,3,1}$, $A_{1,3,2}$, $A_{1,3,3}$, $A_{1,3,4}$ infiniment voisins successifs de $A_{1,3}$. Au domaine de ce dernier point correspond encore sur Φ_3 une droite τ_1. Φ_3 est d'ordre $n-9$.

Observons que sur la surface Φ_2, à la droite σ_1 de Φ_1 correspond une droite σ_1, à τ correspond un point singulier situé sur σ_1. Les courbes Γ_0''' sont découpées sur Φ_2 par les hyperplans passant par un point A_2' qui coïncide avec τ. D'une manière précise, le domaine de A_2' sur Φ_2 est équivalent à l'ensemble des courbes τ_1, τ et éventuellement ρ_2.

Si la droite ρ_2 de Φ_3 provenait d'une droite infiniment petite, infiniment voisine de A_2', les courbes C_0'' ne passeraient pas par $A_{\alpha,7,1}$ et sur ces courbes, le point A serait l'origine d'une seule branche tangente à a_α. On a vu que dans ce cas, A_1' est double conique pour Φ_1 et que l'on est conduit à une contradiction. Donc ρ_2 provient d'une droite ρ_2 tracée sur Φ_2. Dans ces conditions, A_2' est au plus triple pour Φ_2 et d'autre part, A_1' est au plus double pour Φ_1; l'ordre de la surface Φ_3 est au moins égal à $n-8$. On en conclut que c'est la première hypothèse envisagée plus haut qui est valable, c'est-à-dire que le point $A_{1,1,1,1}$ est double pour les courbes C_0'''.

Sur la surface Φ_2, τ est une conique et τ_1 une droite. A σ_1 correspond un point singulier appartenant à τ ou τ_1. On verra plus loin qu'il appartient à τ_1.

11. Sur Φ_2, ρ_2 est une droite, donc les courbes C_0'' passent simplement par le point $A_{\alpha,7,1}$. Il en résulte que ces courbes passent simplement par $A_{\alpha,7}$ et au moins deux fois par $A_{\alpha,6}$, $A_{\alpha,5}$, ..., $A_{\alpha,1}$. Il est aisé de voir qu'elles doivent précisément passer cinq fois par $A_{\alpha,1}$ et deux fois par $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, ..., $A_{\alpha,6}$. De plus, elles passent une fois par un point $A_{\alpha,1,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,1}$ et par deux points $A_{\alpha,1,1,1}$, $A_{\alpha,1,1,2}$ infiniment voisins successifs du précédent. Au domaine du point $A_{\alpha,1,1,2}$ correspond sur Φ_2 une droite ρ_1 et le point A_1' est double biplanaire pour Φ_1.

Des deux droites ρ_1, ρ_2, l'une, par exemple ρ_1, rencontre τ et l'autre ρ_2

rencontre σ_α. Sur la surface Φ_2, σ_α est un point singulier appartenant à la droite ρ_2 et τ un point singulier appartenant à la droite ρ_1. Il en résulte que c'est τ_1 qui rencontre σ_1.

12. Le point de diramation A′ de Φ est équivalent à l'ensemble de six courbes rationnelles

$$\sigma_1, \quad \tau_1, \quad \tau, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \sigma_\alpha,$$

dont chacune rencontre la suivante et la précédente en un point, mais ne rencontre pas les autres.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \sigma_1 + \tau_1 + \tau + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_\alpha$$

et l'on en conclut que les courbes $\sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_\alpha$ ont respectivement pour degré virtuel $-2, -2, -3, -2, -2, -2$.

Les courbes Γ''_0, Γ'''_0 satisfont aux relations fonctionnelles

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma''_0 + \sigma_1 + \tau_1 + \tau + 2(\rho_1 + \rho_2) + \sigma_\alpha,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'''_0 + \sigma_1 + 2(\tau_1 + \tau + \rho_1 + \rho_2) + \sigma_\alpha.$$

Le domaine du point A''_1 intersection des droites σ_1, τ sur Φ_1, est équivalent à la droite τ_1. Ce point est double conique pour Φ_1, car lorsque l'on passe de Φ_1 à Φ_2 par projection à partir de A'_1, à la conique infiniment petite du domaine de A''_1 sur Φ_1, correspond une droite infiniment petite infiniment voisine de A'_2.

Le point de diramation A′ *de la surface* Φ *est triple triplanaire pour cette surface; le cône tangent en ce point se compose de trois plans* (σ_1), (τ), (σ_α), *le second rencontrant les deux autres chacun suivant une droite, mais* (σ_1), (σ_α) *ne se rencontrant pas en dehors de* A′. *Au point* A′ *sont infiniment voisins un point double biplanaire sur la droite commune à* (τ_1), (σ_α) *et un point double conique situé sur la droite commune à* (τ), (σ_1).

III.

13. Supposons maintenant que nous ayons $p = 23$, $\alpha = 20$, d'où $\beta = 15$. Nous avons

$\lambda_1 = 3$, $\mu_1 = 1$; $\lambda_2 = 6$, $\mu_2 = 2$; $\lambda_3 = 1$, $\mu_3 = 8$, $\lambda_4 = 9$; $\mu_4 = 3$;
$\lambda_5 = 4$, $\mu_5 = 9$; $\lambda_6 = 12$, $\mu_6 = 4$; $\lambda_7 = 7$, $\mu_7 = 10$; $\lambda_8 = 3$, $\mu_8 = 16$;
$\lambda_9 = 15$, $\mu_9 = 5$; $\mu_{10} = 10$, $\mu_{10} = 11$; $\lambda_{11} = 5$, $\mu_{11} = 17$.

Les courbes C_0 ont en A la multiplicité 4, trois tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et une avec a_α. Elles ont en commun une suite de 19 points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, $\ldots$, $A_{\alpha,19}$, infiniment voisins successifs de A, simples pour les

courbes et une suite de 14 points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ..., $A_{1,14}$ infiniment voisins successifs de A. Le point $A_{\alpha,1}$ appartient à a_α et le point $A_{1,1}$ à a_1.

Les points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$ sont triples pour les courbes C'_0, le point $A_{1,3}$ est double et les points $A_{1,4}$, ..., $A_{1,14}$ sont simples. Les courbes C'_0 ont en outre en commun un point simple $A_{1,3,1}$ infiniment voisin de $A_{1,3}$.

Les points $A_{1,14}$, $A_{1,3,1}$ et $A_{\alpha,19}$ sont unis de première espèce pour l'involution et il leur correspond, sur la surface Φ_1, trois droites σ_1, τ, σ_α. Le point de diramation A' est donc triple triplanaire pour la surface Φ.

Les sections hyperplanes Γ'_0 de Φ, sont de genre $\pi - 2$ et la surface est d'ordre $n - 3$.

14. Les courbes C''_0 ont la multiplicité 8 en A, six tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et les deux autres avec a_α. Ces courbes passent nécessairement deux fois par $A_{1,1}$ et une fois par $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, ..., $A_{1,14}$; elles ne passent plus par $A_{1,3,1}$. Ces courbes ne peuvent plus passer par $A_{\alpha,19}$; elles passent précisément deux fois par sept points $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, ..., $A_{\alpha,7}$, une fois par $A_{\alpha,8}$.

Les courbes C''_0 doivent passer par quatre points $A_{1,1,1}$, $A_{1,1,2}$, $A_{1,1,3}$, $A_{1,1,4}$ infiniment voisins successifs de $A_{1,1}$ et une fois par un point $A_{\alpha,8,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,8}$.

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ''_0 sont découpées par les hyperplans passant par un point A'_1 appartenant aux droites τ et σ_α.

Les points $A_{1,1,4}$ et $A_{\alpha,8,1}$ sont unis de première espèce pour l'involution et il correspond à leurs domaines, sur la surface Φ_2, deux droites ρ_{11}, ρ_{21}. Il en résulte que A'_1 est double biplanaire pour la surface Φ_1, les plans tangents à cette surface en ce point étant obtenus en projetant les droites ρ_{11}, ρ_{21} de A'_1.

A la droite τ correspond sur Φ_2 un point singulier appartenant à la droite ρ_{11} et à σ_α, un point singulier appartenant à la droite ρ_{21}. A σ_1 correspond une droite σ_1.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - 5$ et ses sections hyperplanes Γ''_0 sont de genre $\pi - 3$.

15. Les courbes C'''_0 ont en A la multiplicité 9, une de leurs tangentes en ce point étant confondue avec a_1 et 8 avec a_α. Elles passent simplement par les points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ..., $A_{1,14}$. Sur Φ_2, il leur correspond des courbes Γ'''_0 découpées par les hyperplans passant par un point A'_2 appartenant à ρ_{11}, distinct du point singulier τ.

Si le point A est, sur une courbe C'''_0, l'origine d'une seule branche tangente à a_α, ces courbes passant huit fois par $A_{\alpha,1}$, six fois par $A_{\alpha,2}$, deux fois par trois points $A_{\alpha,2,1}$, $A_{\alpha,2,1,1}$, $A_{\alpha,2,1,2}$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,2}$. Mais dans ces conditions, le point A absorbe 9×23 points dans l'intersection de deux courbes C'''_0 et la surface Φ_3 est donc d'ordre $n - 9$. D'autre part, les

courbes C_0''' ne passant pas par $A_{\alpha,8,1}$, il correspond à ces courbes sur Φ_2 les sections par les hyperplans passant par un point A_2' appartenant à ρ_{21}. On a vu que A_2' appartient également à ρ_{11}. Ce point A_2' devrait être multiple d'ordre 4 pour Φ_2, ce qui est absurde, car il donnerait sur Φ_1 un point quadruple infiniment voisin d'un point double.

On en conclut que sur une courbe C_0''', le point A est l'origine de deux branches tangentes en ce point à a_α. L'examen des cas possibles, en tenant compte que les courbes C_0''' coupent les courbes C_1 en 23 points confondus en A et que $|C_0'''|$ appartient à l'involution, conduit à une seule solution acceptable.

Les courbes C_0''' passent six fois par $A_{\alpha,1}$, trois fois par $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, deux fois par $A_{\alpha,4}$ et en outre deux fois par un point $A_{\alpha,1,1}$ infiniment voisin de $A_{\alpha,1}$, une fois par deux points $A_{\alpha,1,2}$, $A_{\alpha,1,2,1}$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,1,1}$, enfin une fois par deux points $A_{\alpha,4,1}$, $A_{\alpha,4,1,1}$ infiniment voisins successifs de $A_{\alpha,4}$.

Les points $A_{\alpha,1,2,1}$ et $A_{\alpha,4,1,1}$ sont unis de première espèce pour l'involution et il leur correspond, sur Φ_3, deux droites ρ_{12}, ρ_{22}. Le point A_2' est donc double biplanaire pour Φ_2. La surface Φ_3 est d'ordre $n-7$ et ses sections hyperplanes Γ_0''' sont de genre $\pi-4$.

Sur la surface Φ_3 existent deux points singuliers : l'un appartenant à la droite ρ_{12} représente les courbes τ et ρ_{11}, l'autre appartenant à la droite ρ_{22} représente les courbes σ_α, ρ_{21}. A σ_1 correspond une droite σ_1.

16. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont en A la multiplicité 12, neuf tangentes étant confondues avec a_1 et trois avec a_α. Ces courbes ne peuvent plus passer par $A_{1,1,1}$.

Si les courbes $C_0^{(4)}$ passaient deux fois par $A_{\alpha,1}$, le point $A_{\alpha,1,1}$ leur appartiendrait et serait uni de première espèce pour l'involution. Or, les courbes C_0'' passent par ce point et par $A_{\alpha,1,2}$ et par conséquent $A_{\alpha,1,1}$ ne peut être qu'un point uni de seconde espèce. Les courbes $C_0^{(4)}$ passent donc trois fois par $A_{\alpha,1}$. Elles passent nécessairement trois fois par $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$, deux fois par $A_{\alpha,4}$ et une fois par $A_{\alpha,4,1}$, $A_{\alpha,4,1,1}$. Il en résulte que les courbes $\Gamma_0^{(4)}$, sur Φ_3, rencontrent ρ_{22} en un point variable, mais ρ_{12} en un point fixe. Ces courbes sont découpées sur cette surface par les hyperplans passant par un point A_3' appartenant aux droites ρ_{12} et σ_1.

Si les courbes $C_0^{(4)}$ passaient neuf fois par $A_{1,1}$, elles passeraient deux fois par $A_{1,2}$, deux fois par trois points et une fois par deux points infiniment voisins successifs de $A_{1,2}$. Le point A_3' serait simple pour Φ_3. Par contre, le degré de $|\Gamma_0^{(4)}|$ serait égal à $n-12$ et devrait être quintuple pour Φ_3. Donc les courbes $C_0^{(4)}$ ne peuvent passer neuf fois par $A_{1,1}$.

Si les courbes $C_0^{(4)}$ passaient plus de cinq fois par $A_{1,1}$, l'un des points $A_{1,1,1}$, $A_{1,1,2}$, $A_{1,1,3}$ serait uni de première espèce pour l'involution, alors que ces points, qui appartiennent aux courbes C_0'', sont unis de seconde espèce. On vérifie aisément que si elles passaient moins de cinq fois par $A_{1,1}$, le degré

effectif de $|C_0'|$ ne pourrait être multiple de 23. On en conclut que les courbes C_0' passent cinq fois par $A_{1.1}$, quatre fois par $A_{1.2}$, deux fois $A_{1.3}$, une fois par chacun des points $A_{1.1.1}, A_{1.1.2}, A_{1.1.3}, A_{1.1.4}$ et enfin deux fois par $A_{1.3\,1}$. Par conséquent, le point A_2' coïncide avec le point singulier de ρ_{12} qui représente les courbes τ, ρ_{11}.

Sur la surface Φ_4, la courbe τ est une conique, la courbe ρ_{11} une droite, σ_1 est un point singulier appartenant à la conique τ, ρ_{12} un point singulier appartenant à la droite ρ_{11}, ρ_{22} est une droite passant par ce point singulier et contenant un point singulier représentant les courbes ρ_{21} et σ_2.

La surface Φ_4 est d'ordre $n-10$ et ses sections hyperplanes Γ_0' sont de genre $\tau - 6$.

17. Le point de diramation A' de Φ est équivalent à un ensemble de sept courbes rationnelles

$$\sigma_1, \quad \tau, \quad \rho_{11}, \quad \rho_{12}, \quad \rho_{22}, \quad \rho_{21}, \quad \sigma_2$$

et l'on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau + \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{22} + \rho_{21} + \sigma_2.$$

On en conclut que ces courbes ont le degré virtuel -2, sauf τ qui a le degré virtuel -3.

On a ensuite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \sigma_1 + \tau + 2(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{22} + \rho_{21}) + \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \sigma_1 + \tau + 2\rho_{11} + 3(\rho_{12} + \rho_{22}) + 2\rho_{21} + \sigma_2,$$
$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{IV} + \sigma_1 + 2\tau + 3(\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{22}) + 2\rho_{21} + \sigma_2.$$

On en conclut que :

Le point de diramation A' de la surface Φ est triple triplanaire pour cette surface; le cône tangent à ce point se compose de trois plans (σ_1), (τ), (σ_2), le second rencontrant chacun des deux autres suivant une droite, mais ceux-ci ne se rencontrant pas en dehors de A'. Au point A' sont infiniment voisins successifs deux points doubles biplanaires dont le premier est sur la droite commune aux plans (τ), (σ_2), le second étant ordinaire.

AXIOME DE ZERMELO ET NOMBRES TRANSFINIS

Par M. Paul LÉVY.

Le présent travail comprend trois Chapitres à peu près indépendants. Il a surtout pour but de présenter la défense d'idées encore souvent discutées. Je pense qu'il contient aussi, et même dans chaque Chapitre, certaines idées nouvelles.

Dans le Chapitre I, je reviens sur la question si discutée de l'axiome de Zermelo. Cela m'a paru utile à la suite de la publication récente de deux livres dans lesquels M. Émile Borel (1), sans essayer d'expliquer comment il se fait qu'un ensemble étant donné, on ne pourrait pas sans risquer de contradiction essayer d'isoler par la pensée un de ses éléments, montre que cette manière d'opérer conduit, dans certains cas où l'on ne sait pas définir l'élément ainsi isolé, à des conséquences paradoxales, et qu'il juge inadmissibles. J'essaye de montrer que le rejet de l'axiome de Zermelo conduit à des conséquences plus paradoxales encore; pour les admettre, il faudrait presque douter de la raison humaine. Au contraire celles qui résultent de l'emploi de cet axiome ne font que troubler nos habitudes, et peuvent tout au plus nous conduire à douter de notre intuition.

J'insiste aussi sur un autre aspect de la question qui est surtout net dans les travaux de M. Brouwer. Il semble que, pour les savants qui adoptent les idées de Lebesgue, de M. Borel, ou celles de M. Brouwer, les êtres mathématiques n'aient pas d'existence propre, mais n'existent qu'en fonction des possibilités que nous avons de les découvrir. Il paraît pourtant difficile de contester qu'il existe des nombres non nommables. Or les idées que je combats ne peuvent se défendre qu'à condition de nier cette existence, ou de prétendre que ces nombres sont doués d'un pouvoir bien mystérieux, celui de mettre en défaut les règles mêmes de la logique. On ne devrait donc pas essayer de raisonner sur des objets abstraits, mais seulement sur ceux qu'on peut en quelque sorte toucher. De telles idées seraient à la rigueur compréhensibles chez un physicien. Qu'elles soient nées dans le cerveau de mathématiciens, et aient été

(1) É. Borel, *Les paradoxes de l'infini* (édit. Albin Michel, 1946); *Éléments de la théorie des ensembles* (Gallimard, 1948).

adoptées par plusieurs des savants les plus éminents de ce temps, ne me semble pouvoir s'expliquer que par le désir, à mon avis injustifié, d'échapper à tout prix à certaines conclusions évidemment paradoxales.

Le Chapitre II est consacré à l'antinomie Richard. Mes idées sur cette antinomie n'ont pas changé depuis l'exposé que j'en ai fait en 1936 dans *Recherches philosophiques:* mais en relisant cet exposé, je crains d'avoir trop insisté sur une difficulté accessoire, relative au langage que l'on emploie, et que l'essentiel ne soit pas suffisamment en évidence. Ce que je crois essentiel, et sur quoi j'insiste ici, est le rôle que jouent dans l'explication de cette antinomie certains nombres transfinis, à chacun desquels la lumière que notre intelligence projette sur le début de l'échelle de ces nombres s'affaiblit, pour finir par disparaître complètement.

Je montrerai ensuite comment les bornes du connaissable, ou, plus précisément, du nommable, se retrouvent dans d'autres domaines. Ainsi, dans le domaine des nombres réels, aux nombres transfinis trop grands pour être nommés, se rattachent des classes bien définies de nombres qui ne sont pas individuellement nommables.

Le Chapitre III est consacré à un théorème de M. Denjoy, qui est peut-être le résultat le plus important obtenu depuis dix ans sur les nombres transfinis (1). Il montre que n'importe quel nombre transfini de la seconde classe peut être défini, sans récurrence transfinie, par la donnée d'une suite S de nombres entiers, choisie dans un certain ensemble C′ de telles suites.

Naturellement ce théorème ne recule pas les bornes de l'inconnaissable, puisqu'on ne peut nommer que certaines des suites S de l'ensemble C′. Il ne permet pas non plus de résoudre le problème du continu, parce que l'ensemble C′ se décompose en classes E ayant chacune la puissance du continu, et qu'à toutes les suites d'une même classe E correspond un même nombre transfini.

Après avoir rappelé l'énoncé et la démonstration du théorème de M. Denjoy, je présenterai quelques remarques sur la possibilité d'établir une correspondance biunivoque entre les suites S qui appartiennent à l'ensemble C′ et les points x d'un segment. Une telle correspondance permettrait de considérer un nombre transfini qui soit fonction de x, l'ensemble des valeurs de cette fonction comprenant tous les nombres transfinis de la seconde classe. Mais, si l'on cherche une solution de ce problème qui évite certains inconvénients de celle que donne le théorème général de Cantor, et qui soit pratiquement utilisable, il semble qu'on retombe nécessairement sur les difficultés du transfini, que le théorème de M. Denjoy a précisément pour objet d'éviter. On peut donc se demander si ce théorème, très important théoriquement, est pratiquement utilisable.

(1) A. Denjoy, *L'Énumération transfinie* (Gauthier-Villars, 1946), p. 151 et suiv., et surtout p. 203 à 206.

CHAPITRE I.

L'Axiome de Zermelo.

1. *L'apparition en analyse des éléments non nommables.* — Quelle que soit la nature des éléments d'un ensemble infini, il est bien clair qu'il en existe au plus une infinité dénombrable qu'on puisse *nommer*, c'est-à-dire distinguer des autres par une définition exprimable en un nombre fini de mots. La découverte de l'existence d'ensembles non dénombrables devait donc nécessairement conduire à la conclusion qu'il existe des éléments *innommables*. Il sera utile pour la suite de rappeler brièvement deux théorèmes d'où résulte cette existence, avec des démonstrations un peu différentes de celles qu'on donne en général.

1° Rappelons d'abord, en considérant des suites au lieu de fonctions, le premier théorème fondamental de Paul Dubois Reymond. Soient

$$(S_\nu) \qquad a_{\nu,1},\quad a_{\nu,2},\quad \ldots,\quad a_{\nu,n},\quad \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

une infinité de suites d'entiers positifs croissants. Il existe une suite plus rapidement croissante que toutes les suites S_ν; tel est le cas de celle dont le terme général est

$$(1) \qquad b_n = a_{1,n} + a_{2,n} + \ldots + a_{n,n},$$

puisque, pour $n > \nu$, on a $b_n > a_{\nu,n}$.

Naturellement, le résultat subsiste pour les suites de nombres positifs non entiers, et aussi pour les fonctions positives. Ainsi, si les $f_\nu(x)$ sont tous positifs, la fonction

$$(2) \qquad g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \theta f_{n+1}(x),$$

où $x = n + \theta$, n étant la partie entière de x, est, pour x assez grand, supérieure à n'importe quelle fonction $f_\nu(x)$.

Retenons surtout cette conséquence : qu'il s'agisse de fonctions ou de suites, *il en existe qu'on ne peut pas espérer nommer, parce qu'elles croissent trop rapidement.*

On pourrait, à propos de ce premier résultat, soulever des objections analogues à celles qui constituent l'antinomie Richard. Comme le Chapitre II a pour objet l'étude et l'explication de cette antinomie, nous n'insisterons pas ici sur cette question.

2° Rappelons maintenant le théorème de Cantor d'après lequel le continu n'est pas dénombrable. Considérons un nombre x et sa représentation décimale.

Pour chacun des dix chiffres, considérons la suite des rangs qu'il occupe dans cette représentation. Si une de ces suites est infinie et trop rapidement croissante pour être nommable, il est évident que x n'est pas non plus nommable.

Ainsi : *il existe une classe de nombres qui ne sont pas nommables parce que leurs représentations décimales font intervenir des suites trop rapidement croissantes.*

Des classes analogues sont liées à n'importe quel système de numération, d'autres à la théorie de l'approximation des nombres par des fractions décimales, ou rationnelles. Ainsi on peut définir une classe de nombres de Liouville qui ne sont pas nommables.

Le théorème de Cantor résulte immédiatement de ces remarques. Utilisons pour le montrer la numération dyadique qui établit une correspondance biunivoque entre les nombres x de l'intervalle semi-ouvert $0 \leq x < 1$ et les suites de chiffres 0 ou 1 comprenant une infinité de zéros, donc aussi entre ces nombres x et les suites S qui, pour chaque x, indiquent les rangs des zéros. Considérons une suite de nombres $x_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$; il lui correspond une suite infinie de suites S_ν. On peut alors, par la formule (1), définir une suite S plus rapidement croissante que toutes les suites S_ν; donc un x différent de tous les x_ν.

2. *L'existence des nombres innommables.* — Les êtres mathématiques innommables, et en particulier les nombres innommables, existent-ils réellement? Ne sommes-nous pas victimes d'une illusion?

Question étrange, sans doute, mais pas plus que les objections contre l'axiome du choix que nous voulons discuter. Je pense même que là est le fond du débat.

1° Examinons d'abord une question préliminaire. Les êtres mathématiques existent-ils par eux-mêmes, ou seulement en fonction de l'esprit humain, et de notre logique humaine? L'attitude de M. Brouwer au sujet de la vérité des énoncés des théorèmes nous oblige à poser la question.

Considérons un énoncé précis; pour fixer les idées, celui du théorème de Fermat. Pour nous, il est vrai ou faux, et la somme

$$\sum_{p=3}^{\infty} \frac{1}{p^2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n^p x}{n^2} \right)^3 dx$$

est nulle dans le premier cas et positive dans le second. S'il est faux, on peut vérifier qu'il est faux (quoiqu'on ne sache pas à l'avance combien de temps il faudra). S'il est vrai, il faudrait une infinité de vérifications pour s'en assurer, et rien ne prouve *a priori* que cette suite infinie puisse être remplacée par un raisonnement fini. Donc, il y a trois hypothèses possibles (pour d'autres théo-

rèmes il y en a quatre) : le théorème est faux ; il est vrai et démontrable ; il est vrai et indémontrable (1).

Dans ce dernier cas, M. Brouwer se refuse à le considérer comme vrai, et la constante c n'est ni nulle ni positive (ni bien entendu négative).

Qu'il puisse logiquement considérer trois cas, et en déduire certaines conséquences, est incontestable. Ce que nous prétendons, c'est qu'il n'était pas nécessaire pour cela d'abandonner le langage classique. Il suffisait de parler de propositions vraies ou fausses, démontrables ou indémontrables. Le langage nouveau ne pouvait qu'apporter de la confusion, et séduire les amateurs de paradoxes. C'est ce qui a eu lieu.

On ne saurait évidemment pas prouver *a priori* que le théorème de Fermat ne peut être que vrai ou faux. Cela est évident, et rien ne saurait persuader celui qui nie l'évidence. Faisons toutefois une remarque : imaginons un être qui puisse accélérer sa pensée, de manière à effectuer en un temps $\frac{1}{n^2}$ la $n^{\text{ième}}$ des vérifications nécessaires pour savoir si ce théorème est vrai ou faux. Au bout d'un temps fini il saurait à quoi s'en tenir. Si le théorème est vrai, il peut rester indémontrable pour nous, qui n'avons pas le pouvoir surnaturel de dilater le temps. Mais comment douter de la vérité d'un théorème que cet être imaginaire (qui nous servira plusieurs fois dans la suite) aurait reconnu exact (2)?

Si, quittant le domaine des propositions, nous revenons à celui des êtres mathématiques tels que nombres, fonctions, éléments d'un ensemble, il semble bien que les objections inexplicables de certains mathématiciens contre l'axiome de Zermelo trahissent un état d'esprit analogue à celui de M. Brouwer. Pour nous il n'y a rien de paradoxal à ce que nous ne puissions pas nommer tous les éléments d'un ensemble infini non dénombrable : ce ne l'est pas plus que l'impossibilité où nous sommes d'achever l'énumération d'un ensemble dénombrable. Pour nous, les nombres innommables existent ; ils sont nécessaires à notre notion du continu. Eux craignent d'être victimes d'une illusion. Essayons d'examiner la question avec eux.

2° Mentionnons d'abord notre idée intuitive du continu, homogène, invariant par une translation. Il faut bien avouer que, s'il n'y avait que cette notion intuitive, on pourrait se demander si elle n'est pas illusoire. Si en effet on ne consi-

(1) Je rappelle à ce sujet une remarque que j'ai faite en 1926 : il y a contradiction à supposer qu'on puisse démontrer qu'on est dans ce dernier cas. Si en effet le théorème est faux, cela ne saurait être indémontrable. Si donc il est impossible de résoudre la question de savoir s'il est vrai ou faux, on ne démontrera jamais cette impossibilité.

(2) On peut m'objecter qu'on cherche à édifier une science humaine, et refuser l'intervention d'un être surnaturel. Je répondrai que, si un homme peut découvrir une contradiction entre certains axiomes, lui le peut *a fortiori*. Or je sais qu'il n'en trouvera pas dans l'idée d'une suite infinie quelconque. Je ne le mettrai en cause que quand, humainement, je suis sûr de ce qu'il dirait.

dère, sur l'axe des x, que les translations nommables, l'ensemble des points nommables est invariant par une translation.

Mais l'analyse du continu par la numération est beaucoup plus convaincante : un nombre x compris entre zéro et un s'identifie à la suite de ses décimales. Comment douter que nous puissions considérer une suite absolument quelconque de chiffres, que cela ait un sens ?

M. Borel a fait observer que nous ne pouvons nommer une telle suite que s'il y a une loi. Cela est incontestable. Cela ne permet pas de douter que les autres suites existent. L'être surnaturel que je viens de présenter au lecteur n'aurait pas de peine à nommer n'importe laquelle de ces suites (même lui ne pourrait d'ailleurs pas venir à bout de les nommer toutes) ; c'est donc qu'elles existent.

J'avoue d'ailleurs que, si je comprends quand on parle d'une suite périodique, ou d'une loi de forme donnée, je comprends beaucoup moins bien lorsqu'on parle d'une loi quelconque. A l'idée claire de la division d'un segment en 10, puis en 100 parties égales, et ainsi de suite, et à l'idée qu'une chaîne de segments ainsi distingués et dont chacun est intérieur au précédent n'est jamais vide, mais définit un point, on substitue l'idée confuse d'un ensemble défini par un certain ensemble de lois, ensemble dont la définition même ne peut pas être achevée. Il n'y aurait pas, comme le pense M. Borel, une simplification des mathémathiques, mais une étrange complication. Mais surtout, quelle obscurité ! Si l'être surnaturel dont nous avons parlé nous présentait une suite infinie, à quoi reconnaîtrions-nous s'il y a une loi ?

3° Quoique j'aie peine à concevoir qu'on puisse réellement vouloir vider le continu de son contenu, je voudrais montrer que cette attitude conduirait à des conséquences bien plus gênantes que celles que M. Borel voudrait éviter en le faisant.

Tout d'abord, si l'on considère que les éléments nommables existent seuls, tous les ensembles sont dénombrables. La notion de puissance, au sens de Cantor, disparaît, et, si les raisonnements rappelés au n° 1 obligent à parler d'ensembles non dénombrables, il ne s'agit pas d'ensembles qui contiennent *trop d'éléments* pour qu'on puisse les dénombrer. Ce sont des ensembles qui, en un sens, devraient être considérés comme dénombrables, mais pour lesquels nous ne savons pas en un nombre fini de mots définir une loi de dénombrement. C'est ce qu'est effectivement l'ensemble des nombres nommables.

Mais les difficultés véritables apparaissent avec la théorie de la mesure. Puisqu'il n'y aurait que des ensembles dénombrables, il n'y aurait que des ensembles de mesure nulle. Que deviendrait l'intégrale de Lebesgue, base de l'Analyse moderne ? Que dirait-on en particulier de la fonction égale à zéro si x est nommable et à un dans le cas contraire ? Dirait-on qu'elle est toujours nulle, puisque x est toujours nommable, ou dirait-on, comme nous le faisons, qu'elle est presque partout égale à un ?

On voit qu'il est impossible d'accepter toutes les conséquences de l'attitude qui consiste à nier l'existence des éléments non nommables (1). Il faut donc renoncer à cette attitude.

4° « Soit, dira-t-on ; mais ces éléments innommables sont dangereux ; on ne sait pas quels pièges ils cachent ». Ainsi, lorsque j'écris par exemple

$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x),$$

je devrais me demander si cette formule reste vraie si x n'est pas nommable! Il ne me paraît pas possible d'en douter, puisque x est en tout cas limite de nombres nommables.

Soit, a fait observer M. Borel, mais on n'appliquera jamais cette formule qu'à des nombres nommables. Je réponds d'abord que cela n'est pas à mon sens ce qui importe ; il s'agit de savoir s'il y a risque d'erreur à l'appliquer, et je prétends qu'il n'y en a pas. En outre la remarque de M. Borel, incontestable s'il s'agit d'une application individuelle de la formule écrite, n'empêche pas que, si je peux égaler les intégrales des deux membres de cette formule, c'est parce qu'elle est vraie même pour les nombres innommables. Si aucun de ces nombres ne peut intervenir individuellement, leur existence collective intervient, et joue même, comme nous venons de le voir, un rôle prépondérant dans l'intégration (2).

J'ai choisi un exemple simple, où il s'agit de fonctions continues. Si l'on introduit des fonctions discontinues, on peut concevoir une formule vraie pour les nombres rationnels et fausse pour les nombres irrationnels. Mais si je l'ai démontrée, je sais pour quels nombres je l'ai démontrée. Si je démontre une formule, quel que soit le mode de démonstration employé, je me refuse à croire que, si aucune restriction n'est imposée à x au cours de la démonstration, il y ait cependant un risque d'erreur mystérieux si l'on oublie de préciser dans les applications que x est déterminé par une loi (alors que cette loi n'est pas intervenue dans le raisonnement, et qu'on ne dit pas de quelle sorte de loi il s'agit).

Mais en fait, si l'on cherche dans les applications les plus importantes de l'axiome de Zermelo à quel moment s'appliquent les critiques de ceux qui

---

(1) Observons qu'il faudrait même renoncer à la Géométrie analytique. Pour définir l'abscisse d'un point sur une droite, il faut en effet avoir d'abord fixé les points d'abscisses zéro et un, ce qui n'est possible qu'avec une précision limitée. Mais cette objection porte sur l'application pratique des mathématiques, et non sur la théorie.

(2) J'hésite à relever une autre observation de M. Borel : « Comment saura-t-on que x est le même dans les deux membres de la formule, si l'on ne sait pas le nommer ? ». Mais n'est-ce pas une convention qui est la base même de tous les calculs algébriques, que chaque variable y ait une signification déterminée? S'il y a une difficulté dans les applications, ce n'est pas une raison pour douter de la formule elle-même. Si d'ailleurs il s'agit de fonctions continues, la vérification peut être faite avec une précision aussi grande qu'on veut.

rejettent cet axiome, il ne s'agit pas de l'application d'une formule plus ou moins difficile à démontrer. C'est l'existence même du nombre x qui est mise en doute. Pourtant, je l'ai montré, l'existence collective de ces x est bien établie. Faut-il donc conclure que les savants dont je parle ont vraiment la notion « d'un ensemble qui existe mais dont les éléments n'existent pas ? » Et si *ces éléments existent*, ne peut-on pas conclure que *chacun existe*, et qu'il ne peut pas y avoir de cause d'erreur dans le fait de passer du pluriel au singulier et de raisonner sur un élément (nommé ou non) au lieu de raisonner sur l'ensemble ?

S'il ne s'agissait pas de quelques-uns des plus éminents mathématiciens de notre temps, je n'hésiterais pas à conclure que ceux qui voient un risque d'erreur dans le fait de choisir un élément d'un ensemble pour raisonner sur lui ne pensent pas vraiment ce qu'ils disent. Je conçois à la rigueur une certaine inquiétude en présence d'un raisonnement de type nouveau ; mais je ne peux pas concevoir que l'idée d'une collection qui ne soit pas composée d'individus, soit une idée claire pour qui que ce soit. Pour la science classique, le fait qu'un choix soit arbitraire le rend plus facile ; si on lui imposait trop de conditions, il serait peut-être impossible. Pour les savants dont je parle, c'est parce que le choix est arbitraire qu'il devient inconcevable ! « Ils trouvent la mariée trop belle », a dit M. Hadamard.

Je pense qu'il y a une explication psychologique. L'axiome de Zermelo conduit à certaines conséquences paradoxales, et c'est dans l'espoir de les éviter qu'ils ont accepté ce qui leur paraissait le moindre mal. Mais, comme nous le verrons, ces conséquences, peut-être paradoxales, sont logiquement admissibles, et leur attitude ne l'est pas.

3. *L'axiome de Zermelo.* — 1° Le mot axiome est souvent employé avec deux significations bien différentes. Dans le premier cas, il s'agit de conventions, ou de définitions, que l'on pourrait ne pas faire ; tel est le cas du fameux postulatum d'Euclide. Dans le second cas, il s'agit de règles du raisonnement, qui s'imposent à notre esprit de telle manière que, si elles conduisaient à une contradiction, il faudrait presque renoncer à penser ; tel est le cas de la règle : si A est une partie de B et que B soit une partie de C, alors A est une partie de C.

Dans le premier cas, pour chaque théorie, l'axiomatique, qui étudie la compatibilité et la dépendance ou l'indépendance des axiomes, en constitue un préliminaire essentiel ; c'est le cas pour la Géométrie non euclidienne. Dans le second cas, elle constitue un luxe, puisque l'on est assuré *a priori* de la compatibilité des axiomes, qui ne sont que des principes de la logique. Je ne voudrais pas avoir l'air de sous-estimer les travaux relatifs à ces axiomes, et en partie culier le théorème de Gœdel et les travaux de Frænkel sur l'axiome de Zermelo. Mais je ne les utiliserai pas, car ils ne peuvent ni augmenter notre sentiment de l'évidence des axiomes, ni nous conduire à en douter, et mon but est de

persuader le lecteur du fait que l'axiome de Zermelo s'impose à nous, et que, s'il conduisait à une contradiction, il faudrait désespérer de la raison humaine.

2° J'ai déjà insisté sur le fait qu'il en est ainsi de l'axiome : si un ensemble existe, et n'est pas vide, ses éléments existent; èt cela signifie en particulier que nous pouvons (sans que cela entraîne un risque d'erreur) prendre l'un d'eux, même si l'on ne sait en nommer aucun, comme objet de notre raisonnement.

On énonce souvent l'axiome de Zermelo sous une forme plus compliquée, mais qui résulte de la précédente.

Ainsi, considérons le plus simple des raisonnements reposant sur l'axiome de Zermelo, celui par lequel on démontre l'existence d'ensembles non mesurables. On considère à cet effet l'ensemble E_0 des nombres rationnels (1). Désignons par E n'importe lequel des ensembles déduits de E_0 par une translation (y compris l'ensemble E_0 lui-même). Tous ces ensembles sont disjoints et leur réunion constitue l'axe réel.

Supposons l'abscisse x définie mod 1. On peut alors supposer chaque E réduit à sa partie intérieure à l'intervalle semi-ouvert (0,1), sans que cela empêche de considérer les différents E comme déduits les uns des autres par des translations.

Supposons alors les points de cet intervalle rangés en un tableau à double entrée, comprenant une infinité dénombrable de colonnes, et une infinité non dénombrable de lignes, comprenant chacune les points d'un ensemble E. Si F est l'ensemble des points d'une même colonne, l'intervalle (0,1) est la réunion d'une infinité non dénombrable d'intervalles disjoints déduits de F par une translation. Cet ensemble F n'est pas mesurable (puisqu'il y a contradiction évidente à lui supposer une mesure, soit nulle, soit positive).

Que reproche-t-on à ce raisonnement? Pour nommer F, il faut évidemment supposer nommée une loi indiquant l'élément de chaque ligne qu'on choisit pour le mettre dans la colonne considérée. Or on ne sait pas (et on ne saura sans doute jamais, puisque tout porte à croire que tous les ensembles nommables sont mesurables) nommer une telle loi.

C'est ici qu'intervient l'axiome du choix. Choisissons d'abord un E, et dans cet E choisissons un élément ξ: nous avons dit que, même si nous ne savions en nommer aucun, nous avions le droit de prendre un de ces éléments comme objet de notre raisonnement. Si l'on nous a accordé ce droit, on nous accordera sans doute aussi celui de nous en servir (la subtilité de mes contradicteurs est si inconcevable que je prends mes précautions), et même de nous en servir une infinité de fois. Je suppose donc ce choix fait pour tous les E. Ils constituent

(1) On peut aussi prendre pour E_0 n'importe quel ensemble dénombrable, partout dense sur une droite, et tel que, s'il contient x et y, il contienne aussi $px + qy$ (p, q, entiers réels quelconques). S'il ne contient pas 1, au lieu de l'intervalle (0,1), on considérera l'intervalle $(0, a)$ ($a \in E_0$).

une infinité dénombrable, et je ne peux pas les nommer tous. Mais qu'importe? Le droit de supposer ξ choisi est admis, sans restriction, sans supposer E nommé. Je peux donc considérer l'ensemble F des ξ; peu importe qu'il ne soit pas nommé. Il existe, et l'impossibilité de le nommer provient de l'impossibilité de le distinguer d'une infinité d'ensembles analogues, qui existent aussi, et qui forment même un ensemble ayant une puissance supérieure à celle du continu. Il y en a trop. Je me refuse à en conclure qu'il n'y en a aucun.

Le résultat voulu est bien démontré; il y a des ensembles non mesurables, et l'impossibilité d'en nommer un est étroitement liée au fait qu'il y en a trop (elle ne *provient* pas de ce fait; elle provient du fait qu'on ne peut nommer que des ensembles susceptibles d'être obtenus par une infinité dénombrable d'opérations simples en partant de points, d'intervalles, d'aires, de volumes, etc.). Ce qui nous importe ici, c'est que, dans cette démonstration, l'axiome du choix n'est intervenu que sous la forme que nous avons discutée au n° 2.

4. *Les paradoxes liés à l'axiome de Zermelo.* — 1° Le plus étonnant de ces paradoxes est sans doute le résultat obtenu par Zermelo lui-même : le continu peut être bien ordonné.

Mais analysons la raison de notre étonnement : après avoir passé un temps plus ou moins long à définir des nombres transfinis de plus en plus grands, nous constatons qu'il faut bien nous arrêter, et que ce que nous avons fait semble inutile, tant est grande la distance qui reste à parcourir pour épuiser la seconde classe des nombres transfinis. Nous devons renoncer à nous représenter le dénombrement transfini d'un ensemble non dénombrable. Notre intuition échoue; mais il nous reste la ressource de raisonner.

Je crois que le mathématicien doit être à la fois fier et modeste. Fier, parce qu'il a foi dans sa raison; s'il aboutit à une contradiction, ce ne peut être que par l'effet d'une distraction; *il faut* arriver à découvrir sa faute, à sauver sa foi. Mais modeste parce qu'il doit se résigner à l'idée que la raison, même dans son domaine propre, celui de la science abstraite, a des bornes, et ne sait pas résoudre toutes les difficultés. *A fortiori* doit-il se résigner à constater dans certains cas l'échec de son intuition.

Dans le cas qui nous occupe, notre impuissance à compter assez loin n'est pas une raison de nier la possibilité logique de le faire. Par définition même, la formation des nombres transfinis est une construction qui ne peut pas être achevée. Il y a contradiction à supposer cette construction achevée, de sorte qu'on ne peut jamais la considérer dans son ensemble. Cela explique un paradoxe connu, dont je peux dire qu'il est le seul qui m'ait longtemps troublé.

Mais, si j'arrête la construction au moment où un ensemble donné, même non dénombrable, sera épuisé, il n'y a pas de contradiction, et, si je conviens de continuer tant que ce résultat ne sera pas atteint, il n'y a pas de contradiction.

Ce prolongement, réellement impensable, est logiquement possible, et la science abstraite doit le considérer comme possible.

J'ai longtemps hésité à considérer ce raisonnement direct comme devant entraîner la conviction. C'est dire que je ne serais pas, dans ce cas, surpris de ne pas convaincre tout le monde. Et pourtant, comment douter que je puisse (théoriquement) aller jusqu'au bout, puisque rien ne peut m'arrêter avant. C'est au fond une variante (évidemment beaucoup plus hardie, puisque l'ordination préalable n'existe pas) du raisonnement connu par lequel on démontre le théorème de Borel-Lebesgue, dans le cas linéaire.

Certains peuvent éprouver un malaise en se disant que le résultat dépend du choix des points successifs. Cela n'est pas sans raison. Si l'on nous donne un ensemble dénombrable, et que nous cherchions à en faire un dénombrement transfini, il est concevable que nous nous y prenions si maladroitement que nous aurons dépassé sans l'avoir épuisé les plus grands nombres transfinis pensables. Mais il faut bien que l'ensemble donné finisse par s'épuiser, puisqu'il est certain que rien ne peut nous arrêter avant. De même pour le continu.

M. Zermelo a fait disparaître ce malaise en supposant donnée une règle qui le dispense de choisir chaque fois. La contradiction qu'il y a à supposer qu'il faille s'arrêter avant la fin est alors certaine, puisqu'il y aurait un ensemble bien défini d'éléments que le dénombrement transfini n'atteindrait pas. Autrement, à chaque instant, l'observateur sceptique pourrait dire : vous repartez encore, mais il faudra bien vous arrêter. Je crois qu'il aurait fort, puisque rien ne nous obligera jamais à nous arrêter. Mais puisque quelqu'un peut exprimer un doute, le raisonnement indirect de Zermelo n'est pas inutile. Le doute disparaît parce que les choix sont faits d'avance, et, comme on ne sait pas à l'avance dans quels sous-ensembles de l'ensemble initial il faudra choisir, il faut bien considérer tous les sous-ensembles de cet ensemble (1).

2° J'insisterai moins longuement sur les autres paradoxes. L'existence d'ensembles non mesurables ne m'a jamais étonné. Les ensembles mesurables ne sont-ils pas toujours, à un ensemble près dont la mesure est arbitrairement petite, des réunions d'intervalles, et ne doit-on pas s'attendre à ce qu'il existe des ensembles dont des réunions d'intervalles ne permettent pas d'approcher autant que l'on veut ?

J'avoue que d'autres conséquences de l'axiome de Zermelo m'ont surpris. Je pourrais au moins en indiquer trois, découvertes par Banach et Kuratovski, par Hausdorff, par Sierpinski. M. Borel cite le résultat de Hausdorff : il existe, sur la surface de la sphère, un ensemble A, décomposable en deux sous-

(1) Du moins il le faut, si l'on veut tout tenter pour convaincre les sceptiques. Mais au fond je ne suis pas convaincu que la puissance des moyens ainsi employés soit nécessaire.

ensembles disjoints A_1 et B_1, égaux (c'est-à-dire superposables) entre eux, et égaux à A. Le même résultat pouvant s'appliquer à B_1, décomposable en A_2 et B_2, puis à B_2, et ainsi de suite, on voit que A contient une infinité d'ensembles disjoints $A_1, A_2, \ldots$, tous égaux à A. Cela est évidemment surprenant.

Mais si nous analysons la cause de notre étonnement, ne vient-elle pas simplement de ce que nous avons l'habitude de ne considérer que des ensembles simples, mesurables, et même faciles à mesurer, et qu'une induction sommaire nous avait conduits à juger des autres d'après ce que nous savions de ceux-là (1).

De même qu'un bloc de marbre de Carrare contient en lui des formes insoupçonnées par l'ouvrier qui l'extrait du sol, le continu à deux ou plus de deux dimensions contient des ensembles dont nos sens grossiers ne nous permettent pas de soupçonner l'existence, et qui nous étonnent, parce que nos habitudes résultent de l'usage de ces sens imparfaits et que nous imaginons mal ce qui leur échappe. J'ai eu souvent l'occasion de m'étonner de tout ce qu'on peut découvrir dans une courbe sans tangentes. Les ensembles de Hausdorff et de Sierpinski sont plus étonnants encore. Mais on s'étonne un peu moins quand on réfléchit à la complexité de leur structure. En tout cas, il ne faut pas trop nous étonner d'être étonnés. Il ne faut surtout pas oublier que le raisonnement est là pour nous guider quand notre intuition est en défaut, ni douter du résultat d'un raisonnement revu avec soin (et d'autant plus sûrement revu avec soin par de nombreux savants que le résultat est plus paradoxal), quand ce résultat n'est contredit que par notre intuition.

5. *Autres paradoxes.* — Les paradoxes dont nous allons parler ici, ou bien sont indépendants de l'axiome de Zermelo, ou bien résultent du rejet de cet axiome.

1° Commençons par une remarque très simple, mais susceptible d'intéresser ceux qui ont des illusions sur la possibilité de prolonger la mesure de Lebesgue. Sans le raisonnement rappelé au n° 3, 2°, on pourrait penser qu'il existe une mesure, bien définie pour n'importe quel ensemble linéaire, invariante par un déplacement quelonque, et complètement additive (2). On pourrait peut-être aussi penser que, si deux ensembles sont semblables, le rapport de leurs mesures est égal au rapport de similitude, et que tout cela reste vrai pour les

(1) Au fond, ce qu'on est tenté d'opposer au résultat de Hausdorff, c'est l'idée que le tout est plus grand que la partie et ne peut se réduire à elle par un déplacement. Or cette idée est fausse, même dans le cas d'ensembles dénombrables. L'ensemble des points d'une droite d'abscisses n ($n = 1, 2, \ldots$), et celui des points d'abscisses $n + 1$, sont égaux, et pourtant l'un est une partie de l'autre.

(2) M. Borel, qui croyait à l'existence de cette mesure, est devenu moins affirmatif dans ses derniers Ouvrages. Mais il ne semble pas avoir au fond changé d'idée, puisqu'il voit toujours dans une conclusion qu'il juge paradoxale une raison de rejeter l'axiome de Zermelo.

courbes sur lesquelles on peut trouver des arcs deux à deux égaux ou semblables.

Or il n'y a pas besoin de l'axiome de Zermelo pour montrer qu'il ne peut en être ainsi. Il n'y a qu'à considérer la courbe de von Koch, composée de deux parties égales, et semblable à la courbe entière, le rapport de similitude k étant compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Le rapport des mesures de chacune des deux parties et de la courbe entière devrait donc être égal à la fois à $\frac{1}{2}$ et à $k > \frac{1}{2}$.

Dans le cas limite $k = \frac{1}{2}$, la courbe se réduit à un segment rectiligne, et le paradoxe disparaît. Pour $k = 1$, la courbe remplit une aire et la mesure que l'on pourrait définir devient une mesure superficielle. Le paradoxe disparaît aussi, ou plutôt il n'y a de paradoxe que pour ceux qui ne sont pas encore habitués à l'idée qu'une courbe puisse remplir une aire.

Pour les valeurs intermédiaires, la mesure que l'on est naturellement conduit à définir en donnant à des arcs égaux des mesures égales vérifie un principe de similitude avec un exposant compris entre 1 et 2; c'est quelque chose d'intermédiaire entre la mesure linéaire et la mesure superficielle.

On peut rattacher ces remarques aux idées de M. Appert, qui, le premier (je crois), a défini une infinité de mesures, non additives, qui sont des généralisations de la mesure extérieure de Lebesgue pour les ensembles linéaires. La courbe de von Koch constitue peut-être le meilleur champ d'application pour ces idées. Pour chaque valeur de k, la mesure que nous venons de définir est une des mesures de M. Appert.

2° Désignons par E_0, soit l'ensemble des nombres $x = h + k\alpha$ (α irrationnel donné; h, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), soit, comme au n° 3, 2°, l'ensemble des nombres rationnels, et par E n'importe quel ensemble déduit de E_0 par une translation. Trois cas sont possibles. Si E contient un nombre a donné, il peut être dénombré sans difficulté. Si E ne peut pas être nommé, le mathématicien qui nie l'existence des éléments innommables écartera toute difficulté, puisque, pour lui, cet ensemble n'existe pas. Mais que dira-t-il dans le troisième cas, celui où E peut être nommé sans qu'on sache en nommer un élément ? Si l'on ne sait pas nommer un premier élément de E, on ne sait *a fortiori* pas le dénombrer, et notre contradicteur qui ne croit à l'existence que de ce qui est nommable, dira qu'il n'est pas dénombrable, à moins qu'il ne préfère dire qu'il est vide. Un ensemble obtenu par translation d'un ensemble dénombrable pourrait donc être, ou bien vide, ou bien non dénombrable.

Il est vrai que ce troisième cas n'existe sans doute pas. Mais peut-on considérer comme une démonstration de sa non-existence le fait que son existence embarrasserait notre contradicteur ?

Que de difficultés s'ajoutent ainsi à celle qui consiste à dire que l'ensemble

des éléments nommables ne doit pas être considéré comme dénombrable puisqu'il y a contradiction à le supposer dénombré. N'est-il pas plus simple de parler comme tout le monde, et de distinguer ce qui existe de ce qui peut être nommé ?

Je pense que mes contradicteurs seront plus embarrassés encore par l'exemple suivant, qui m'a été indiqué par M. L. Schwartz.

3° Les ensembles E_0 et E restant définis comme ci-dessus, que peut-on dire de la puissance de l'ensemble dont chaque E est un élément ? Pour nous il n'y a pas de difficulté; il a la puissance du continu. Plus généralement, si nous avons un ensemble d'ensembles E disjoints et non vides, on ne peut qu'augmenter sa puissance, si on la change, en remplaçant chaque E par ses éléments, c'est-à-dire en remplaçant un élément par plusieurs ou même une infinité. C'est presque un axiome. Pourtant, si l'on rejette l'axiome de Zermelo, on va se trouver en présence d'un dilemme embarrassant.

Supposons que E_0 soit l'ensemble des nombres rationnels. Désignant par $[u]$ la partie entière de u, posons

$$f(\alpha)=\sum_{1}^{\infty}\frac{[n^{\alpha}]}{n!}.$$

Si $0<\alpha<\beta<1$, $f(\beta)-f(\alpha)$ est un nombre positif irrationnel, puisqu'il est de la forme $\sum\frac{c_n}{n!}$, avec $0\leq c_n<n-1$, et $c_n>0$ pour n assez grand. Donc $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ne peuvent pas appartenir à un même ensemble E, et à chaque α correspond un ensemble E, celui qui contient $f(\alpha)$, qui est différent de tous les autres. On a ainsi établi une correspondance entre α et certains des E. L'ensemble des E a donc *au moins* la puissance du continu.

Alors deux éventualités sont possibles. On peut, ou on ne peut pas, établir une correspondance entre l'ensemble de tous les E et tout ou partie du continu.

Dans le premier cas, il faut conclure que la puissance de l'ensemble des E est supérieure à celle du continu. Et pourtant, en remplaçant chaque E, non par un élément, mais par une infinité, on obtient le continu.

Dans le second cas, je n'ai pour ma part aucune difficulté à dire que : l'ensemble des E a la puissance du continu, bien que je ne sache pas nommer une correspondance entre les E et les points d'un segment. Mais celui qui rejette l'axiome de Zermelo n'a pas le droit de raisonner ainsi. S'il existe une correspondance biunivoque entre les E et les points d'un certain sous-ensemble d'un segment, cela veut dire pour lui qu'il peut en nommer une (et pourtant je crois bien qu'il serait incapable de le faire). D'après le théorème de Cantor il peut alors nommer une correspondance biunivoque entre un E quelconque et un x quelconque du segment $(0, 1)$.

Soit alors $U_x E$ la réunion des E qui correspondent à des x du segment $(0, \alpha)$.

Comme cet ensemble est invariant par une translation de longueur rationnelle, il faut, s'il est mesurable, que lui-même, ou son complément, soit de mesure nulle. Si l'on ne considère que la partie de $U_x E$ intérieure au segment $(0, 1)$, sa mesure, qui est égale à 0 pour $x = 0$ et à 1 pour $x = 1$, ne peut qu'augmenter. Elle varie donc brusquement de 0 à 1, pour une valeur β de x, et à ce moment on a un ensemble E à la fois dénombrable et de mesure positive.

On ne peut échapper à cette contradiction qu'en supposant $U_x E$ non mesurable, au moins dans un certain intervalle ouvert (x', x''); en choisissant un x dans cet intervalle, par exemple son milieu, on aurait ainsi nommé un ensemble non mesurable.

Pourtant je ne pense pas que personne arrive à le faire. Mais on ne peut rejeter l'axiome de Zermelo qu'en affirmant qu'on peut le faire, ou bien en se rejetant sur l'autre alternative du dilemme, qui aboutit à un résultat plus paradoxal encore.

6. *Remarque finale.* — Je terminerai ce Chapitre par une remarque destinée à ceux qui hésiteraient à avoir une opinion par eux-mêmes, ou qui n'oseraient pas discuter une idée soutenue par des savants tels que Lebesgue, Émile Borel, Brouwer, Lusin. C'est que les partisans de l'axiome de Zermelo sont tous absolument d'accord, prouvent le mouvement en marchant, appliquent cet axiome, et n'ont encore jamais rencontré de contradiction. Il n'en est pas de même de leurs contradicteurs. Et cela ne me surprend pas, car, à partir du moment où l'on doute de la raison humaine, on ne sait pas où l'on peut trouver un point fixe. S'il n'y a qu'une logique, le scepticisme a beaucoup de formes différentes.

Nul n'a, je crois, poussé le scepticisme plus loin que N. Lusin, que j'ai entendu (vers 1930) soutenir qu'on ne devait pas parler de la trois millième décimale du nombre π; c'était pour lui « des mots dépourvus de sens ». Sauf dans ce cas, il s'agit sans doute d'une nouvelle manifestation de la peur de l'infini, qui s'est manifestée d'abord avec Zénon d'Elée, dont les objections nous font sourire aujourd'hui, puis de nouveau à l'époque de Leibniz, dont certains contemporains n'admettaient pas les principes du calcul différentiel et intégral. Les nouvelles formes de l'infini devaient sans doute fatalement ressusciter la peur de l'infini sous de nouvelles formes; mais je pense que, sans les paradoxes qu'elles entraînaient, cette peur n'aurait pas atteint les hommes que je viens de nommer.

Ce qui caractérisait Lebesgue était, comme pour Lusin, un extrême scepticisme. Il était sceptique quand on lui parlait d'ensembles non mesurables. Il l'eût été bien plus si on lui avait affirmé que tous les ensembles étaient mesurables, au moins grâce à une extension convenable de la mesure. M. Borel, qui semble avoir au début partagé le scepticisme de Lebesgue, a depuis affirmé la possibilité de cette extension. J'imagine d'autre part qu'il hésiterait à écrire,

comme l'a fait Lebesgue en 1905, que le raisonnement à l'aide duquel on prouve que tout ensemble infini est au moins dénombrable ne lui paraît pas satisfaisant.

Cette phrase ne pouvait sans doute être écrite que par Lebesgue. Il faut évidemment y voir un peu d'humour, mais elle contient sûrement une idée cachée, et cette idée ne peut être que la suivante : il n'est pas certain que dans tout ensemble infini nommé je sache nommer une suite infinie. Mais pourquoi ne pas le dire explicitement? Pourquoi ne pas parler comme tout le monde? Je m'arrêterai sur cette remarque, sans insister davantage sur les autres différences qu'on peut relever entre les conceptions des savants que j'ai déjà nommés, ou encore de M. de la Vallée Poussin, qui, dans son livre sur l'intégrale de Lebesgue, évite d'employer l'axiome de Zermelo, sans dire explicitement qu'il ne le tient pas pour exact.

CHAPITRE II.

L'Antinomie Richard.

7. *Énoncé de l'antinomie.* — Il y a plusieurs manières différentes, non exactement équivalentes, d'énoncer cette antinomie. Poincaré a attiré l'attention sur l'une d'elles, relative *au plus petit nombre entier qui ne puisse être défini par une phrase de moins de mille mots;* or il vient d'être défini par une phrase de dix-huit mots. Poincaré a fait remarquer que le paradoxe apparaît ainsi sans intervention de l'infini. Mais cette manière de l'énoncer introduit une difficulté parasite : qui nous dira si une phrase rédigée en style télégraphique doit être considérée comme claire, ou s'il faut une phrase plus longue pour définir correctement le nombre auquel on a pensé? Ainsi on ne peut pas considérer que le nombre minimum de mots avec lesquels on puisse définir un nombre donné soit quelque chose de bien défini.

La même difficulté parasite se présente lorsque, avec M. Émile Borel, on parle de *définir un nombre n'appartenant pas à l'ensemble dénombrable des nombres définissables.* Il faut pour cela supposer cet ensemble effectivement dénombré. Il est facile de classer toutes les phrases concevables dans un ordre déterminé. Mais qui nous dira, pour chaque nombre, quelle est la première des phrases que l'on puisse considérer comme une définition claire et correcte de ce nombre ?

Pour cette raison, il nous semble qu'il convient de discuter l'antinomie Richard sous la forme relative *au plus petit nombre transfini qui ne puisse pas être défini par une phrase d'un nombre fini de mots français.* La difficulté parasite n'existe pas, car il est bien certain que, si quelqu'un nous objecte qu'une phrase de cent mots à l'aide de laquelle nous avons cru définir un nombre

transfini n'est pas correcte au point de vue grammatical, nous pourrons, à l'aide d'une phrase plus longue, lui expliquer clairement de quel nombre nous avons voulu parler, et ce nombre sera réellement défini par une phrase d'un nombre fini de mots. Il ne reste donc que la difficulté essentielle : quelle signification peut-on attribuer à la phrase écrite ci-dessus en italiques, qui semble définir un nombre en quelques mots tout en affirmant qu'il ne peut pas être défini par une phrase d'un nombre fini de mots? L'objet de ce Chapitre est de répondre à cette question.

8. *Les nombres transfinis bien définis.* — Il est souvent important de distinguer entre un nombre *défini* et ce que nous appellerons un nombre *bien défini*. Ainsi le nombre des nombres algébriques figurant dans la suite de quatre nombres e, π, $\sqrt{2}$, C (C étant la constante d'Euler) est évidemment défini sans ambiguïté; mais dans l'état actuel de la science nous ne savons pas si c'est 1 ou 2; nous dirons qu'il n'est pas bien défini.

Dans le cas des nombres transfinis, il peut arriver aussi qu'une définition indirecte permette de définir (ou, si l'on préfère, nommer) des nombres transfinis dont il nous sera impossible d'avoir une idée précise. Mais nous ne les considérerons comme *bien définis* que s'ils ont été *obtenus directement* par des combinaisons *définies en un nombre fini de mots* des opérations qui servent de base à la définition des nombres transfinis : addition d'une unité, et passage à la limite (nous appelons *limite* d'une suite de nombres transfinis croissants a_n le plus petit nombre transfini supérieur à tous les a_n; ce langage peut soulever quelques objections, mais nous semble commode) (1).

Naturellement, pour gagner du temps, nous pouvons utiliser des opérations dont il est facile de vérifier qu'elles se ramènent aux précédentes. Ainsi nous pouvons employer les symboles $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ et α^β; si α et β sont bien définis, ils conduisent à des nombres bien définis.

Nous nous proposons de montrer qu'on peut parler sans ambiguïté de *l'ensemble* E *des nombres transfinis susceptibles d'être bien définis*. Nous désignerons par λ le plus petit nombre transfini supérieur à tous ceux de E: *il sera défini, mais non bien défini.*

Pour ne pas être arrêté bien avant λ dans la formation d'une suite de nombres transfinis croissants, il faut bien entendu ne pas s'attarder en chemin: ainsi, si l'on voulait énumérer tous les nombres ω^n ($n = 1, 2, \ldots$), on n'atteindrait jamais ω^ω. Personne ne sera sans doute assez maladroit pour ne pas réussir à

(1) Observons aussi que, les nombres transfinis indiquant dans toutes les applications une relation d'ordre qui n'est pas nécessairement une relation de grandeur, on comprend que M. Denjoy évite de dire que α est *plus petit* que β (ou $\beta > \alpha$), mais dise que α *précède* β. Nous utiliserons tout de même des inégalités ordinaires pour définir les relations d'ordre entre des nombres transfinis. Cela facilite le langage, et cela sans créer aucune ambiguïté.

atteindre et dépasser ω^ω. Mais il faut beaucoup d'attention pour ne pas commettre dans la suite des maladresses analogues.

Ainsi, en partant d'un nombre $\alpha \geq \omega$, considérons l'opération $F\alpha = \alpha^\alpha$. Il est tout naturel, pour obtenir des nombres transfinis de plus en plus grands, de considérer ses itérés successifs $F^n\alpha$ ($n = 1, 2, \ldots$), puis leur limite $F^\omega\alpha$, et même, si $\alpha > \omega$, de continuer transfiniment jusqu'à $F^\alpha\alpha$ que nous désignerons maintenant par $\alpha_2 = F_2\alpha$. En partant de α_2 et de l'opération F_2, et procédant comme nous venons de le faire en partant de α et de l'opération F, nous arriverons à $\alpha_3 = F_3\alpha$, puis, en partant de α_3 et de l'opération F_3 à $\alpha_4 = F_4\alpha$, et ainsi de suite. Naturellement nous ne continuerons pas indéfiniment, mais nous considérerons le passage à la limite qui donne $F_\omega\alpha$, et irons même jusqu'à $F_\alpha\alpha$ ou même jusqu'à $F_\beta\alpha$ avec $\beta = F_\alpha\alpha$.

Il ne paraît pas nécessaire de continuer cette construction. Ce qui précède suffit pour mettre en évidence le fait suivant : ayant défini une opération, qui, appliquée à α, donne un nombre $F\alpha > \alpha$, nous ne nous contenterons pas de la répéter, mais nous en déduirons, en principe par itération, la définition de nouvelles fonctions plus rapidement croissantes, puis par des passages à la limite, des fonctions plus rapidement croissantes encore, et ainsi de suite indéfiniment, sans jamais nous attarder à répéter un procédé déjà employé, ou du moins en ne le répétant qu'un nombre fini de fois, si cela paraît utile pour mieux le définir.

Insistons bien sur la différence entre les passages à la limite utilisés dans cette construction et celui qui permettrait d'atteindre λ. Nous considérons ici, pour définir un nombre β comme limite d'une suite de nombres transfinis croissants α_n ($n = 1, 2, \ldots$), des suites définies par des formules de l'une des formes $\alpha_{n+1} = F\alpha_n$ ou $\alpha_{n+1} = F_n\alpha_n$, et, dans ce second cas, la suite infinie des opérations F_n est supposée, grâce à l'emploi d'une récurrence, définie elle-même en un nombre fini de mots. Ainsi, même si les opérations F_n sont de plus en plus compliquées, la suite des α_n, et par suite β, sont bien définies par un nombre fini de mots. Au contraire, en vertu de la définition même de λ, on ne peut obtenir ce nombre que comme limite de nombres α_n définis successivement par des phrases de plus en plus longues.

Faisons encore quelques remarques.

1° Nous avons parlé de la nécessité d'éviter des erreurs qui auraient pour résultat de nous arrêter bien avant λ, et nous n'avons donné aucune règle pour éviter effectivement ces erreurs. Nous ne pouvions pas en donner, car si nous le faisions en un nombre fini de mots, nous aurions bien défini λ en un nombre fini de mots, ce qui n'est pas possible. Cela n'empêche pas que l'ensemble E, et par suite le nombre transfini λ, soient définis sans ambiguïté. Dire en effet qu'un nombre α appartient à E, ce n'est pas dire que Jean, Pierre ou Paul arriveront à ce nombre ou le dépasseront dans des tentatives plus ou moins adroites

pour construire E; c'est dire qu'il existe une construction susceptible d'être définie par une phrase d'un nombre fini de mots et qui permette d'atteindre et dépasser α; et si elle existe, on a un moyen sûr d'y arriver, fût-ce par une construction méthodique de toutes les phrases possibles.

Rappelons ce qu'est cette construction méthodique, souvent considérée par M. Émile Borel. On appelle phrase toute suite d'un nombre fini n de mots. Si N est le nombre des mots de la langue française (en éliminant si l'on veut les mots sans intérêt au point de vue mathématique et en ajoutant tous les signes de ponctuation ou symboles mathématiques qui peuvent être utiles), on écrit successivement, par ordre alphabétique dans chaque catégorie, les N phrases d'un mot, puis les N^2 phrases de deux mots, et ainsi de suite. On ne garde ensuite que celles qui *définissent bien* des nombres transfinis, et il importe peu ici qu'une phrase paraisse incorrecte ou peu claire, puisqu'elle peut être remplacée par une phrase correcte et claire que l'on trouvera à sa place dans la liste des phrases possibles.

2° Pour *bien définir* un nombre α de E, on ne peut pas faire l'économie du travail qui consiste à écrire effectivement la phrase dont nous venons de parler. Si nous parlons par exemple du plus petit nombre qui ne puisse pas être défini par une phrase de mille mots au plus, c'est un nombre peut-être *défini*, mais pas *bien défini*. Pour le considérer comme défini, il faut d'ailleurs, d'une part supposer résolues les difficultés du langage que nous avions voulu écarter, d'autre part anticiper sur l'explication de l'antinomie Richard (prise sous une forme un peu différente de celle que nous étudions).

3° Dans ce qui précède, nous nous sommes efforcés de considérer des suites très rapidement croissantes de nombres transfinis bien définis. Il reste à se demander si tous les nombres transfinis α compris entre deux termes consécutifs α_{n-1} et α_n d'une telle suite peuvent être bien définis. La réponse est affirmative, de sorte que : *tous les nombres transfinis inférieurs à* λ *peuvent être bien définis*.

Si en effet $\alpha < \alpha_n$, ou bien $\alpha_n = \alpha' + 1$, et $\alpha \leq \alpha'$ ou bien α_n a été défini comme suite de nombres transfinis croissants, tous bien définis, parmi lesquels nous pouvons en trouver qui soient égaux ou supérieurs à α: soit alors α' le premier de ces nombres. De toute façon, $\alpha \leq \alpha' < \alpha_n$, α' étant bien défini. Si $\alpha = \alpha'$, le théorème est démontré. Si $\alpha < \alpha'$, nous pouvons recommencer le raisonnement, et trouver un nombre α'', bien défini, $< \alpha'$ et $> \alpha$. En recommençant encore, nous obtiendrons une suite de nombres transfinis décroissants α', α'', ..., qui ne s'arrêtera que quand l'un d'eux sera égal à α.

Or il ne peut pas exister de suite infinie de nombres transfinis décroissants : c'est donc qu'un de ces nombres est égal à α, qui est ainsi bien défini.

C. Q. F. D.

Nous appellerons avec M. Denjoy *section* $(1, \alpha)$ (de l'ensemble des nombres transfinis de la seconde classe) l'ensemble des nombres finis ou transfinis inférieurs à α. On peut alors dire : *l'ensemble* E *des nombres finis ou transfinis qui peuvent être bien définis coïncide avec la section* $(1, \lambda)$; *ou encore : λ est à la fois le plus petit nombre transfini qui ne puisse pas être bien défini, et le plus petit qui soit supérieur à tous ceux qui peuvent être bien définis.*

4° Nous dirons que la section $(1, \gamma)$ est *bien décrite* si nous avons, en un nombre fini de mots, défini le moyen de faire correspondre, à chaque nombre transfini inférieur à γ, une suite finie de nombres entiers ordinaires qui le définisse parfaitement, et cela de manière que l'ordre relatif de deux nombres α et β coïncide avec le classement alphabétique des suites qui leur correspondent.

Si $\gamma < \lambda$, cette description résulte du raisonnement du 3° ci-dessus, puisque chacun des nombres α', α'', ..., dont le dernier n'est autre que α, est bien défini par le rang qu'il occupe dans une certaine suite de nombres transfinis croissants. Mais il faut supposer ces suites préalablement bien définies, ce qui a lieu si $\gamma < \lambda$, mais non si $\gamma = \lambda$.

Il peut être utile de préciser l'aspect de cette description, au moins pour les sections $(1, \omega_2)$ et $(1, \omega_3)$ (en posant $\omega = \omega_1$, $\omega_{n-1} = \omega^{\omega_n}$). La description de la première résulte de ce que tout $\alpha < \omega_2$ est de la forme

$$\alpha = a_1 \omega^{n-1} + a_2 \omega^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \omega + a_n, \tag{1}$$

de sorte qu'on peut représenter α par la suite

$$n(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{2}$$

dont le premier terme indique le nombre de ceux que doit comprendre la parenthèse qui le suit; n est positif; les a_ν sont positifs ou nuls, a_1 seul étant nécessairement positif.

De même, si $\alpha < \omega^{\omega^2} = \omega_2^\omega$, on peut écrire

$$\alpha = \alpha_1 \omega_2^{n-1} + \alpha_2 \omega_2^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} \omega + \alpha_n, \tag{3}$$

chacun des α_ν étant $< \omega_2$, donc la forme

$$\alpha_\nu = a_{\nu,1} \omega^{p_\nu - 1} + \ldots + a_{\nu, p_\nu - 1} \omega + a_{\nu, p_\nu},$$

de sorte que α peut être représenté par la suite

$$n[p_1(a_{1,1}, \ldots, a_{1,p_1}), \ldots, p_n(a_{n,1}, \ldots, a_{n,p_n})]. \tag{4}$$

Pour décrire la section $(1, \omega^{\omega^2})$, il faudra superposer des parenthèses ou crochets de N espèces différentes, chaque crochet étant précédé d'un nombre qui indique combien il doit contenir de crochets de l'espèce suivante (et, pour les parenthèses ou crochets de la dernière espèce, combien il doit finalement

contenir de termes). Enfin, pour décrire la section $(1, \omega_3)$, la convention qui précède suffit, à cela près que N n'est pas connu d'avance et doit être écrit en tête de la formule.

Il n'est pas difficile de dépasser ω_3; on aura alors des structures plus compliquées, dans lesquelles les nombres dont chacun indique combien il y a à sa droite de crochets superposés sont eux-mêmes intérieurs à d'autres crochets.

Le caractère alphabétique de la représentation ainsi obtenue est bien évident sur les formules (1) et (2). Précisons que le classement alphabétique, que nous considérons ici avec M. Denjoy, est différent de celui de M. E. Borel mentionné plus haut, puisque c'est un classement transfini. La liste finie des mots du dictionnaire est ici remplacée par la suite infinie des nombres entiers (>0, ou ≥ 0, suivant les cas). En outre, la longueur des suites considérées n'intervient pas ici *a priori*; c'est du premier nombre écrit que dépend en première approximation le classement de la suite considérée; cette différence disparaît d'ailleurs si l'on convient de faire précéder chaque phrase de M. Borel par un chiffre indiquant le nombre de ses mots.

Remarquons enfin que le caractère alphabétique du classement n'est obtenu que dans une section donnée d'avance. Ainsi, la suite (2), qui représente le nombre $\alpha < \omega_2$ défini par la formule (1), doit être remplacée par

$$1[n(a_1, a_2, \ldots, a_n)],$$

si l'on veut considérer le même nombre α comme appartenant à la section $(1, \omega_2^{\omega})$.

9. *Le prolongement de l'ensemble* E. — Il est bien clair que, λ étant défini, on peut définir de nouveaux nombres transfinis. Pour l'étude de ces nombres, il peut être utile d'employer le même langage que dans la théorie des corps algébriques, quand on étend un corps par l'adjonction de nouveaux éléments. Nous pourrons ainsi définir un nouvel ensemble E_2, défini par l'adjonction de λ; il comprendra tous les nombres qui peuvent être bien définis, non au sens du n° 8, mais grâce à cette adjonction. Ils seront des fonctions bien définies de λ.

Si la structure de l'ensemble E est d'une complication impossible à concevoir, E_2 est d'une structure plus compliquée encore. La seule section $(\lambda, 2\lambda)$ de E_2 est évidemment à elle seule identique à E; les puissances finies de λ, puis celles d'exposant ω limitent des sections de structures plus compliquées encore, et sont encore bien éloignées de $F\lambda = \lambda^{\lambda}$. Pourtant, en parlant de ce nombre, nous n'avons sans doute fait que marquer dans la formation de E_2 une première étape analogue à celle que constitue la définition de $F\omega = \omega^{\omega}$ dans la formation de E, et, si l'on considère la formation de l'itérée $F^{\omega}\omega$ comme la deuxième étape dans la description de E, l'étape correspondante dans la description de E_2 consistera dans la formation, non de $F^{\omega}\lambda$, mais de $F^{\lambda}\lambda$; et ainsi de suite.

Après E_2, on peut continuer encore, définir le plus petit nombre transfini supérieur à tous ceux de E_2, et considérer l'ensemble E_3 des nombres transfinis bien définis en fonction de λ et de ce nouveau nombre λ_2. Et ainsi de suite. On introduira λ_3, λ_4, ..., λ_ω, ..., puis enfin λ_λ. L'opération qui consiste à passer de α à λ_α nous permet de faire des bonds prodigieux dans la définition de nombres transfinis de plus en plus grands; nous considérerons à nouveau ses itérées d'ordre 2, 3, ..., ω, ..., α; et ainsi de suite.

Mais il faut bien nous arrêter. Même en continuant pendant des centaines de pages, nous ne pourrions pas préciser l'idée forcément vague d'un certain ensemble E' qui comprend tous les E_α dont nous venons de parler.

Au sujet de cet ensemble, nous pouvons seulement observer que, comme n'importe lequel des E_α, s'il comprend un nombre transfini, il comprend tous les nombres plus petits. Il constitue une section commençante de l'ensemble des nombres transfinis de la deuxième classe, et le plus petit nombre transfini ne lui appartenant pas, que nous désignerons par μ, est supérieur à tous ceux qui lui appartiennent.

Observons aussi que, comme pour λ, ou n'importe lequel des λ_α, on peut appliquer à μ ce principe : en avançant vers l'infini on ne s'en approche pas.

On sait que ce principe peut être appliqué aux nombres transfinis de plusieurs manières différentes. La plus simple repose sur la notion d'accessibilité par l'addition. Un nombre est *accessible par l'addition* s'il peut être représenté par la somme de deux nombres plus petits. Il existe des nombres non accessibles par addition : ce sont tous ceux qui sont de la forme $\alpha \prec \omega$ ou qui peuvent être définis comme limites de nombres de cette forme (1). Dans le cas de la multiplication, un nombre tel que $2\omega + 5$, qui a le caractère d'un nombre premier, ne peut pas être représenté par le produit de deux nombres plus petits. Il nous paraît préférable d'appeler *nombres non accessibles par multiplication*, en excluant ces nombres premiers, ceux qui ne peuvent pas être *égalés ou dépassés* par le carré d'un nombre plus petit (ni par suite par le produit de deux nombres plus petits que lui, puisque ce produit est égalé ou dépassé par le carré du plus grand des deux). Ce sont alors les nombres de la forme β^ω, et ceux qui peuvent être définis comme limites de nombre de cette forme.

On peut de même considérer les nombres non accessibles par l'opération $F\alpha = \alpha^2$; ils ne peuvent alors pas non plus être atteints ou dépassés par l'opération α^3, s'ils ne sont pas déjà atteints ou dépassés par le plus grand des

---

(1) Précisons bien que, quand nous écrivons $\alpha \prec \beta$, c'est le second facteur qui est le multiplicateur; le contraire a lieu lorsque nous écrivons 2ω ou $n\omega$, sans expliciter le signe de multiplication.

Voir sur cette question : A. Denjoy, *L'énumération transfinie* (Gauthier-Villars, 1946), p. 103. Nous appelons *accessibles par l'addition* les nombres que M. Denjoy appelle *indécomposables*.

nombres α et β. Ce sont les nombres de la forme $F^{\omega}\alpha$, ou les limites de nombres de cette forme.

La même remarque s'applique à n'importe laquelle des opérations considérées au n° 8 pour définir des nombres transfinis de plus en plus grands. Il existe des nombres non accessibles par ces opérations, et il en est de même de λ, qui est limite de tels nombres; il n'est accessible par aucune de ces opérations.

Désignons alors par α n'importe quel nombre transfini $< \lambda$, et par G une quelconque des opérations considérées au n° 2. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les nombres déduits de α par l'opération G itérée $\beta_1, \beta_2, \ldots$ fois. La suite des α_n ne tend vers λ que si la suite des β_n tend vers λ. Les efforts que nous avons pu faire pour nous approcher de λ en définissant des nombres α très grands et des fonctions G rapidement croissantes n'auront servi à rien. Nous avons cru nous rapprocher de λ, et faciliter le reste du parcours en marchant à pas de géant. Pourtant les étapes $G_\beta\alpha$ qui restent à franchir ($\beta = 1, 2, \ldots; \omega, \omega+1, \ldots$) avant d'atteindre λ constitueront encore un ensemble isomorphe de l'ensemble E tout entier.

Les mêmes remarques s'appliquent à n'importe lequel des E_α, et à E'.

10. *Explication de l'antinomie.* — Il nous sera commode de recourir à nouveau à un interlocuteur doué du pouvoir surnaturel d'accélérer sa pensée, et d'achever en un temps fini une suite infinie de raisonnements. Supposons-le aussi doué d'une vue infiniment fine. Il pourra alors imaginer un nombre transfini ξ de la seconde classe supérieure à tous ceux que nous pouvons concevoir, et marquer sur une droite un ensemble de points qui sera l'image de la section $(1, \xi)$.

Supposons qu'à cet interlocuteur nous parlions de l'ensemble E'' de tous les nombres transfinis définissables, du plus petit nombre ν qui ne lui appartienne pas, et du plus petit nombre transfini ν' supérieur à tous ceux de E''.

Précisons d'abord que E'' ne coïncide peut-être pas avec E'. Les nombres transfinis appartenant à E' ont été supposés définis par des constructions directes. Rien ne prouve que par des procédés indirects, dont certains seront mentionnés dans la suite, il ne soit pas possible de nommer des nombres supérieurs à tous ceux de E'. Cela ne semble guère probable; mais dans le doute, nous devons supposer que E'' peut différer de E', et, au sujet des nombres μ, ν, ν', nous ne pouvons pas exclure l'hypothèse $\mu < \nu < \nu'$.

Si donc nous parlons de E'' à notre interlocuteur supposé, il nous rappellera d'abord la remarque de Poincaré. Pour former cet ensemble, il faut imaginer le classement alphabétique (au sens de M. Borel) de toutes les phrases susceptibles de définir des nombres transfinis. Or, parmi ces phrases, on rencontrera celle qui définit E''; il faudra bien l'écarter, puisque E'' n'est pas encore formé; il faut la considérer comme dépourvue de sens.

Soit, répondrai-je; mais après avoir formé E″, je pourrai revenir à cette phrase et parler des nombres ν et ν'.

Peut-être, me dira-t-il : Mais savez-vous de quoi vous parlez? Il faut éliminer, bien entendu, en même temps que la phrase que nous venons de mentionner, toutes celles qui impliquent une idée analogue, toutes celles qui impliquent la construction préalable de E″. Ainsi, indépendamment des nombres transfinis susceptibles d'être définis autrement que par des constructions directes, considérez-vous qu'il faille vous arrêter à λ ou à μ?

Je répondrai, non sans hésitation, que E″ doit comprendre, non seulement E, mais E′. Je n'avais pas, en effet, en définissant E′, pensé au classement alphabétique de toutes les définitions possibles. Ce classement m'apparaît comme un procédé ingénieux pour repartir encore une fois au delà de la limite qui me semblait définitive.

Quoi qu'il en soit, j'insisterai sur le fait que je peux repartir, et que je n'ai obtenu qu'une première partie E'_1 de l'ensemble que je voulais définir. A partir du premier nombre ν_1 n'appartenant pas à E'_1, je peux continuer à compter, ν_1+1, ν_1+2, et ainsi de suite. Répétant à peu près ce que j'ai dit déjà à propos des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, je parlerai de nombres $\nu_2, \nu_3, \ldots$, définis successivement par les admissions successives de phrases d'abord écartées. Pendant une année entière, je lui expliquerai comment je peux toujours définir de nouveaux nombres. Mais il faudra bien m'arrêter. Alors je conclurai : « Vous avez compris ce que je veux dire. Imaginez que je continue indéfiniment. A la fin des siècles, j'aurai défini E″, et l'antinomie réapparaît, puisque je peux vous parler de nombres ν et ν' n'appartenant pas à E″. »

Non, me répondra mon interlocuteur, elle ne réapparaît pas, car la réponse de Poincaré est toujours valable. Vous avez parlé pendant un an pour définir un ensemble. Le discours que vous avez tenu n'est qu'une des phrases qu'il faut examiner pour la formation de E″, que vous écartez provisoirement, et à laquelle vous donnez un sens après coup. Vous imaginez une suite de nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots$, qui ne sont que de mauvaises estimations de ν. La nécessité où vous êtes de les définir successivement vous fait comprendre que la brève phrase « le plus petit nombre transfini non définisable » n'a par elle-même aucun sens, et qu'il me faut une définition précise pour savoir de quoi vous parlez. Vos nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ne peuvent être réellement définis que par des phrases de plus en plus longues, et leur limite ν n'est réellement définissable que par une phrase d'une infinité de mots. Il importe peu que je puisse réellement concevoir ce nombre ν, et le nombre ν', et que vous ne le puissiez pas. Ce qui importe, c'est de constater que, une infinité de mots étant effectivement nécessaires pour le définir, il n'y a pas de contradiction à supposer que l'on continue à compter au delà de l'ensemble E″. Mais tout cela ne nous rapproche pas de l'ensemble de tous les nombres de la seconde classe, que je suis aussi bien que vous incapable de me représenter.

Mon interlocuteur à intelligence surhumaine saurait sans doute si E'' est ou non une section de l'ensemble des nombres transfinis de la seconde classe, et si ν et ν' sont égaux ou différents. Mais je ne peux pas sur ce point savoir ce qu'il me dirait.

Comme conclusion, je ne prétends pas avoir fait disparaître cette inquiétude, cette insatisfaction de l'esprit, que Zénon d'Élée ressentait en présence de l'infini, et que, trop habitués à l'infini pour bien comprendre les doutes du sophiste, nous ressentons encore devant le transfini. Mais j'espère avoir montré qu'il n'y a pas de contradiction; il ne pouvait pas y en avoir.

11. *Remarques diverses sur les éléments innommables.* — On peut appliquer des principes analogues à ceux qui précèdent aux autres formes de l'antinomie Richard. Ainsi les résultats rappelés au n° 1 semblent donner le moyen de nommer une fonction plus rapidement croissante que toute fonction nommable, et un nombre n'appartenant pas à l'ensemble dénombrable des nombres nommables. Ces définitions sont illusoires, et nous pourrions répéter ce qui a été dit à propos de l'antinomie Richard. Mais il semble préférable de montrer qu'il y a un lien entre ces différentes questions.

1° Le plus évident de ces liens est celui qui existe entre la suite des nombres transfinis et une suite convenablement formée de fonctions de plus en plus rapidement croissantes. On fait en général correspondre au nombre transfini

$$\alpha = a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega + a_n = P(\omega) + a_n,$$

la fonction

$$f_\alpha(x) = e^{P(x)}\, x^{a_n},$$

et l'on peut convenir que, si une fonction $f(x)$ correspond ainsi à un nombre transfini α, $e^{f(x)}$ correspondra à e^α. Mais ces conventions simples sont en défaut quand il s'agit de définir ce qu'on appellera la fonction exponentielle itérée ω fois. On appliquera alors la formule (2) du Chapitre I, ou une formule analogue.

On peut ainsi, sans ambiguïté, faire correspondre une fonction déterminée à chaque nombre α de l'ensemble E défini au n° 8. Mais ensuite se présente une difficulté dont nous pouvons donner une idée en observant que ω peut être défini comme limite, soit de la suite 1, 2, ..., soit d'une suite d'entiers $n_1, n_2, \ldots$, qu'on peut supposer rapidement croissants. Si l'on convient que $f_n(x) = x^n$ (pour tout n fini), et qu'on définisse $f_\omega(x)$ par la formule (2), on obtient, non x^x, mais dans le premier cas une fonction qui croît à peu près comme x^x (pour x entier elle est équivalente à x^x), et dans le second cas une fonction dont la croissance est arbitrairement rapide. Sans doute cette conclusion est-elle un peu illusoire, puisqu'on ne peut prendre pour la suite des n_k qu'une suite déjà

nommée. Mais cette remarque montre que, si le nombre λ défini comme le plus petit nombre transfini supérieur à tous ceux de E, quoique non susceptible d'être bien connu, est nommé sans ambiguïté, il n'en est pas de même de la fonction $f_\lambda(x)$ qui devrait lui correspondre. Il faudrait pour la définir avoir nommé une suite de nombres transfinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, tendant vers λ, et, par définition de λ, cela n'est pas possible.

L'application transfinie de la formule (2) ne permet donc de définir $f_\alpha(x)$ que si $\alpha < \lambda$.

Peut-être est-il possible d'obtenir par des procédés indirects des fonctions encore plus rapidement croissantes. Ainsi, ne sachant pas si le nombre π est normal pour la numération décimale, nous pouvons supposer que les zéros se raréfient de plus en plus dans la suite des décimales de ce nombre, et qu'une fonction $f(x)$, égale pour $x = n$ entier au rang du $n^{\text{ième}}$ zéro et variant linéairement dans chaque intervalle $(n, n+1)$, croisse plus vite que n'importe quelle fonction $f_\alpha(x)$ $(\alpha < \lambda)$. S'il n'en est pas ainsi, peut-être en sera-t-il ainsi pour d'autres constantes faciles à définir, ou pour d'autres systèmes de numération.

Quoique, en raison du fait que λ dépasse déjà infiniment tous les nombres transfinis pratiquement pensables, il semble très peu probable qu'il en soit ainsi, c'est une circonstance qu'il faut provisoirement considérer comme logiquement possible, et il n'est pas non plus impossible qu'on puisse déduire d'une telle fonction la définition d'un nombre transfini supérieur à λ, et même aux nombres que j'ai appelés γ et ν. Ce serait une de ces définitions indirectes, prévues au n° 10 et qui nous ont obligés à distinguer ν et ν'. Mais il est probable que $\nu' = \nu = \gamma$.

Malgré ces difficultés, l'impossibilité où nous sommes de nommer des fonctions de croissances arbitrairement rapides, tient au fait qu'elles sont (au moins pour l'esprit surhumain dont nous avons parlé) liées à des nombres transfinis trop grands pour être nommés.

2° Le problème est le même pour les fonctions lentement croissantes, qu'on peut considérer comme inverses des précédentes. Il y en a qui sont trop lentement croissantes pour pouvoir être nommées; nous les appellerons fonctions $\varphi(x)$. A toute fonction nommée $f(x)$ correspond alors une classe de fonctions $f(x)\,\varphi(x)$ qui ne peuvent pas être nommées.

Si $f(x)$ dépend d'une manière continue d'un paramètre, le résultat subsiste même si ce paramètre a une valeur non nommable. Supposons par exemple $f(x) = x^2$. Si α n'est pas nommable, non seulement $f(x)\,\varphi(x)$ ne l'est pas, mais il en est de même de $f(x)\,\psi(x)$, en désignant par $\psi(x)$ une fonction quelconque telle que

$$\log \psi(x) = o(\log x) \qquad (x \to \infty).$$

Si en effet $f(x)\psi(x)$ était nommable, α serait défini par

$$\log[f(x)\psi(x)] \sim \alpha \log x,$$

et serait nommable. Il existe donc des classes de fonctions dépendant d'un paramètre (et même d'un nombre arbitrairement grand de paramètres) et dont on peut affirmer qu'elles ne contiennent aucun élément nommable.

On peut aussi définir des fonctions non nommables, et pour lesquelles ce caractère provient, non de leur mode de croissance moyen, mais de l'irrégularité de leur croissance; tel sera le cas des fonctions de la forme

$$\int [f(x) + g(x)\sin^2\varphi(x)]\,dx, \tag{5}$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions régulièrement croissantes.

Tous les résultats qui précèdent s'étendent sans difficultés aux suites, et en particulier aux suites de nombres entiers. Naturellement, une telle suite ne pourra être lentement croissante que si elle n'est pas strictement croissante. Elle comprendra p_1 termes égaux à 1, p_2 termes égaux à 2, et ainsi de suite, la suite des p_h étant rapidement croissante.

3° Considérons maintenant le segment (0, 1). Étant donnée une suite de nombres x_n ($n = 1, 2, \ldots$) de ce segment, on sait nommer un nombre x_m différent de tous les x_n. Quel que soit le procédé employé, sa répétition transfinie permet de nommer une infinité de nouveaux nombres x_α. Tant que $\alpha < \lambda_1$, il n'y a pas de difficulté, puisqu'on sait effectivement ranger en une suite infinie tous les β de la section $(1, \alpha)$, et par suite tous les x_β; on saura donc définir x_α. Mais x_{λ_1} ne peut pas être considéré comme défini, et c'est ce qui résout l'antinomie Richard sous la forme considérée par M. Borel.

Parmi les différentes méthodes pour la définition de x_m, nous avons choisi celle indiquée au n° 1, parce qu'elle permet de caractériser de nombreuses classes de nombres innommables. En effet, chaque système de numération fait correspondre à chaque nombre x plusieurs suites d'entiers croissants, et il suffit qu'une de ces suites soit trop rapidement croissante pour être nommable, ou soit innommable pour une autre raison, pour que x soit aussi innommable. On peut ainsi caractériser une infinité, et même une infinité non dénombrable, de classes de nombres innommables.

Pourtant il semble bien que l'ensemble de toutes ces classes soit de mesure nulle, de sorte qu'un nombre choisi au hasard, qui a évidemment une probabilité égale à un de ne pas être nommable, ait la même probabilité de n'appartenir à aucune de ces classes. En tout cas, il en est ainsi de celles qui sont caractérisées par une croissance trop rapide d'une des suites auxiliaires: elles ne contiennent en effet aucun nombre absolument normal, et un nombre choisi au hasard est presque sûrement absolument normal.

D'autres classes de nombres innommables peuvent être définies à l'aide d'une formule du type (5). Mais ici encore on peut observer que pour un nombre choisi au hasard, la suite des décimales a des oscillations plus irrégulières que celles qu'implique une formule de ce genre.

D'autre part, on peut aisément nommer des nombres pour lesquels la suite des décimales a quelques-uns des caractères que réaliserait le hasard; sans doute est-ce le cas du nombre π. Dans la représentation décimale d'un tel nombre, modifions suivant une loi donnée (par exemple en remplaçant 0 par 1, 1 par 2, ..., 9 par 0) les décimales dont les rangs appartiennent à une suite donnée S. Nommer le nombre obtenu x, c'est nommer S. A la classe C des suites S trop rapidement croissantes pour être nommables correspond ainsi une classe K des nombres non nommables, bien différente de celles définies d'abord, en ce sens que la suite de leurs décimales conserve les principaux caractères d'une suite de chiffres choisis au hasard.

Finalement, il existe bien des manières de définir des classes K de nombres compris entre 0 et 1, et même des ensembles non dénombrables de classes K, ne contenant aucun élément nommable, et telles que pour chacune il y ait correspondance biunivoque entre ses éléments et les suites S de C. Mais il ne semble pas possible, même en introduisant d'autres méthodes pour définir des classes d'éléments non nommables, qu'on échappe à la conclusion indiquée tout à l'heure : un nombre choisi au hasard, non seulement n'a aucune chance d'être nommable, mais n'a aucune chance d'appartenir à une classe nommable d'éléments innommables (1).

CHAPITRE III.

Remarques sur un théorème de M. Denjoy.

11. *Rappel du théorème de M. Denjoy.* — Considérons une suite S d'entiers positifs p_n ($n = 1, 2, \ldots$), vérifiant la condition $p_n \leq n$. Désignons par C l'ensemble des suites S. D'après le théorème de M. Denjoy : *on peut définir dans* C *une infinité de classes disjointes* E, *ayant chacune la puissance du continu, et telles qu'il y ait correspondance biunivoque entre les* E *appartenant à un certain sous-ensemble* C′ *de* C *et les nombres transfinis de la seconde classe.*

---

(1) L'ensemble E de toutes les classes nommables K d'éléments innommables est invariant par l'addition d'un nombre rationnel quelconque. Il paraît bien difficile d'envisager qu'il soit non mesurable, ou bien mesurable et de mesure un; il faut donc conclure qu'il est de mesure nulle.

Bien entendu, nous excluons toute définition qui, par exemple, reviendrait à prendre pour K la classe de tous les éléments innommables; il s'agit de classes définies par des propriétés précises qui laissent comprendre pourquoi leurs éléments sont innommables. Un nombre choisi au hasard est innommable, sans qu'on sache pour quelle raison particulière il l'est.

D'ailleurs C et C′ ont la même puissance, qui est celle du continu, de sorte qu'on peut aussi établir une correspondance biunivoque entre les classes E considérées et les points d'un segment. Le n° 12 sera consacré à cette question, mais plus pour en montrer les difficultés que pour la résoudre réellement.

Nous désignerons par e un ensemble dénombrable de points d'une droite D. Si deux ensembles e et e' sont *isomorphes*, c'est-à-dire qu'on puisse établir entre leurs points une correspondance biunivoque n'altérant pas l'ordre des points sur la droite D, nous dirons qu'ils appartiennent à une même classe (e).

L'ensemble e supposé dénombré donne une suite s de points A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, tous distincts. Comme pour e, nous pouvons définir des classes (s) de suites s, caractérisées chacune par les conditions qui définissent l'ordre relatif des différents points A_n. Comme une permutation quelconque de la suite des A_n ne change pas l'ensemble e qu'elle représente, chaque ensemble e est représenté par une infinité de suites s, dont l'ensemble a la puissance du continu. De même, chaque classe (e) correspond à un ensemble de classes (s) ayant la puissance du continu.

Or, pour définir une classe (s), il n'y a qu'à se donner, pour chaque A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, un nombre p_n qui indique sa situation par rapport aux points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Nous verrons dans un instant qu'il y a intérêt, pour numéroter les n intervalles séparés par ces points, à ne pas adopter l'ordre qui paraît d'abord naturel (de gauche à droite sur D). Quoi qu'il en soit, p_n aura n valeurs possibles, $1, 2, \ldots, n$, de sorte que : il y a correspondance biunivoque entre les classes (s) et les suites S définies tout à l'heure, et par suite aussi entre les classes (e) et certaines classes E de suites S, deux à deux disjointes, et dont chacune a la puissance du continu.

Or il y a évidemment aussi correspondance biunivoque entre les nombres transfinis de la seconde classe et celles des classes (e) dont les ensembles e sont bien ordonnés, donc aussi entre ces nombres transfinis, et celles des classes E qui correspondent à ces classes (e). Leur réunion ne forme qu'un sous-ensemble C′ de C.

Le théorème énoncé est ainsi démontré. Il y a évidemment intérêt à préciser la condition qui caractérise les suites S appartenant à C′, et auxquelles correspondent par suite des nombres transfinis de la deuxième classe.

A cet effet, au sujet de la numérotation laissée tout à l'heure arbitraire, nous ferons la convention suivante : $p_n = n$ signifiera que A_n est à droite de tous les points $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$; $p_n = \nu < n$ signifiera que A_n est immédiatement à gauche du point A_ν.

Nous appellerons *chaîne* une suite croissante de valeurs n_h $(h = 1, 2, \ldots)$ de n telles que

$$p_{n_{h+1}} = n_h,$$

de sorte que le point $A_{n_{h+1}}$ sera toujours à gauche de A_{n_h}.

Montrons alors, avec M. Denjoy, que : *pour que la suite* S *appartienne à* C', *il faut et il suffit qu'il n'y ait pas de chaîne infinie.*

Cette condition est évidemment nécessaire : s'il y avait une chaîne infinie, elle donnerait une suite infinie de points A_n dont chacun serait à gauche du précédent, et l'ensemble de tous les A_n ne serait pas bien ordonné.

Inversement, si l'on peut trouver une suite infinie s de points B_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) appartenant à l'ensemble des A_n et tels que chacun soit à gauche du précédent, en dénombrant les A_n, en désignant par B'_1 le premier point, appartenant ou non à s, qui laisse à sa gauche certains points de s (donc une infinité), par B'_2 le premier qui, laissant encore à sa gauche des points de s, soit à gauche de B'_1, et ainsi de suite, on est sûr de pouvoir continuer indéfiniment, puisque immédiatement à gauche de chaque B'_h il reste toujours une infinité de B_ν non encore dénombrés, et les indices des points B'_h formeront une chaîne infinie. Le théorème est ainsi démontré.

Il est à peine besoin de faire observer que, malgré son grand intérêt, ce théorème ne recule pas les bornes de l'inconnaissable. Si l'on se trouve avoir nommé une suite vérifiant la condition précédente et qu'on en déduise un nombre transfini très grand, cela constituera une définition indirecte de ce nombre. Nous avons déjà prévu cette possibilité en distinguant les limites ν et ν'. D'après la définition même de ν', ce nombre, s'il atteint ou dépasse ν, ne saurait dépasser ν'. D'ailleurs λ, μ, ν dépassent déjà tellement tout ce qui est humainement convenable, qu'on ne voit *a priori* aucune raison de penser qu'une définition indirecte pourrait donner par hasard un nombre transfini égal ou supérieur à ν; à première vue, il semble plutôt probable que $\nu = \nu'$.

12. *Étude de l'ensemble* C'. — 1° Chaque classe E a évidemment la puissance du continu. Il y a en effet autant d'éléments dans une telle classe qu'il y a de manières de dénombrer un ensemble dénombrable; or, d'une de ces manières, rien qu'en choisissant une suite arbitraire d'entiers croissants h_ν, et en intervertissant, pour chaque h_ν les éléments de rangs $2h_\nu - 1$ et $2h_\nu$, on déduit une infinité d'autres ayant la puissance du continu. D'autre part, chaque E est un sous-ensemble de C', qui est lui-même un sous-ensemble de C, qui a la puissance du continu. Donc chaque E, et aussi C', ont la puissance du continu.

Un théorème général de G. Cantor donne alors le moyen d'établir une correspondance biunivoque entre les éléments de E (ou de C') et les points d'un segment. Mais cette méthode détournée est à beaucoup de points de vue assez peu satisfaisante. A des suites ayant au début un grand nombre d'éléments communs ne correspondront pas en général des points voisins d'un segment, comme cela a lieu pour les modes de correspondance entre les points d'un segment, et certaines suites qui constituent les systèmes de numération.

Nous nous proposons de chercher si l'on peut, dans une certaine mesure, remédier à cet inconvénient. Cela est facile pour chaque classe E. Il semble

au contraire qu'en essayant d'obtenir pour l'ensemble C' un résultat analogue, on ne puisse pas éviter de retomber sur les difficultés du transfini.

2° Nous allons d'abord présenter quelques remarques sur les *classes de suites définies par des conditions de récurrence*.

Nous considérerons des suites $\mathcal{S}$ d'éléments e_1, e_2, ..., choisis dans un ensemble dénombrable $\mathcal{E}$. Une classe $\mathcal{C}$ de telles suites sera définie par une condition de récurrence si elle est définie par une succession de conditions de la forme $e_n \in \mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_n$ étant un sous-ensemble non vide de $\mathcal{E}$, dont la définition peut dépendre d'une manière quelconque de e_1, e_2, ..., e_{n-1}. Nous supposons essentiellement toute autre condition exclue. Ainsi la classe des suites contenant une infinité de fois chaque élément de $\mathcal{E}$ ne peut pas être définie par des conditions de récurrence (bien que certains sous-ensembles de cette classe puissent l'être).

Nous supposerons exclue l'hypothèse que, pour N assez grand et certaines déterminations de e_1, e_2, ..., e_N, la suite $\mathcal{S}$ se trouve déterminée sans qu'il y ait de nouveaux choix à faire (ce qui n'exclut pas l'hypothèse qu'il puisse arriver qu'un ou plusieurs $\mathcal{E}_n$ consécutifs se réduisent à un élément).

Alors la classe $\mathcal{C}$ considérée a la puissance du continu, et il est facile d'établir, entre les suites $\mathcal{S}$ et les points du segment (0, 1) une correspondance qui constitue une *numération généralisée*. Elle sera biunivoque, à cela près que les extrémités des intervalles distingués dans cette numération peuvent ne correspondre à aucune suite $\mathcal{S}$, ou, comme pour la numération ordinaire, correspondre à deux suites distinctes.

A cet effet, on divisera d'abord le segment (0, 1) en autant d'intervalles que $\mathcal{E}_1$ contient d'éléments, et l'on fera correspondre un de ces intervalles à chaque détermination possible de e_1. Chacun de ces intervalles sera ensuite subdivisé en autant d'intervalles partiels qu'il le faut pour les faire correspondre aux déterminations possibles de e_2; et ainsi de suite.

Il faut remarquer que, si les e_n sont des points d'une droite, de sorte qu'il y a entre eux une relation d'ordre, on peut s'arranger pour que cette relation ne soit pas changée si l'on passe de e_n à l'intervalle qui le représente (on remarque que cela est vrai même si $\mathcal{E}_n$ est un ensemble partout dense. Ainsi il n'y a aucune difficulté à faire correspondre aux nombres rationnels des intervalles disjoints, dont la réunion constitue un intervalle donné, de manière qu'à un nombre $x < y$ corresponde un intervalle situé à gauche de celui qui correspond à y).

Si cette condition est réalisée, la correspondance entre chaque suite $\mathcal{S}$ de la classe $\mathcal{E}$ et les points d'un segment est une correspondance alphabétique, l'ordre relatif de deux points résultant de la comparaison des suites qui leur correspondent, les suites étant classées comme les mots d'un dictionnaire.

3° Considérons maintenant l'ensemble des permutations de la suite des nombres entiers. Les permutations que nous considérons sont celles que M. Denjoy appelle *élémentaires*, c'est-à-dire celles qui transforment la suite des nombres entiers en une suite simplement infinie (et non transfinie). Une telle permutation est définie par une suite d'entiers

$$(1) \qquad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad \ldots,$$

telle que chaque valeur entière positive p se trouve une fois et une seule dans la suite des p_n. Autrement dit, l'équation $p = p_n$ a une solution et une seule, $n = n_p$, et la suite

$$(2) \qquad n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p, \quad \ldots$$

définit la permutation inverse de la précédente.

La classe des permutations élémentaires n'est pas une classe définie par une formule de récurrence. Pour chaque valeur de n, l'ensemble $\mathcal{E}_n$ dans lequel p_n peut être choisi comprend tous les entiers positifs différents de $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, et à aucun moment la condition que chaque entier p doive être effectivement choisi une fois n'intervient pour limiter ce choix; c'est une condition qu'on ne peut vérifier qu'à la fin des opérations.

Il n'en est pas de même si pour chaque valeur de p nous nous donnons une borne supérieure de n_p. Le plus simple est de se donner exactement n_p. On est alors conduit à considérer la suite

$$(3) \qquad p_1, \quad n_1, \quad p_2, \quad n_2, \quad \ldots, \quad p_h, \quad n_h, \quad \ldots,$$

qui comporte des données surabondantes. En effet $p_h = k < h$, équivaut à $n_k = h$ et cette circonstance est connue avant d'arriver au choix de p_h, qui se trouve déterminé par des choix antérieurs. Si l'on n'est pas dans ce cas, p_h ne peut être que $\geq h$, et son choix détermine un choix postérieur.

Mais on remarque, d'une part, que la suite (3) détermine la suite (1), d'autre part que la classe de ces suites est définie par des conditions de récurrence, ce qui permet d'établir simplement une correspondance du type alphabétique entre les suites du type (3) et les points d'un segment. Donc, grâce à l'adjonction des éléments auxiliaires n_h, on obtient une représentation, indirecte si l'on veut, mais plus simple que celle qui résulte du théorème de Cantor, entre les permutations élémentaires de la suite des nombres entiers et les points d'un segment.

On remarque en particulier que cette correspondance est satisfaisante au point de vue de la continuité. Quelque grand que soit h, pour $n \geq N$, N étant supérieur à la fois à h et à $n_1, n_2, \ldots, n_h$, en changeant d'une manière quelconque les termes de la suite (1) d'indices supérieurs à N, on est assuré de ne pas changer les $2h$ premiers termes de la suite (3), et par suite, si h est lui-

même assez grand, de déplacer très peu le point du segment (0, 1) qui correspond à cette suite.

Le problème posé est ainsi résolu pour les classes E qui contiennent les suites correspondant aux différentes manières de dénombrer un même ensemble dénombrable; ces différents dénombrements se déduisent tous par des permutations élémentaires de l'un quelconque d'entre eux.

4° Étudions maintenant la classe C'. Elle n'est manifestement pas définie par des conditions de récurrence. La condition qu'il n'y ait pas de chaîne infinie ne se traduit jamais par l'obligation d'arrêter une chaîne à un élément donné. Il n'en serait pas de même si l'on se donnait une borne supérieure k de la longueur des chaînes (c'est-à-dire du nombre de leurs éléments). Mais, quelque grand que soit k, on n'obtiendrait ainsi qu'une partie de la classe C'.

On sait qu'on appelle nombres transfinis de la première espèce ceux qui ont un antécédent immédiat. Un nombre de la seconde espèce est au contraire défini, s'il est de la seconde classe, comme limite d'une suite de nombres transfinis croissants.

Il est à peu près évident que les nombres de la seconde espèce sont caractérisés, dans la représentation de la section $(1, \alpha)$ par une suite S de la classe C', par le fait que leurs rangs n sont des points de bifurcation d'où se détachent une infinité de chaînes.

Si en effet β est de la forme $\beta'+1$, à partir du moment où β et β' auront été dénombrés, on ne trouvera plus aucun p_ν égal au rang n de β; il conduirait à placer le point A_ν entre β' et β, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si inversement l'équation $p_\nu = n$ n'a qu'un nombre fini positif ou nul de racines, il viendra un moment où p_ν ne sera plus égal à n, de sorte qu'aucun point ne sera plus placé entre A_n et celui qui est à ce moment son antécédent immédiat. Il le restera donc, et représente un nombre transfini β' tel que $\beta = \beta'+1$.

On voit ainsi comment, un nombre transfini α étant défini par l'intermédiaire d'une suite S, on peut obtenir l'ensemble dérivé de la section $(1, \alpha)$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres β de seconde espèce et $< \alpha$. Les nombres $\alpha < \omega^2$, en particulier, sont caractérisés par le fait que leurs ensembles dérivés sont finis. Les suites S qui leur correspondent ont donc chacune un nombre fini de termes qui sont des points de bifurcation d'une infinité de chaînes. Si $k\omega < \alpha \leq (k+1)\omega$, ce nombre est k.

En ce qui concerne la longueur des chaînes, elle est évidemment bornée si $\alpha < \omega$. Dès que $\alpha \geq \omega$, parmi les suites S correspondant à α, il y en a qui comportent des chaînes arbitrairement longues; tel sera le cas si, quel que soit $\alpha \geq \omega$, les entiers naturels sont rangés dans l'ordre

1; 3, 2; 6, 5, 4; 10, 9, 8, 7; 15, ..., 11; 21, ..., 16; ....

Chaque nombre $\frac{n(n+1)}{2}$ appartiendra alors à une chaine de longueur $\geq n$ (puisqu'il est suivi par $n-1$ autres termes). Il peut donc seulement arriver que, pour certaines des suites correspondant à un nombre transfini α, les longueurs des chaînes soient bornées. Nous allons voir qu'il en est ainsi si $\alpha < \omega^\omega$, et dans ce cas seulement.

Si en effet $\alpha < \omega^{m+1}$, on peut supposer ω^m, $2\omega^m$, $3\omega^m$, ... rangés dans l'ordre naturel, de manière que chacun soit le premier d'une chaine. Après chaque $(p+1)\omega^m$, on rangera dans l'ordre naturel les nombres

$$p\omega^m + \omega^{m-1}, \quad p\omega^m + 2\omega^{m-1}, \quad p\omega^m + 3\omega^{m-1}, \quad \ldots,$$

de manière que chacun soit le second d'une chaine; peu importe l'ordre relatif des nombres correspondant aux différentes valeurs de p. De même, si l'on place après chaque $p\omega^m + (q+1)\omega^{m-1}$, et dans leur ordre naturel, tous les $p\omega^m + q\omega^{m-1} + r\omega^{m-2}$ $(r = 1, 2, \ldots)$, chacun sera le troisième d'une chaine; et ainsi de suite. On voit ainsi que, si $\alpha < \omega^{m-1}$, on peut s'arranger pour limiter à $m+1$ la longueur des chaines. Cela sera au contraire impossible si $\alpha \geq \omega^{m+1}$, puisque ω^{m+1} doit nécessairement être suivi d'une infinité de $(p+1)\omega^m$, suivis chacun d'une infinité de $p\omega^m + (q+1)\omega^{m-1}$, et ainsi de suite. Si donc $\alpha \geq \omega^\omega$, il ne peut exister aucune suite S correspondant à α et pour lesquelles les longueurs de toutes les chaines soient bornées dans leur ensemble.

Pour obtenir une classe de suites S définie par des conditions de récurrence, l'idée la plus naturelle est de limiter à une valeur donnée k la longueur des chaines. Chaque fois qu'un nombre n se trouvera être le $k^{\text{ième}}$ d'une chaine, on saura que, pour $\nu > n$, n devra être rayé de la liste des valeurs possibles pour p_ν. C'est bien une condition de récurrence. Mais on voit à quel prix ce résultat est atteint. Les nombres transfinis définis par ces suites ne peuvent pas dépasser ω^k; quel que soit k, ils n'atteignent pas ω^ω.

On peut aller plus loin en opérant comme nous l'avons fait pour la classe des permutations élémentaires. A certains des p_n, nous adjoindrons un ou plusieurs autres éléments, p'_n, p''_n, ..., de manière à obtenir une classe de suites S' définie par des conditions de récurrence; s'il y a correspondance biunivoque entre les S d'un certain sous-ensemble de C', et les S', nous saurons faire correspondre ces suites S aux points d'un segment.

Nous pouvons par exemple opérer comme suit : un entier positif k étant choisi une fois pour toutes, chaque fois que nous trouverons un nombre n qui soit le $k^{\text{ième}}$ d'une chaine, nous adjoindrons à p_n deux entiers $p'_n \leq k$ et p''_n ayant la signification suivante : les chaines contenant n auront au plus p'_n éléments; cette borne supérieure p'_n sera atteinte au moins une fois, et le sera pour la première fois pour $\nu = p''_n$, c'est-à-dire que p''_n sera le $p'^{\text{ième}}_n$ et dernier terme d'une chaine contenant n. Naturellement, p''_n devra être assez grand pour que ces

conditions soient compatibles (il faut en tout cas que $p''_n \geq n + p'_n - k$; mais il peut arriver que certaines des valeurs comprises entre n et $n + p'_n - k$ doivent obligatoirement, en vertu des déterminations antérieures de certains p''_h, appartenir à d'autres chaînes ne contenant pas n; la valeur minima de p''_n doit alors être augmentée).

Le lecteur vérifiera aisément que les conditions imposées à S′ sont ainsi toutes réalisées. Mais la classe des suites S qu'on peut ainsi faire correspondre aux points d'un segment n'est encore qu'un sous-ensemble de la classe C′. Nous pensons pouvoir laisser encore au lecteur le soin de vérifier que les nombres transfinis correspondant à ces suites sont tous ceux de la section $(\omega, \omega^{\omega+k-1})$, et ceux-là seulement.

On peut naturellement aller plus loin, en supposant que p'_n ne limite pas la longueur des chaînes contenant n, mais que, pour chaque chaîne atteignant la longueur p'_n, on se donne un nouveau nombre p'''_n qui la limitera. Plus on veut aller loin dans la suite des nombres transfinis, plus il faudra compliquer les méthodes. Il semble donc que, si l'on veut améliorer la solution donnée par le théorème général de Cantor pour le problème de l'établissement d'une correspondance biunivoque entre les suites S de la classe C′ et les points d'un segment, on ne puisse pas éviter de retomber dans toutes les difficultés du transfini.

SUR UN PROBLÈME D'INVERSION

DANS

LA THÉORIE DES FONCTIONS MÉROMORPHES

PAR M. LÊ VAN THIEM.

AVANT-PROPOS.

L'objet principal de ce travail (¹) est la résolution du problème d'inversion de la théorie de la distribution des valeurs dans le domaine rationnel. Le moyen utilisé est constitué par les surfaces que Ullrich a proposées et appelées surfaces à un nombre fini de bouts périodiques. Mais outre cet intérêt central, l'étude des surfaces mentionnées nous révèle aussi des vues instructives concernant l'influence de la dyssymétrie dans la structure topologique des surfaces de Riemann sur l'ordre de croissance de la fonction uniformisante $w = f(z)$, sur la distribution des racines de l'équation $f(z) = a$, et enfin sur le type de la surface.

Dans le Chapitre I, nous rappellerons les principaux résultats de la théorie de la distribution des valeurs de M. Nevanlinna, afin de formuler le problème d'inversion en question.

Dans le Chapitre II, nous expliquons la représentation par réseau des surfaces de Riemann à un nombre fini de points fondamentaux de ramifications, pour arriver à la définition des surfaces à bouts périodiques qui constituent le nœud de la solution du problème d'inversion posé.

Dans le Chapitre III, sera exposé brièvement la théorie des transformations quasi conformes qui vont nous servir de moyen d'investigation pour étudier la fonction uniformisante des surfaces mentionnées.

(¹) Ce travail a été présenté comme Thèse de Doctorat d'État à la Faculté des Sciences de Paris le 2 mai 1949.

Le Chapitre IV montre comment obtenir une représentation « presque conforme » de ces surfaces sur le plan fini, c'est-à-dire une représentation quasi conforme qui, à certains points de vue, s'approche asymptotiquement de la représentation conforme dont l'existence est garantie par le théorème fondamental de Riemann.

Dans le Chapitre V, nous déterminerons à l'aide de cette représentation « presque conforme », l'ordre de la croissance de la fonction uniformisante. Nous verrons que cet ordre, contrairement aux prévisions de M. Ullrich, n'est rationnel que dans des cas exceptionnels et dépasse en général la valeur rationnelle prévue, égale à la moitié du nombre de bouts périodiques. Le rehaussement de l'ordre au-dessus de cette valeur minimale, dû à une structure en général dyssymétrique de la surface, n'est pas sans rapport avec le fait connu que la dyssymétrie favorise chez les surfaces de Riemann le type hyperbolique. Ici la conséquence de la dyssymétrie est la distribution en spirale des valeurs de la fonction uniformisante, ce qui explique pourquoi l'ordre de croissance s'élève au-dessus de la valeur minimale $\frac{m}{2}$ indiquée par le théorème de Denjoy-Carlemann-Ahlfors pour les fonctions possédant (c'est le cas de l'uniformisante des surfaces en question) m points critiques logarithmiques.

Le Chapitre VI étudie la distribution des valeurs de la fonction uniformisante au point de vue des défauts et indices. Cette étude montre que la structure périodique des surfaces partielles impose plus de conditions que M. Ullrich ne l'a prévu et prépare la solution du problème d'inversion posé.

Dans le Chapitre VII, nous abordons la solution du problème d'inversion, en indiquant comment il faut choisir les bouts périodiques pour les réunir en une surface W dont la fonction uniformisante possède les propriétés requises. Ce choix n'est pas unique et nous indiquons à la fin quels sont les bouts périodiques les plus simples qu'on pourrait prendre pour arriver au but.

Enfin, dans le dernier Chapitre VIII, nous donnons à l'aide des fonctions doublement périodiques, la solution du problème d'inversion dans le cas $\hat{c}_i$ nuls, ε_i rationnels, cas non résoluble par les surfaces à bouts périodiques.

Les principaux résultats de ce travail ont été présentés au Congrès de l'A. F. A. S. à Genève et publiés dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 23, 1949.

Qu'il nous soit permis, en cet endroit, de remercier M. G. Valiron du bienveillant intérêt qu'il a toujours témoigné à nos études et recherches. Nous lui en gardons une bien vive gratitude.

CHAPITRE I.

Introduction.

1. Soit $w = f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan fini $z \neq \infty$. On désigne par $n(r, a)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$ dans le cercle $|z| < r$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité, et par $n_1(r, a)$ le nombre des racines multiples de la même équation, une racine multiple d'ordre k étant comptée $k - 1$ fois (1). On définit alors

$$N(r, a) = \int^r \frac{n(t, a)}{t}\, dt, \qquad N_1(r, a) = \int \frac{n_1(t, a)}{t}\, dt,$$

$$T(r) = \max N(r, a),$$

$$\delta(a) = 1 - \overline{\lim} \frac{N(r, a)}{T(r)}, \qquad \varepsilon(a) = \underline{\lim} \frac{N_1(r, a)}{T(r)}.$$

Les quantités $\delta(a)$ et $\varepsilon(a)$ s'appellent défaut et indice de la valeur a par rapport à la fonction $f(z)$. On a l'inégalité évidente

$$\delta(a) + \varepsilon(a) \leq 1. \tag{1}$$

2. Le noyau de la théorie de la distribution des valeurs est constitué par le théorème suivant :

Théorème. — *Entre les défauts et indices d'un nombre quelconque de valeurs* $a_1, a_2, \ldots, a_q$ existe la relation

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta(a_\nu) + \sum_{\nu=1}^{q} \varepsilon(a_\nu) \leq 2. \tag{2}$$

Au point de vue topologique cela signifie que la surface engendrée par $f(z)$ (type parabolique) ne peut être trop fortement ramifiée, car $\delta(a_\nu)$ mesure pour ainsi dire la densité des points critiques transcendants sur a_ν et $\varepsilon(a_\nu)$ celle des points de ramification algébrique.

Nous appelons *exceptionnelles*, les valeurs a pour lesquelles la somme $\delta(a) + \varepsilon(a)$ est positive : d'après (2) l'ensemble de telles valeurs est dénombrable. Il en résulte en particulier qu'on peut aussi définir $T(r)$ comme maximum de $N(r, a)$ pour tous les a appartenant à un certain voisinage c'est-

(1) *Voir* R. Nevanlinna [1], [3]; G. Valiron [1], [2].

à-dire à un continu : il n'est pas nécessaire de considérer tous les a du plan des w. Ceci trouve son application au Chapitre V.

3. Le problème d'inversion consiste à chercher une fonction $w = f(z)$ pour laquelle des valeurs données possèdent des défauts et indices donnés satisfaisant aux relations (1) et (2). Mais dans l'état actuel de la théorie il ne semble pas qu'on puisse attaquer ce problème dans toute sa généralité. En particulier le cas d'une infinité de valeurs exceptionnelles semble encore inaccessible. On ne connaît du reste aucune fonction avec une infinité de valeurs exceptionnelles. En ce qui concerne la somme $\sum_1^q \delta_\nu + \sum_1^q \varepsilon_\nu$, bien qu'on connaisse les exemples où elle n'atteint pas le maximum 2, la construction de telles fonctions avec une distribution donnée arbitrairement semble aussi dépasser les moyens dont on dispose actuellement. Finalement on est obligé de restreindre comme suit le problème d'inversion :

Problème d'inversion de la théorie de la distribution. — *A chaque point a_ν d'une suite $a_1, a_2, \ldots, a_q$, on attache deux nombres positifs*

$$\delta_\nu = \delta(a_\nu), \qquad \varepsilon_\nu = \varepsilon(a_\nu),$$

tels que

$$\delta_\nu + \varepsilon_\nu \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_1^q \delta_\nu + \sum_1^q \varepsilon_\nu = 2.$$

Construire une fonction méromorphe qui correspond à cette distribution.

4. R. Nevanlinna [2] a résolu ce problème dans le cas où tous les indices sont nuls : $\varepsilon_\nu = 0$, et les défauts δ_ν rationnels, à l'aide des surfaces dites à un nombre fini de bouts logarithmiques (*voir* définition au Chapitre II).

Peu après, E. Ullrich [3] découvrit une classe de surfaces qu'il appelle surfaces à un nombre fini de bouts périodiques et qui sont les généralisations des précédentes. Il émit l'hypothèse qu'on pourrait résoudre à l'aide de ces surfaces les cas où les indices et les défauts sont rationnels. Il a prévu toutefois que, par suite de la périodicité des bouts, les indices ε_ν doivent être choisis plus petits que 1. Nous verrons que cette restriction n'est pas suffisante : il faut que les sommes $\delta_\nu + \varepsilon_\nu$ elles-mêmes soient plus petites que 1 à moins que ε_ν ne soit nul. Avec cette restriction le problème d'inversion de Ullrich peut alors être résolu à l'aide d'une classe très simple de surfaces à bouts périodiques.

---

[2] R. Nevanlinna [2].
[3] E. Ullrich [1], [2], [3].

CHAPITRE II.

Surfaces de Riemann a un nombre fini de bouts périodiques.

5. Considérons une surface de Riemann F qui recouvre le plan des w: $w = f(z)$. Un point de ramification de la surface F correspond à une coordonnée $w = a$ bien déterminée. Mais il peut arriver que plusieurs points de ramification de F se projettent sur le même point a : nous disons que a est le point fondamental pour tous ces points de ramification. Par rapport à F, a s'appelle un point fondamental de ramification ou un *point fondamental* tout court.

Comme nous avons limité le problème d'inversion à un nombre fini de valeurs exceptionnelles : $a_1, a_2, \ldots, a_q$, il est naturel de considérer des surfaces qui admettent ces points et seulement ces points comme points fondamentaux. Les points de la surface qui se projettent en un de ces points fondamentaux a_ν peuvent être des points réguliers, ou des points critiques (algébriques ou transcendants), mais au moins l'un d'eux est point critique car autrement a_ν ne sera pas considéré comme point fondamental. Il pourra nous arriver cependant de considérer des points fondamentaux apparents, sur lesquels la surface ne possède que des points réguliers.

6. *Le réseau de Speiser-Nevanlinna.* — Les surfaces à un nombre fini de points fondamentaux sont susceptibles d'une représentation très commode introduite par A. Speiser et R. Nevanlinna (*), la représentation par *réseau* :

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_q$ les points fondamentaux de la surface supposée étalée sur la sphère de Riemann. Par ces points nous traçons une courbe de Jordan simple fermée L qui divise la sphère en deux régions D_1 et D_2 simplement connexes. Si nous coupons la surface sur toute son épaisseur le long de L, elle se décomposera en un nombre fini ou infini d'exemplaires D_1 et D_2. Nous considérons ces demi-feuillets D_1, D_2 comme des polygones: les points a_1, $a_2, \ldots, a_q$ en sont les sommets, et les arcs (a_1a_2), (a_2a_3), (a_qa_1) en sont les côtés.

Les sommets d'un polygone D_ν $(\nu = 1, 2)$ sont de trois sortes :

1° Points de ramification d'ordre infini, autour desquels s'échangent une infinité de feuillets $D_1 + D_2$;

2° Points de ramification d'ordre $m - 1$ autour desquels se permutent circulairement $m (> 1)$ feuillets $D_1 + D_2$;

(*) A. Speiser [1], R. Nevanlinna [3].

3° Sommets apparents qui appartiennent à deux demi-feuillets seulement et sont par suite des points réguliers de la surface.

Pour représenter la surface W, on se donne un nombre (fini ou infini) de polygones curvilignes D_ν^μ ($\nu = 1, 2$; $\mu = 1, 2, 3, \ldots$) topologiquement équivalent à D_ν c'est-à-dire possédant le même nombre de sommets. On place ensuite ces polygones D_ν^μ à l'intérieur d'un domaine plan simplement connexe, les uns à côté des autres, de manière à couvrir ce domaine une fois et sans lacune, et de manière que deux polygones D_1^μ, D_2^μ possèdent un côté $(a_i a_{i+1})$ en commun si et seulement si les demi-feuillets D_ν qui leur correspondent ont le côté image en commun. Nous obtenons de cette façon un *carrelage polygonal* qui indique comment les demi-feuillets D_ν doivent être reliés entre eux pour reconstituer la surface.

Les sommets intérieurs du carrelage sont ou bien des sommets apparents appartenant à deux polygones D_ν^μ seulement, ou bien des sommets d'ordre $m-1$, communs à m polygones D_1^μ et à m polygone D_2^μ. Les sommets d'ordre infini sont les points frontières du carrelage.

Nous prenons maintenant dans chaque polygone du carrelage un point intérieur ou *nœud* et relions ce nœud avec ceux des polygones voisins par q segments $S_{12}, S_{23}, \ldots, S_{q1}$ sans points communs, de sorte que $S_{\nu,\nu+1}$ traverse le côté $(a_\nu a_{\nu-1})$ pour aboutir au point nodal du polygone voisin limité à ce côté. Ainsi deux nœuds peuvent être reliés par plusieurs segments (au plus $q-1$), c'est ce qui arrive si les polygones correspondants ont plusieurs côtés en commun.

La figure obtenue, qui est la figure duale du carrelage, s'appelle le *réseau* ou l'*arbre topologique* de la surface.

Ce réseau partage le domaine plan en « *domaines élémentaires* » qui correspondent aux points de ramification (véritables ou apparents) de façon biunivoque : à un point de ramification d'ordre $m-1$ ($1 \leq m \leq \infty$) correspond un domaine élémentaire limité par $2m$ côtés. Pour $m = 1$, on a un « diangle » : il correspond à un point régulier de la surface qui se projette en un point fondamental a_ν. Pour $1 < m < \infty$, on a un vrai polygone fermé, un *domaine algébrique*. Les polygones ouverts, limités par un nombre infini de segments du réseau, s'appellent *domaines logarithmiques* de la surface.

Chaque nœud du réseau représente un demi-feuillet D_1 ou D_2 de la surface, limité par la courbe fermée L : on l'indique d'ordinaire par un rond ou une croix, selon qu'il s'agit d'un demi-feuillet D_1 ou d'un demi-feuillet D_2. De chaque nœud partent toujours q segments qui aboutissent à ν ($\nu \leq q$) nœuds voisins. A cause de l'existence des diangles, ν peut être inférieur à q. Si le nœud n'a que deux « voisins » : $\nu = 2$, on dit qu'il est non ramifié. Il est dit *ramifié*, s'il a plus de deux « voisins » : $\nu \geq 3$. La façon dont les nœuds sont reliés entre eux par les segments nous indique comment les différents demi-

feuillets sont reliés entre eux dans la surface. Réciproquement, si nous nous donnons les points fondamentaux et la courbe fermée L qui les relie, le réseau détermine la surface de façon unique.

En particulier, si l'on a une représentation conforme plane de la surface, on obtient sans peine le réseau : le carrelage est formé par l'ensemble des courbes-images de L, le réseau s'en déduit aisément. Mais cela ne nous intéresse pas ici, car nous voulons justement partir des surfaces définies topologiquement pour étudier leur fonction uniformisante. Toutefois cette remarque nous permet de construire, pour fixer les idées, le réseau des surfaces engendrées par quelques fonctions usuelles. Nous indiquons dans les figures qui suivent, le carrelage en pointillé et le réseau en trait plein.

La figure 1 *a* représente le réseau de la surface $w = z^2$. Le carrelage est composé de diangle de sommets $z = 0$ et $z = \infty$, qui sont les seuls points de ramification ici (d'ordre 1). Le réseau est un quadrilatère, dont l'intérieur et

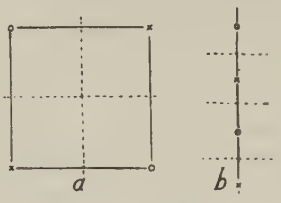

Fig. 1 *a* et 1 *b*.

l'extérieur sont les seuls domaines élémentaires et correspondent aux points de ramification mentionnés. On conçoit que toutes les fonctions rationnelles $R(u)$ du deuxième degré, telles que $R(u) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$, donnent naissance à des réseaux identiques à celui-ci. Seuls les deux points de ramification changent de place.

La figure 1 *b* représente le réseau de la surface logarithmique $w = e^z$. Les deux domaines logarithmiques correspondent aux deux points de ramification logarithmique en $w = 0$ et $w = \infty$.

La figure 2 représente le réseau de la surface $w = \sin z$. La surface a deux points de ramification logarithmique sur le même point fondamental $w = \infty$ et

Fig. 2.

une infinité de points de ramification d'ordre 1 sur les points $+1$ et -1. Le réseau a la forme d'une échelle.

La figure 3 représente le réseau de la surface engendrée par la fonction doublement périodique de Weierstrass $w = \mathfrak{p}(z)$. La surface n'a que des points de ramification algébrique d'ordre 1. Le réseau se compose de rectangles.

Fig. 3.

Enfin la figure 4 représente l'arbre « modulaire », c'est-à-dire le réseau de la surface engendrée par la fonction modulaire : c'est la surface de recouvrement universel du plan trois fois pointé. Contrairement aux cas précédents, cette surface est du type hyperbolique.

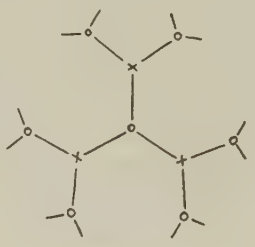

Fig. 4.

Une suite infinie de nœuds non ramifiés s'appelle d'après A. Speiser un bout logarithmique. Ainsi la surface $w = e^z$ se compose de deux bouts logarithmiques. En général si, abstraction faite d'un nombre fini de nœuds, le réseau se compose d'un nombre fini de tels bouts logarithmiques, la surface est dite à un nombre fini de bouts logarithmiques. La surface à un nombre fini de bouts périodiques sont les généralisations de celles-là.

7. Dans le cas d'une fonction rationnelle $R(z)$, le réseau est fermé. Ses domaines élémentaires, ses nœuds et ses segments forment sur la sphère de Riemann les faces, les sommets et les côtés d'un polyèdre, auquel nous pouvons appliquer la formule d'Euler : $K - S + E + 2 = 0$, où K, S et E représentent respectivement le nombre des côtés, des faces et des sommets.

Soit q le nombre de points fondamentaux, n le degré de $R(z)$, c'est-à-dire le nombre des racines de $R(z) = a$ et $n_1(a)$ le nombre des racines multiples, une racine d'ordre k étant comptée $k - 1$ fois. Le nombre de domaines élémentaires sur a, est alors $n - n_1(a)$. Le nombre de sommets ou nœuds est $2n$, celui des côtés ou segments est nq (car de chaque nœud partent q segments et chaque

segment aboutit à deux nœuds). Finalement on a

$$E = 2n, \qquad K = nq, \qquad S = \sum_{\nu=1}^{q} [n - n_1(a_\nu)] = nq - \sum_{\nu=1}^{q} n_1(a_\nu).$$

Mais la dernière somme $\sum_{1}^{q} n_1(a_\nu)$ est justement l'ordre total $\sum_{1}^{q} \lambda_i$ des points de ramification de la surface, de sorte que la formule d'Euler devient

$$\sum_{1}^{q} \lambda_i + 2 = 2n.$$

C'est la formule de Riemann-Hurwitz que nous aurons plus tard l'occasion d'employer.

8. *Les surfaces* W *à un nombre fini de bouts périodiques.* — Nous partons d'une fonction rationnelle $R(u)$ et formons la fonction méromorphe périodique

$$w = R(e^z).$$

L'inverse de cette fonction a deux points de ramification logarithmique (5) dont les traces sont $w = R(0)$ et $w = R(\infty)$. Si nous coupons la surface engendrée Φ_R, le long d'une courbe qui joint ces deux points de ramification logarithmique, la surface se partagera en deux demi-surfaces Φ', que nous appelons, d'après E. Ullrich (6), bouts périodiques. Les bouts logarithmiques correspondent au cas particulier $R(u) = u$.

Définition. — *Les surfaces* W *à un nombre fini de bouts périodiques sont celles qui, abstraction faite d'une partie compacte appelée noyau, sont formées d'un nombre fini de bouts périodiques.*

En particulier les surfaces $w = R(e^z)$ appartiennent à cette classe, de même que les surfaces à un nombre fini de bouts logarithmiques. La surface $R(e^z)$ ne possède qu'un nombre fini de points fondamentaux : ce sont, en dehors des points $R(0)$ et $R(\infty)$ qui peuvent coïncider, les points fondamentaux de la surface algébrique $w = R(z)$. Il en résulte que les surfaces W à un nombre fini de bouts logarithmiques n'ont aussi qu'un nombre fini de points fondamentaux et sont par suite susceptibles d'être représentées par un réseau. On peut alors les caractériser de la manière suivante (7) :

---

(5) On peut avoir $R(0) = R(\infty)$, les deux points de ramification logarithmique se projettent dans ce cas au même point fondamental.

(6) E. Ullrich [1].

(7) E. Ullrich [1].

Le réseau de W, *abstraction faite d'un noyau formé d'un nombre fini de nœuds, doit présenter un nombre fini de domaines logarithmiques, séparés les uns des autres par un nombre égal de bouts périodiques de nature quelconque* (*fig.* 6, 8 et 9).

D'après des critères de type connus ([8]), ces surfaces sont paraboliques. Comme nous verrons plus tard, le noyau fini n'a aucune importance dans la distribution des valeurs de la fonction uniformisante, seuls les bouts périodiques comptent. Nous allons les étudier de près.

Chaque bout périodique est la moitié d'une surface Φ_R : $w = R(e^z)$, dont le réseau est périodique. Chaque réseau périodique se déduit du réseau de la fonction rationnelle $R(u)$ de la manière suivante ([7]) :

Nous dessinons sur la sphère de Riemann le réseau de $R(u)$ composé d'un nombre fini de nœuds. Si les points $R(o)$ et $R(\infty)$ n'étaient pas déjà parmi les points fondamentaux de $R(u)$, nous marquons encore par des « diangles » les points réguliers de la surface qui se projettent aux points $R(o)$ et $R(\infty)$ considérés comme points fondamentaux apparents.

Nous déformons alors topologiquement la sphère de Riemann en un cylindre, les points zéro et ∞ (pôle nord et pôle sud) allant aux deux bouts. Si l'on roule ce cylindre sur le plan des z, il imprimera sur ce plan le réseau périodique de $R(e^z)$.

$R(u) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$. $w(z) = \sin z$.

Fig. 5.

De cette façon on obtient par exemple les réseaux de e^z et de $\sin z$ à partir des réseaux de

$$R(u) = u \qquad \text{et} \qquad R(u) = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \quad (\textit{fig.}\ 5).$$

9. Considérons maintenant une surface W avec m bouts périodiques. Nous désignons son réseau aussi par W. Entre deux bouts périodiques, nous avons un domaine logarithmique. Nous fixons autour du noyau un sens positif de rotation puis numérotons les bouts périodiques et les domaines logarithmiques de 1 à m, de manière que le $\nu^{\text{ième}}$ domaine logarithmique soit séparé du $(\nu+1)^{\text{ième}}$ par le $\nu^{\text{ième}}$ bout périodique (*fig.* 6).

Les nœuds du $\nu^{\text{ième}}$ bout qui se trouvent au bord du $\nu^{\text{ième}}$ domaine logarithmique seront dits nœuds frontières positifs de ce bout. Les nœuds frontières

([8]) H. Wittich [1].

négatifs du même bout seront ceux qui sont situés au bord du $(\nu+1)^{\text{ième}}$ domaine logarithmique. Chaque période d'un bout possède autant de nœuds que le réseau de la fonction rationnelle $R_\nu(u)$ correspondante, c'est-à-dire $2n_\nu$, si le

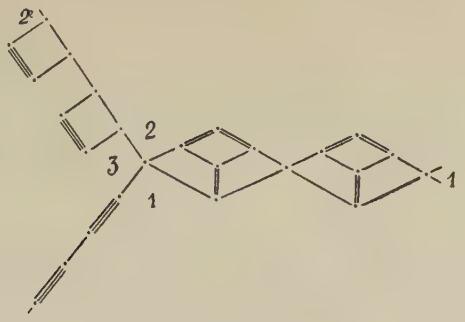

Fig. 6. — $n_1=3$, $d_1^+=1$, $d_1^-=2$; $\Delta=0$.

degré de R_ν est n_ν. Parmi ces $2n_\nu$ nœuds, soit $2d_\nu^+$ nœuds frontières positifs et $2d_\nu^-$ nœuds frontières négatifs (*fig.* 6). Les nombres d_ν^- et d_ν^- ne sont autres que l'ordre infinitésimal de $R_\nu(u)-R_\nu(\infty)$ et $R_\nu(u)-R_\nu(0)$ au voisinage de $u=\infty$ et $u=0$.

Par caractéristique de la surface W, nous désignons la quantité

$$\Delta=\left|\log\frac{d_1^-\,d_2^+\ldots d_m^+}{d_1^-\,d_2^-\ldots d_m^-}\right|.$$

Il est clair que Δ est indépendant de la numération des bouts périodiques.

10. Pour les surfaces à m bouts logarithmiques de R. Nevanlinna, l'ordre de la fonction uniformisante est $\frac{m}{2}$. H. Wittich a montré sur un exemple qu'il n'en est pas toujours ainsi pour les surfaces à m bouts périodiques (9). Au Chapitre V, nous préciserons ce fait en établissant le théorème suivant :

Théorème A. — *La fonction uniformisante d'une surface* W *à m bouts périodiques et de caractéristique* Δ *est du type moyen de l'ordre*

$$\lambda=\frac{m}{2}\left(1+\frac{\Delta^2}{m^2\pi^2}\right).$$

Pour $\Delta=0$, *les défauts et indices sont rationnels.*

Nous appliquons le dernier résultat au problème d'inversion posé et démontrons au Chapitre VII le théorème suivant :

(9) H. Wittich [2].

Théorème B. — *Sous les conditions*

1° $$\sum(\delta_\nu+\varepsilon_\nu)=2;$$

2° $$\delta_\nu,\quad \varepsilon_\nu \quad (\textit{rationnels});$$

3° $$\sum\delta_\nu\neq 0;$$

4° $$\delta_\nu+\varepsilon_\nu<1 \qquad \textit{si}\quad \varepsilon_\nu \textit{ n'est pas nul;}$$

on peut résoudre le problème d'inversion à l'aide des surfaces W *de caractéristique nulle :* $\Delta=0$.

Nous soulignons le fait que la restriction 4° tient à la périodicité des bouts et non à la condition $\Delta=0$.

Le cas $\Sigma\delta_\nu=0$, $\varepsilon_\nu<1$ peut être résolu à l'aide des fonctions doublement périodiques.

Finalement le théorème B est complété par le théorème suivant :

Théorème C. — *On peut choisir les bouts périodiques utilisés dans le théorème* B *de manière que chaque bout possède trois points fondamentaux de ramification.*

Pour démontrer ces théorèmes, nous devons quitter un moment le champ des transformations conformes pour passer à une classe de transformations plus générales, les *transformations quasi conformes* utilisées par ailleurs avec succès dans le problème de type.

CHAPITRE III.

Les transformations quasi conformes.

11. Un domaine des $z=x+iy$ est appliqué de façon biunivoque sur un domaine des $w=u+iv$, par une transformation

$$u=u(x,y)\,v=v(x,y),$$

supposée continuement différentiable, sauf peut-être en des points et des lignes isolés. Un cercle infinitésimal devient une ellipse infinitésimale, dont le rapport des axes est

$$D=D_{w/z}=\max\left|\frac{dw}{dz}\right| : \min\left|\frac{dw}{dz}\right| = K+\sqrt{K^2-1},$$

avec

$$K=\frac{1}{2}\,\frac{u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2}{|u_xv_y-v_xu_y|}.$$

$D_{w/z}$ s'appelle le *coefficient de dilatation* de la transformation au point z. On vérifie facilement que $D_{w/z}$ possède les propriétés suivantes :

$$D_{w/z} \geqq 1 \qquad (\equiv 1 \text{ seulement pour les transf. conformes});$$

$$D_{w/z} = D_{z/w};$$

$$D_{w/z} \leqq D_{w/s} D_{s/z} \qquad (= D_{s/z}, \text{ si } D_{w/s} \equiv 1). \tag{3}$$

La parenthèse exprime le fait que le cœfficient de dilatation est invariant par rapport aux transformations conformes. Enfin, soient $d\sigma_z$ et $d\sigma_w$ les éléments de surface des plans des z et des w. En utilisant l'égalité

$$\frac{d\sigma_w}{d\sigma_z} = \max\left|\frac{dw}{dz}\right| \cdot \min\left|\frac{dw}{dz}\right|,$$

on établit aisément la double inégalité

$$\frac{1}{D}\frac{d\sigma_w}{d\sigma_z} \leqq \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \leqq D\frac{d\sigma_w}{d\sigma_z},$$

qui remplace l'égalité $\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \frac{d\sigma_w}{d\sigma_z}$ des transformations conformes.

12. Une telle transformation est dite *quasi conforme*, si le coefficient de dilatation reste inférieur à un nombre fixe. L'importance de ces transformations dans le problème de type des surfaces de Riemann résulte du théorème suivant ([10]) :

THÉORÈME 1. — *Si l'on a une application biunivoque du cercle unité* $|z| < 1$ *sur le plan fini* $w \neq \infty$, *alors nécessairement l'intégrale*

$$\int_{|z|<1} D_{w/z}\, d\sigma_z$$

diverge.

En particulier, $D_{w/z}$ ne peut être borné. Il s'ensuit, en tenant compte de (3), que le type d'une surface de Riemann est invariant par une transformation quasi conforme ([11]).

Mais ces transformations peuvent parfois être utilisées pour étudier la distribution des valeurs de la fonction uniformisante, dans le cas parabolique. On a le théorème suivant ([12]) :

THÉORÈME 2. — *Le plan fini des* z *étant appliqué sur le plan fini des* w, *si l'intégrale*

$$\int (D_{w/z} - 1)\frac{d\sigma_z}{|z|^2} \tag{4}$$

([10]) O. TEICHMÜLLER [1], LE VAN-THIEM [1].

([11]) M. LAWRENTIEFF [1].

([12]) O. TEICHMÜLLER [1].

converge, alors il existe une constante γ *telle que*

$$|w(z)| = \gamma |z| [1 + \varepsilon(z)],$$

où $\varepsilon(z)$; *pour* $z \to \infty$, *tend uniformément vers zéro.*

Nous appelons une telle transformation *presque conforme*. D'une façon générale, nous pouvons parler d'une application presque conforme d'une surface de Riemann du type parabolique sur le plan fini des z, si l'intégrale ci-dessus converge.

13. Supposons maintenant qu'une surface parabolique W est appliquée, d'une part *conformément* sur le plan des ζ, $(\zeta = \rho e^{i\theta})$, d'autre part *presque conformément* sur le plan des z, $(z = re^{i\varphi})$, il en résulte une application presque conforme du plan des ζ sur le plan des z. Un cercle $|z| = r = \text{const.}$ est transformé en une courbe

$$\rho = \gamma r [1 + \varepsilon(r, 0)],$$

ou, à une homothétie près,

$$\rho = r[1 + \varepsilon(r, 0)], \tag{5}$$

où $\varepsilon(r, 0)$ tend uniformément vers zéro, pour $r \to \infty$.

Marquons alors les images d'un point donné de la surface aussi bien dans le plan des z que dans le plan des ζ. Le nombre de ces points-images sera, d'après (5), asymptotiquement le même dans le cercle $|z| < r$ ou dans le cercle $|\zeta| < r$. Il en résulte qu'on peut évaluer les quantités $N(r, a)$, $N_1(r, a)$ et $T(r)$ aussi bien dans le plan des z que dans le plan des ζ.

Notre prochain objectif est donc d'obtenir une application plane et presque conforme des surfaces étudiées au Chapitre II.

CHAPITRE IV.

Une application plane et quasi conforme des surfaces a m bouts périodiques.

14. Soit W une surface de recouvrement du plan des w, avec m bouts périodiques Φ'_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$.

Nous commençons par séparer chaque bout Φ'_ν du noyau, en le coupant le long d'une courbe C_ν reliant les deux points de ramification logarithmique correspondants. Pour simplifier les calculs futurs, nous choisissons C_ν de sorte qu'elle se termine en des points critiques par un segment de droite de longueur supérieure à un nombre fixe δ (*fig.* 7).

Nous complétons la demi-surface Φ' ainsi extraite en une surface Φ_R

$$w(z) = R(e^z),$$

puis nous appliquons conformément cette surface sur le plan des z, $(z = x + iy = re^{i\varphi})$. La courbe C_ν devient une courbe Γ possédant deux

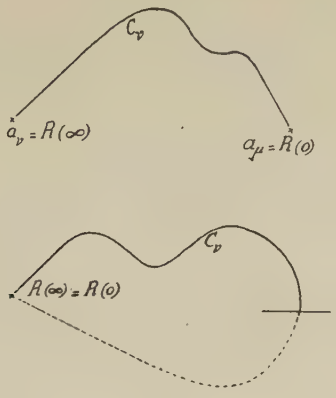

Fig. 7.

branches asymptotiques ([13]) dirigées respectivement dans la direction positive et négative de l'axe des x (*fig.* 8).

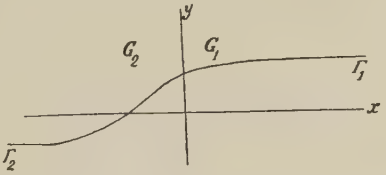

Fig. 8. — $G = G_1 + G_2$, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Nous pouvons supposer que l'image de la demi-surface Φ' soit le domaine situé au-dessus de la courbe Γ. L'axe des y divise G en deux parties, G_1 à droite et G_2 à gauche. Soient Γ_1 et Γ_2 les parties correspondantes de Γ. Ceci suppose que Γ ne rencontre l'axe des y qu'en un point, ce qu'on peut toujours obtenir par un choix convenable de la courbe C. Du reste cette précaution est même inutile puisque nous nous intéressons seulement à ce qui se passe en dehors d'un cercle fini.

15. Nous voulons maintenant, par une transformation quasi conforme spéciale, appliquer G_1 sur le premier quadrant du plan des $\zeta = \xi + i\eta$

$$\xi \geqq 0, \qquad \eta \geqq 0.$$

([13]) Ceci résulte de l'équation (6) écrite plus loin.

Γ_1 est l'image d'un arc de la coupure C, qui se termine par un segment rectiligne en un point de ramification logarithmique a_ν. Par une transformation linéaire, renvoyons a_ν à l'infini, de manière que le segment rectiligne devienne l'axe positive réel des w. On a alors entre w et z une relation de la forme

$$(6) \qquad w(z) = R_\nu(e^z) = \frac{a_n e^{nz} + \ldots + a_0}{b_{n-d^+} e^{(n-d^+)z} + \ldots + b_0} \qquad [a_n,\ b_{n-d^+} \neq 0].$$

Par la condition $0 \leq \Im z = y < 2\pi$, nous fixons une branche de la fonction inverse et l'arc Γ_1 est, abstraction faite d'une partie finie au début, défini par l'équation

$$(7) \qquad \arg w(z) = 0.$$

L'arc Γ_1 est bien asymptote à la droite

$$y = -\frac{1}{d^+} \arg \frac{a_n}{b_{n-d^+}}.$$

Sur elle, l'argument φ de z est, pour r suffisamment grand, une fonction biunivoque de r

$$\varphi = \varphi^*(r) \to 0.$$

Si nous posons alors

$$(8) \qquad \rho = \frac{1}{d^+} \log |w(z)|,$$

à chaque point M de la courbe, extérieur à un cercle de rayon suffisamment grand, correspondra de façon biunivoque une valeur bien déterminée de ρ, qui sera par suite aussi une fonction biunivoque de r [14]

$$\rho = \rho(r, \varphi) = \rho^*(r) \to r.$$

Nous définissons alors l'application quasi conforme en question par

$$(9) \qquad \begin{cases} \rho = r - \dfrac{r - \rho^*(r)}{\varphi^*(r) - \dfrac{\pi}{2}} \left(\varphi - \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \theta = \varphi - \dfrac{\varphi^*(r)}{\varphi^*(r) - \dfrac{\pi}{2}} \left(\varphi - \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

En utilisant les équations (6) et (7), on vérifie aisément que l'intégrale

$$(10) \qquad \iint_{\substack{\xi \leq 0 \\ \eta \leq 0}} (D_{z/\zeta} - 1) \frac{d\xi\, d\eta}{|\zeta|^2}$$

converge [15].

---

[14] d^+ n'est autre que la distance logarithmique du point courant M au point de ramification logarithmique a_ν correspondant. Cette signification géométrique de ρ est importante pour les raccordements ultérieurs.

[15] Ceci a son explication naturelle dans le fait que la transformation (9) se rapproche à l'infini asymptotiquement de l'identité.

Par la transformation (9) le domaine G_1 devient le premier quadrant $\xi \geqq 0$, $\eta_1 \geqq 0$. Un point d'ordonnée y sur l'axe positif des y a pour image un point d'ordonnée égale $\eta_1 = y$ de l'axe positif des η_1. A un point sur Γ_1 de paramètre ϱ [*voir* (8)] correspond un point d'abscisse $\xi = \varrho$ de l'axe positif des ξ.

De la même façon nous appliquons le domaine G_2 quasi conformément sur le deuxième quadrant $\xi \leqq 0$, $\eta_1 \geqq 0$. Puis nous raccordons les deux quadrants le long de l'axe positif des η_1, en un demi-plan H. Sur l'axe négatif des ξ nous avons au lieu de (8) la relation

$$\varrho = \frac{1}{d^-} \log |w(z)|, \tag{11}$$

où d^- et $w(z)$ se rapportent à l'autre point de ramification logarithmique du bout périodique Φ'_ν considéré.

Pour simplifier l'écriture nous avons supprimé les indices dans les calculs précédents : en réalité, il fallait lire, dans les formules (6), (11), z_ν, x_ν, y_ν, r_ν, φ_ν, ζ_ν, ξ_ν, η_ν, ϱ_ν, θ_ν, d_ν^+, d_ν^- au lieu de z, x, y, ..., d^-. C'est ce que nous faisons désormais.

16. Nous appliquons de cette manière quasi conformément chaque bout périodique Φ'_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) sur un demi-plan H_ν. Les coupures C_ν sont supposées choisies de telle sorte que les bouts périodiques, abstraction faite d'un noyau fini compact, forment la surface entière (*fig.* 9).

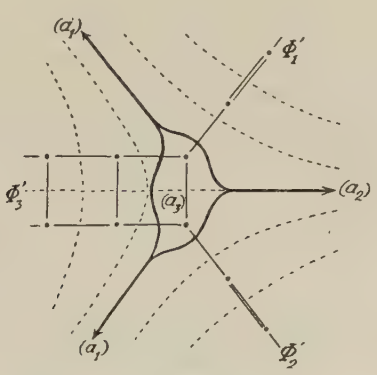

Fig. 9.

Nous représentons alors chaque demi-plan H_ν sur un domaine angulaire H_ν d'ouverture $\frac{2\pi}{m}$ par la transformation conforme

$$\left| \begin{aligned} r' &= \left(\frac{d_1^+ d_2^- \ldots d_\nu^+}{d_1^- d_2^- \ldots d_{\nu-1}^-} \right)^{\frac{2}{m}} \varrho_\nu^{\frac{2}{m}}, \\ \varphi' &= \frac{2}{m} \theta_\nu + (\nu - 1) \frac{2\pi}{m}. \end{aligned} \right. \tag{12}$$

avec

$$\zeta_\nu = \rho_\nu e^{i\theta_\nu}, \qquad z' = r' e^{i\varphi'} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

Il en résulte une application de la surface W sur le plan des z' : elle est, d'après (8) et (11), partout continue, sauf sur la coupure $\varphi' = 0$. A un point $x^+ = r'$ du bord supérieur correspond un point

$$x^- = \left(\frac{d_1^+ d_2^+ \ldots d_m^+}{d_1^- d_2^- \ldots d_m^-}\right)^{\frac{2}{m}} r' = e^{\frac{2\varepsilon\Delta}{m}} r', \tag{13}$$

du bord inférieur, ε étant égal à $+1$ ou -1, selon que la parenthèse ci-dessus est plus grande ou plus petite que l'unité.

Si à ce plan des z' coupé le long du rayon $\varphi' = 0$, nous appliquons la transformation

$$z' = z^{1+\frac{\varepsilon\Delta i}{m\pi}} \begin{cases} r' > 1, & 0 < \varphi' < 2\pi, \\ r > e^{\frac{2\varepsilon\Delta}{m}}, & \dfrac{\varepsilon\Delta \log r}{m\pi} < \varphi < 2\pi + \dfrac{\varepsilon\Delta \log r}{m\pi}, \end{cases} \tag{14}$$

alors au couple de points $z' = r'$ et $z' = e^{\frac{2\varepsilon\Delta}{m}} r'$ liés par la relation (13) correspond au seul point $z = r$.

La transformation (14) est singulière à l'origine, aussi avons-nous exclu le cercle-unité du plan des z'. Mais ceci ne joue aucun rôle dans l'application des théorèmes 1 et 2 du Chapitre III.

17. La représentation (quasi conforme) de la surface W sur le plan du z est, par conséquent, continue en dehors d'un certain cercle. Nous voulons montrer qu'elle est presque conforme dans le sens du théorème 2, Chapitre III. Étant donné l'invariance du coefficient de dilatation par rapport aux transformations conformes [*voir* (3)], on a

$$D_{w/z} = D_{z_\nu \zeta_\nu},$$

car les transformations $w \to z_\nu$, $\zeta_\nu \to z'$ et $z' \to z$ sont conformes. Nous pouvons par suite écrire

$$\begin{aligned} \int (D_{w/z} - 1) \frac{d\sigma_z}{|z|^2} &= \int (D_{w/z} - 1) \left|\frac{d\log z}{d\log z'}\right|^2 \frac{d\sigma_{z'}}{|z'|^2} \\ &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2\pi^2}\right)^{-1} \int (D_{w/z} - 1) \frac{d\sigma_{z'}}{|z'|^2} \\ &= \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2\pi^2}\right)^{-1} \sum_{\nu=1}^{m} \iint_{\Pi_\nu} (D_{z_\nu/\zeta_\nu} - 1) \left|\frac{d\log z'}{d\log \zeta_\nu}\right|^2 \frac{d\xi_\nu\, d\eta_\nu}{|\zeta_\nu|^2} \\ &= \frac{4}{m^2} \left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2\pi^2}\right)^{-1} \sum_{\nu=1}^{m} \iint_{\Pi_\nu} (D_{z_\nu/\zeta_\nu} - 1) \frac{d\xi_\nu\, d\eta_\nu}{|z|^2} < \infty. \end{aligned}$$

Les dernières intégrales sous le signe de sommation sont en effet, d'après (10)

convergentes. D'après les théorèmes 1 et 2 (Chap. III) nous pouvons conclure que la surface W est de type parabolique et évaluer les quantités $N(r, a)$, $N_1(r, a)$, $T(r)$ de la fonction uniformisante dans le plan des z, son image presque conforme.

CHAPITRE V.

Ordre de croissance de la fonction uniformisante $w(z)$.

18. L'ordre de croissance λ de la fonction $w(z)$ est défini par

$$\lambda = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r)}{\log r}.$$

A un cercle $|z| = r$ du plan des z, correspond dans le plan des z' d'après (14) un arc de spirale situé entre les cercles

$$|z'| = r^{\alpha} \qquad \text{et} \qquad |z'| = e^{\frac{\varepsilon\Delta}{m^2\pi}} r^{\alpha}, \tag{15}$$

avec

$$\alpha = 1 + \frac{\Delta^2}{m^2\pi^2}.$$

De l'autre côté, à un cercle $|z'| = r'$ correspondent, selon (12), m demi-cercles des m demi-plans Π_ν ($\nu = 1, \ldots, m$) dont le rayon est

$$|\zeta_\nu| = \rho_\nu = \frac{d_1 d_2 \ldots d_{\nu-1}}{d_1^2 d_2^2 \ldots d_\nu^2} r'^{\frac{m}{2}}. \tag{16}$$

A un cercle $|\zeta_\nu| = \rho_\nu$ correspond de nouveau dans le plan des z_ν ([16]), image conforme de la surface $R_\nu(e^w)$ d'après (9), une courbe qui se confond asymptotiquement avec le cercle $|z_\nu| = \rho_\nu$. Pour les fonctions périodiques $w = R_\nu(e^w)$ la fonction caractéristique $T_\nu(r)$ est asymptotiquement égale à

$$T_\nu(r) \cong \frac{n_\nu}{\pi} r.$$

Autrement dit le nombre de points images d'un point $w = a$ contenus dans le cercle $|z_\nu| \leq r_\nu \sim \rho_\nu$ est en général, c'est-à-dire sauf pour un nombre fini de valeurs a, asymptotiquement égal à $\frac{n_\nu}{\pi} r$, où n_ν est le degré de R_ν. Donc en général on a pour la fonction uniformisante $w(z)$ des surfaces W

$$B r^{\frac{m}{2}\alpha} < n(r, a) < A r^{\frac{m}{2}\alpha}, \tag{17}$$

([16]) Nous avons supprimé plus haut, dans les nos 14 et 15 les indices ν pour ne pas encombrer l'écriture.

où les constantes A et B ne dépendent que des quantités n_v, d_v^+, d_v^-, m et Δ. Par intégration on obtient

$$\frac{2}{m\alpha} Br^{\frac{m}{2}\alpha} < N(r, a) < \frac{2}{m\alpha} Ar^{\frac{m}{2}\alpha}. \tag{18}$$

Comme ceci vaut pour presque tous les a, on a aussi

$$\frac{2}{m\alpha} Br^{\frac{m}{2}\alpha} < T(r) < \frac{2}{m\alpha} Ar^{\frac{m}{2}\alpha},$$

d'où nous concluons que

Théorème A. — *La fonction uniformisante d'une surface* W *à m bouts périodiques et de caractéristique* Δ *est du type moyen de l'ordre*

$$\lambda = \frac{m}{2}\alpha = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{\Delta^2}{m^2\pi^2}\right). \tag{19}$$

Il sera démontré plus tard que dans le cas $\Delta = 0$, défauts et indices sont rationnels.

19. Nous comprenons maintenant pourquoi l'ordre de la fonction uniformisante des surfaces à m bouts périodiques peut dépasser la valeur $\frac{m}{2}$ que possède toujours l'ordre de l'uniformisante des surfaces à m bouts logarithmiques (*fig.* 10).

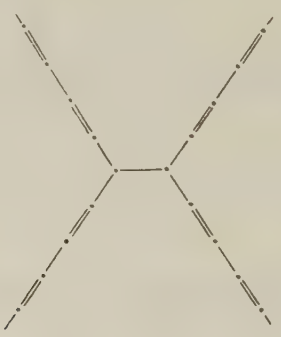

Fig. 10.

Dans ce dernier cas, on a en effet

$$d_1^+ = d_1^- = \ldots = d_m^+ = d_m^- = 1,$$

et la caractéristique Δ est toujours nulle

$$\Delta = 0, \qquad \lambda = \frac{m}{2}.$$

Une autre classe de surfaces à bouts périodiques où la caractéristique est toujours nulle, est celle des surfaces périodiques $R(e^z)$ caractérisée en particulier par

$$m=2, \qquad d_1^+=d_2^-=d_1, \qquad d_1^-=d_1^-=d_2^+=d_2,$$

de sorte que l'on a

$$\Delta=0, \qquad \lambda=1 \quad (\textit{fig. 11}).$$

Fig. 11. — Surface W : $d_1=1, \quad d_2=2, \quad n=2$.

Si nous remplaçons une moitié du réseau de $R(e^z)$ par sa symétrique comme l'indique la figure 12, nous obtenons une autre surface W′ avec ([17])

$$m=2, \qquad d_1^+=d_2^+=d_1, \qquad d_1^-=d_2^-=d_2$$

et par suite

$$\Delta=\left|\log\frac{d_1^2}{d_2^2}\right|, \qquad \lambda=1+\left(\frac{\log d_1-\log d_2}{\pi}\right)^2.$$

Fig. 12. — Surface W′.

Ici l'ordre s'est rehaussé, parce que nous avons détruit certaine symétrie axiale de la surface. En général nous pouvons dire que l'élévation de l'ordre au delà de la valeur mimale $\frac{m}{2}$ est causée par une structure dyssymétrique de la surface (au point de vue de la symétrie axiale).

Les racines de $w(z)=a$ sont partagées en groupes de manière que les points d'un groupe se répartissent asymptotiquement le long d'une spirale

$$r=e^{\frac{\Delta}{2\pi}z+z_0} \qquad (\textit{fig. 13}).$$

La courbure K au point $z=r$ de la courbe est d'autant plus forte que Δ est plus grand

$$K=\frac{1}{r}\left(1+\frac{m^2\pi^2}{\Delta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette distribution en spirales logarithmiques nous rappellent les considé-

([17]) H. Wittich, [2]. Nous appelons une telle opération une antisymétrisation.

rations sur lesquelles A. Denjoy ([18]) s'est appuyé pour émettre l'hypothèse, démontrée plus tard par L. Ahlfors, que si une fonction entière possède m chemins asymptotiques différentes, son ordre est supérieur ou égal à $\frac{m}{2}$.

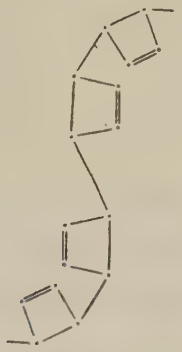

Fig. 13.

Supposons en plus que ces m chemins soient asymptotiquement des spirales

$$r = e^{M(\overline{\varphi}-\varphi_\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m),$$

alors en utilisant des transformations analogues à (14) nous pouvons préciser que l'ordre est supérieur à

$$\frac{m}{2}(1 + M^{-2}).$$

20. Enfin, nous allons montrer sur un exemple que ce rehaussement de l'ordre par la dyssymétrie est en étroite relation avec le fait bien connu que l'introduction d'une dyssymétrie dans la structure topologique d'une surface peut provoquer le passage du type parabolique au type hyperbolique ([19]).

Considérons pour cela le réseau des surfaces de la famille

$$W_n : R(e^z) = \left(1 + \frac{e^z}{n}\right)^n,$$

réseau formé d'une chaîne de domaines algébriques d'ordre n, attachés à la frontière d'un domaine logarithmique (*fig.* 11, pour $n = 2$). Ici on a

$$d_1 = 1, \qquad d_2 = n.$$

Par « antisymétrisation » nous obtenons une surface W'_n avec $m = 2$, $\Delta = \log n^2$ (*fig.* 12 et 13). L'ordre de la fonction uniformisante est, d'après (19),

$$\lambda = 1 + \left(\frac{\log n}{\pi}\right)^2.$$

([18]) A. Denjoy [1], L. Ahfors [2].

([19]) P. J. Myrberg [1], C. Blanc [1].

Tant que n (c'est-à-dire aussi l'ordre λ) reste fini, la surface W'_n appartient au type parabolique. Mais à la limite

$$n \to \infty, \quad R(e^z) \to e^{e^z}, \quad W_n \to W_\infty,$$

la surface « antisymétrique » W'_∞ devient hyperbolique, bien que la surface W_∞

Fig. 14. — Surface W_∞ : e^{e^z}.

soit parabolique (*fig.* 14 et 15). La démonstration se fait comme pour n fini, seulement à la place de (14), on aura une transformation de la forme

$$z = f(z'),$$

où $|z|$ tend vers une valeur finie R, quand $|z'|$ augmente indéfiniment [20]. Les spirales considérées plus haut se rapprochent maintenant asymptotiquement du cercle $|z| = R$ (*fig.* 15).

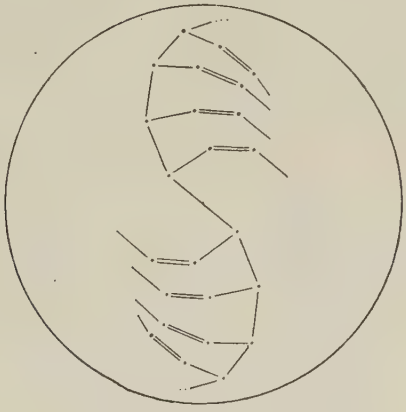

Fig. 15. — Surface W'_∞.

Ainsi la distribution en spirale explique ici comme plus haut l'influence de la dyssymétrie sur l'uniformisation de la surface. En même temps nous voyons que l'importance revient plutôt à la symétrie axiale. C'est elle qui empêche dans

---

[20] C. Blanc [1].

les exemples cités la distribution en spirale, dont la conséquence est, soit le rehaussement de l'ordre de croissance de l'uniformisante, soit le passage au type hyperbolique. Évidemment dans les exemples intervient encore la périodicité, qui a le même effet que la symétrie axiale. Mais il est facile de fabriquer des exemples où le premier facteur (périodicité) est éliminé, pour mettre en évidence le rôle du dernier.

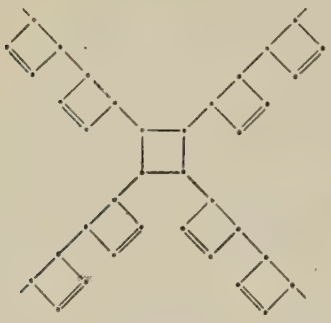

Fig. 16 *a*.

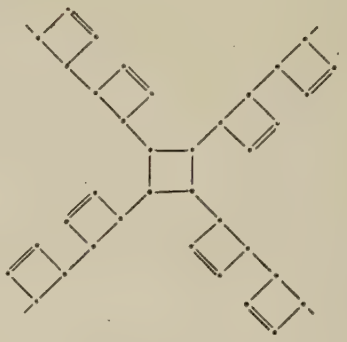

Fig. 16 *b*.

Ainsi, bien que le réseau 16 *b* se déduise du réseau 16 *a* simplement par la substitution d'une symétrie centrale à une symétrie axiale, l'ordre de l'uniformisante de 16 *b* est $1+\left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^2$ fois plus grand que celui de l'uniformisante

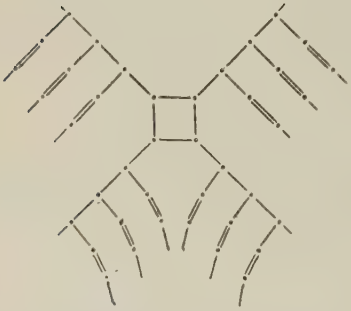

Fig. 17 *a*.

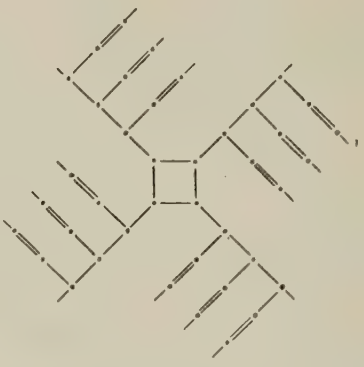

Fig. 17 *b*.

de 16 *a*. Il en est de même pour les surfaces 17 *a* et 17 *b* qui sont, l'une parabolique, l'autre hyperbolique.

CHAPITRE VI.

Défauts et indices dans le cas $\Delta = 0$.

21. Nous voulons établir dans ce chapitre quelques propositions concernant la fonction uniformisante $w(z)$ dans le cas $\Delta = 0$, dont nous aurons besoin pour la résolution du problème d'inversion.

La relation (14) s'écrit ici $z' = z$ et à un cercle $|z| \leq r$ correspondent d'après (16) m demi-cercles

$$\zeta_i \leq \frac{d_1^- d_2^- \dots d_{i-1}^-}{d_1^- d_2^- \dots d_i^-} r^{\frac{m}{\alpha}} \qquad (i = 1, \dots, m),$$

des m demi-plans H_i

$$\zeta_i = \xi_i + i\eta_i, \qquad \eta_i \geq 0.$$

Il s'ensuit que les doubles inégalités (17) et (18) du chapitre précédent peuvent être remplacées par des égalités asymptotiques ([21])

$$n(r, a) \cong B r^{\frac{m}{\alpha}},$$
$$N(r, a) \cong B r^{\frac{m}{\alpha}}.$$

En particulier le rapport $\frac{n(r, a)}{N(r, a)} = \frac{m}{\alpha}$ est indépendant aussi bien du rayon r que de la valeur a. Par suite, pour calculer $\delta(a)$ et $\varepsilon(a)$, nous pouvons considérer les quantités $n(r, a)$, $n_1(r, a)$ à la place de $N(r, a)$, $N_1(r, a)$.

Si l'on désigne alors par $\delta'(a)$, $\varepsilon'(a)$ les défauts et indices de a relativement à $R_i(e^z)$, on aura relativement à $w(z)$

$$(30) \quad \begin{cases} \delta(a) = \dfrac{n_1 \dfrac{1}{d_1^-} \delta^1(a) + \dots + n_m \dfrac{d_1^- d_2^- \dots d_{m-1}^-}{d_1^- d_2^- \dots d_m^-} \delta^m(a)}{n_1 \dfrac{1}{d_1} \quad + \dots + n_m \dfrac{d_1^- d_2^- \dots d_{m-1}^-}{d_1^- d_2^- \dots d_m^-}}, \\ \varepsilon(a) = \dfrac{n_1 \dfrac{1}{d_1^-} \varepsilon^1(a) + \dots + n_m \dfrac{d_1^- d_2^- \dots d_{m-1}^-}{d_1^- d_2^- \dots d_m^-} \delta^m(a)}{n_1 \dfrac{1}{d_1^-} \quad + \dots + n_m \dfrac{d_1^- d_2^- \dots d_{m-1}^-}{d_1^- d_2^- \dots d_m^-}}. \end{cases}$$

On peut obtenir les quantités δ' et ε' relatives à la fonction périodique $R_i(e^z)$ en calculant les défauts et indices « relatifs » à chaque période, ce que l'on peut faire en étudiant le réseau de la surface fermée engendrée par la fonction rationnelle $R_i(u)$.

([21]) Il en résulte qu'on peut préciser que pour $\Delta = 0$ la fonction caractéristique est à croissance régulière (*voir* G. Valiron [2]).

Le degré de R_i est n_i. A un point fondamental ([22]) a_ν correspondent, dans la surface fermée $R_i(u)$, un certain nombre de points réguliers ou critiques algébriques. Un tel point apporte une contribution au défaut ou à l'indice de a_ν selon qu'il devient ou non un point critique logarithmique quand on passe de $R_i(u)$ à $R_i(e^z)$. Le premier cas se présente seulement pour $a_\nu = R_i(\infty)$ ou $R_i(0)$ et nous avons appelé l'ordre ([23]) du point considéré $d_i^+ - 1$ ou $d_i - 1$: l'apport au défaut $\delta^i(a_\nu)$ est alors $\frac{d_i^\pm}{n_i}$. Dans le second cas l'apport à l'indice $\varepsilon^i(a_\nu)$ est égal à l'ordre divisé par n_i, de sorte que si nous appelons e_ν la somme des ordres (ou l'ordre total) des points de la seconde espèce, nous aurons

$$(21)\quad \begin{cases} \varepsilon^i(a_\nu) = \dfrac{e_\nu}{n_i}, & \delta^i(a_\nu) = 0 & \text{si } a_\nu \neq R(\infty) \text{ et } R(0), \\ \varepsilon^i(a_\nu) = \dfrac{e_\nu}{n_i}, & \delta^i(a_\nu) = \dfrac{d_i^+}{n_i} & \text{si } a_\nu = R(\infty) \neq R(0), \\ \varepsilon^i(a_\nu) = \dfrac{e_\nu}{n_i}, & \delta^i(a_\nu) = \dfrac{d_i^-}{n_i} & \text{si } a_\nu = R(0) \neq R(\infty), \\ \varepsilon^i(a_\nu) = \dfrac{e_\nu}{n_i}, & \delta^i(a_\nu) = \dfrac{d_i^+ + d_i^-}{n_i} & \text{si } a_\nu = R(\infty) = R(0). \end{cases}$$

22. En particulier les δ^i et ε^i sont rationnels. D'après (20) il en est de même pour δ et ε; c'est le complément au théorème A.

Si nous écrivons $\delta^i(a_\nu)$ sous la forme $\delta^i(a_\nu) = \frac{d_\nu}{n_i}$, la différence $n_i - (d_\nu + e_\nu)$ est égale au nombre des points de ramification sur a_ν qui apportent une contribution à e_ν : donc elle ne s'annule que si e_ν est nul. Il s'ensuit que la somme $\delta^i(a_\nu) + \varepsilon^i(a_\nu)$ est inférieure à 1, si $\varepsilon^i(a_\nu)$ est positif. D'après (20) ceci vaut aussi pour la somme $\delta(a_\nu) + \varepsilon(a_\nu)$:

$$(22)\qquad \delta(a_\nu) + \varepsilon(a_\nu) \leq 1, \qquad < 1 \quad \text{si } \varepsilon(a_\nu) \neq 0.$$

Si l'on fait la somme pour tous les a_ν on a

$$\sum_{\nu=1} \delta^i(a_\nu) + \sum_\nu \varepsilon^i(a_\nu) = \frac{\sum e_\nu + d_i + d_i}{n_i} = \frac{2n_i}{n_i} = 2,$$

car la somme $\sum_\nu e_\nu + d_i^+ + d_i^-$ n'est autre que la somme des ordres de tous les points de ramification de la surface plus 2, ce qui fait bien $2n_i$ d'après la relation de Riemann-Hurwitz. On conclut, comme plus haut, la même chose

([22]) Point fondamental par rapport à $w(z)$. Mais a_ν peut être pour $R_i(u)$ seulement un point fondamental apparent, sur lequel $R_i(u)$ n'a que des points réguliers.

([23]) L'ordre de multiplicité est défini de manière qu'un point régulier soit d'ordre nul. Il est égal à ordre infinitésimal diminué d'une unité.

pour δ et ε

$$\sum_{\nu=1}^{q}\delta(a_\nu)+\sum_{1}^{q}\varepsilon(a_\nu)=2. \tag{23}$$

Nous écrivons finalement la relation évidente

$$\sum_{\nu}\delta(a_\nu)\neq 0. \tag{24}$$

Par la démonstration du théorème B, nous montrerons que les nombres rationnels

$$\delta_\nu=\delta(a_\nu), \qquad \varepsilon_\nu=\varepsilon(a_\nu) \qquad (\nu=1,\ \ldots,\ q)$$

ne sont pas reliés entre eux par aucune autre relation que (22), (23) et (24).

23. Si l'on a, pour tous les bouts périodiques Φ_i' de la surface W,

$$d_i^+=d_i^-=d_i \qquad (i=1,\ \ldots,\ m),$$

alors la condition $\Delta=0$ est automatiquement remplie et les formules (20) se simplifient en devenant

$$\left\{\begin{aligned}\delta(a)&=\frac{l_1\delta^1(a)+\ldots+l_m\delta^m(a)}{l_1+\ldots+l_m},\\ \varepsilon(a)&=\frac{l_1\varepsilon^1(a)+\ldots+l_m\varepsilon^m(a)}{l_1+\ldots+l_m},\end{aligned}\right. \tag{25}$$

où l'on a posé

$$l_i=\frac{n_i}{d_i}, \tag{26}$$

et l_i ne dépend que du bout considéré. Nous disons que le bout est de caractéristique nulle et appelons l_i sa longueur réduite. Il n'est pas possible de résoudre le problème d'inversion posé rien qu'avec de tels bouts, mais les formules (25) peuvent être généralisées au moyen de la notion de « surfaces de composition ».

Surfaces de composition. — Soit W_1 et W_2 deux surfaces de caractéristique nulle possédant chacune un point de ramification logarithmique sur le même point fondamental a_ν. Nous coupons chacune d'elles le long d'une ligne partant du point de ramification en question pour aboutir à un point intérieur de la surface, et telle que la trace sur le plan des w soit la même dans les deux cas.

Si nous relions alors les bords libres en croix, nous obtenons une surface W qui est aussi de caractéristique nulle : nous disons que W_1 et W_2 sont associables et écrivons

$$W=W_1+W_2.$$

Pour chaque surface partielle W_i et par rapport au point de ramification loga-

rithmique mis en évidence, nous pouvons définir, par analogie avec (26), une longueur réduite L_i

$$L_i = \left(n_1 \frac{1}{d_1^-} + \ldots + n_m \frac{d_1^- \ldots d_{m-1}^-}{d_1^- \ldots d_m^-} \right)_i \qquad (i = 1, 2).$$

A cause de $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, L_i ne dépend pas du sens de rotation choisi pour la numération des bouts.

Si $\delta^1(a)$, $\varepsilon^1(a)$ et $\delta^2(a)$, $\varepsilon^2(a)$ sont respectivement les défauts et indices de W_1 et de W_2, on aura, d'après (20), par rapport à W,

$$(27) \qquad \delta(a) = \frac{L_1 \delta^1(a) + L_2 \delta^2(a)}{L_1 + L_2}, \qquad \varepsilon(a) = \frac{L_1 \varepsilon^1(a) + L_2 \varepsilon^2(a)}{L_1 + L_2}.$$

Les longueurs réduites s'ajoutent par composition ([24]) : $L = L_1 + L_2$.

De la même manière une surface W peut être formée par la composition de plusieurs surfaces W_1, W_2, ..., toutes de caractéristique nulle. Mais il faut bien comprendre qu'il s'agit là d'une composition successive, c'est-à-dire qu'on forme d'abord $W_1 + W_2$, puis $(W_1 + W_2) + W_3$, et ainsi de suite. Il n'est pas nécessaire que les W_i soient deux à deux « associables », c'est-à-dire possèdent des points de ramification logarithmique sur un même point fondamental, mais il faut seulement que W_i soit « associable » avec $(W_1 + W_2 + \ldots + W_{i-1})$. On a ici, comme généralisation de (27),

$$(28) \qquad \delta(a) = \frac{\sum L_i \delta^i(a)}{\sum L_i}, \qquad \varepsilon(a) = \frac{\sum L_i \varepsilon^i(a)}{\sum L_i},$$

où $\delta(a)$ et $\varepsilon(a)$ sont les défauts et indices de la surface de composition au point a, et $\delta^i(a)$, $\varepsilon^i(a)$ ceux des surfaces partielles.

Comme surfaces partielles W_1, W_2, ..., nous prendrons les surfaces périodiques $R(e^z)$ ou celles qui se composent de telles surfaces périodiques. Toutes ces surfaces sont de caractéristique nulle.

24. Voici un problème que nous aurons constamment à résoudre dans le chapitre suivant :

Problème. — *Étant donné deux surfaces « associables » W_1 et W_2 de longueurs réduites L_1 et L_2, il s'agit de construire deux autres surfaces « associables » W_1' et W_2' satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *W_1' et W_2' possèdent respectivement les mêmes défauts et indices que W_1 et W_2;*

([24]) Cela à cause de $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, c'est ce qui fait l'intérêt de la composition de surfaces de caractéristique nulle.

2° *Les longueurs réduites* L'_1 *et* L'_2 *de* W'_1 *et* W'_2 *sont dans un rapport (rationnel) donné.*

Solution. — Soit

$$L_1 = \frac{N_1}{D_1}, \qquad L_2 = \frac{N_2}{D_2}, \qquad \frac{L'_1}{L'_2} = \frac{N'_1}{N'_2},$$

où D_i, N_i, N'_i sont des entiers, nous prenons alors pour W'_1 une surface qui se compose de $N'_1 N_2 D_1$ exemplaires W_1 et pour W'_2 une surface qui se compose de $N'_2 N_1 D_2$ exemplaires W_2. D'après (28), défauts et indices n'ont pas changé, et les longueurs réduites sont

$$L'_1 = (N'_1 N_2 D_1) L_1 = N'_1 N_2 N_1,$$
$$L'_2 = (N'_2 N_1 D_2) L_2 = N'_2 N_1 N_2;$$

elles sont bien dans le rapport donné.

CHAPITRE VII.

Résolution du problème d'inversion posé.

25. Nous voulons construire une surface W de caractéristique nulle, qui corresponde au schéma suivant, dont la signification est évidente

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_\nu & \dots & a_q \\ \delta_1 & \dots & \delta_\nu & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_\nu & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_\nu & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_\nu & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}, \tag{29}$$

où les nombres rationnels δ_ν et ε_ν satisfont aux conditions (22), (23) et (24)

$$\delta_\nu + \varepsilon_\nu \leq 1, \qquad < 1 \quad \text{si } \varepsilon_\nu \neq 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{q} (\delta_\nu + \varepsilon_\nu) = 2, \qquad \sum \delta_\nu \neq 0.$$

Elles exigent en particulier que, à l'exception du cas $\delta_1 = \delta_2 = 1$ résolu par une transformée homographique de e^z, nous ayons $q \geq 3$, ce que nous supposons désormais.

Nous appelons un tel schéma un schéma de Ullrich. Si l'on peut construire la surface W correspondante, nous disons que le schéma est résoluble.

Toutes les matrices à deux lignes telles que (29) ne sont pas nécessairement des schémas de Ullrich, mais, si (29) est un schéma de Ullrich avec plus d'un δ_ν non nul, alors les schémas suivants sont aussi des schémas de Ullrich :

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_\nu + \varepsilon_\nu & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \dots & 0 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & 0 & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \dots & \delta_\nu + \varepsilon_\nu & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}. \tag{31}$$

En effet, on vérifie facilement que les conditions (22), (23) et (24) sont remplies par chacun des schémas (30) et (31).

26. On a alors le lemme suivant :

LEMME. — *Si les schémas* (30) *et* (31) *sont résolubles, alors le schéma* (29) *l'est aussi.*

Démonstration. — Nous résolvons (30) et (31) respectivement par les surfaces W_1 et W_2. D'après le n° 24 nous pouvons en déduire deux surfaces W'_1 et W'_2 qui résolvent aussi (30) et (31) et dont les longueurs réduites L'_1 et L'_2 (par rapport à un point de ramification logarithmique commun) sont dans le rapport $\partial_\nu : \varepsilon_\nu$. Par la réunion de W'_1 et W'_2 nous obtenons d'après (27) une surface W qui résout (29). C. Q. F. D.

Nous exprimons symboliquement le fait en écrivant

$$(32)\qquad (\partial_\nu+\varepsilon_\nu)\begin{pmatrix}\partial_1 & \dots & \partial_\nu & \dots & \partial_q\\ \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_\nu & \dots & \varepsilon_q\end{pmatrix} = \partial_\nu\begin{pmatrix}\partial_1 & \dots & \partial_\nu+\varepsilon_\nu & \dots & \partial_q\\ \varepsilon_1 & \dots & 0 & \dots & \varepsilon_q\end{pmatrix} + \varepsilon_\nu\begin{pmatrix}\partial_1 & \dots & 0 & \dots & \partial_q\\ \varepsilon_1 & \dots & \partial_\nu+\varepsilon_\nu & \dots & \varepsilon_q\end{pmatrix}.$$

D'après ce lemme nous pouvons ramener le schéma général de proche en proche à une « combinaison linéaire » de schémas des deux sortes suivantes :

a. Schémas avec un seul ∂_ν non nul;

b. schémas dont chaque colonne contient un seul élément différent de zéro, soit ∂_ν, soit ε_ν.

Les premiers schémas sont étudiés au n° 27 sous le nom de *schémas fondamentaux* de première espèce (33).

Les derniers schémas peuvent être caractérisés par la condition

$$\sum_{\nu=1}^{q}\partial_\nu\varepsilon_\nu = 0.$$

Ils s'appellent pour cette raison *schémas orthogonaux* (n° 28).

27. *Schémas fondamentaux.* — Ce sont les schémas qui correspondent aux fonctions périodiques $R(e^z)$.

Si l'on a $R(0)=R(\infty)=a_1$, on n'a qu'une valeur déficiente a_1 et le schéma de la distribution s'appelle schéma fondamental de première espèce

$$(33)\qquad \begin{pmatrix}\partial_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_q\end{pmatrix} \qquad (1^{re}\text{ espèce}).$$

Si l'on a $a_1=R(0)\neq a_2=R(\infty)$, il y a deux valeurs déficientes a_1 et a_2.

Le schéma correspondant s'appelle schéma fondamental de seconde espèce

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} \qquad (2^{e} \text{ espèce}). \tag{34}$$

La résolution de ces deux sortes de schémas est un problème algébrique. Si n est un dénominateur commun pour les nombres rationnels δ_ν et ε_ν, les schémas (33) et (34) peuvent s'écrire sous les formes

$$\begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e_1}{n} & \frac{e_2}{n} & \frac{e_3}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} & \frac{d_2}{n} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{e_1}{n} & \frac{e_2}{n} & \frac{e_3}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

où les nombres d_ν et e_ν sont entiers.

D'après (21) nous avons à construire une fonction rationnelle $\mathrm{R}(u)$ de degré n, qui possède des points de ramification seulement sur les points fondamentaux $a_1, a_2, \dots, a_q$ et d'après la répartition suivante :

1° Pour les schémas de première espèce :

Sur a_1, un point de ramification $u^- = \infty$ d'ordre $d^- - 1$ et un point de ramification $u^- = 0$, d'ordre $d^- - 1$, avec $d^- + d^- = d_1$; l'ordre total des autres points de ramification est égal à e_1.

Sur a_ν ($\nu \geq 2$), l'ordre total des points de ramification est égal à e_ν.

2° Pour les schémas de deuxième espèce :

Sur a_1, un point de ramification $u_1 = \infty$ d'ordre $d_1 - 1$; l'ordre total des autres points de ramification est égal à e_1.

Sur a_2, un point de ramification $u_2 = 0$, d'ordre $d_2 - 1$; l'ordre total des autres points de ramification est égal à e_2.

Sur a_ν ($\nu \geq 3$), l'ordre total des points de ramification est égal à e_ν.

Moyennant les relations (22) et (23), qui s'écrivent avec d_ν et e_ν,

$$d_\nu + e_\nu \leq n, \qquad < n \quad \text{si } e_\nu \neq 0; \qquad \sum (d_\nu - e_\nu) = 2n,$$

ces deux problèmes sont résolubles : la première exprime que l'ordre total des points de ramification sur un point fondamental a_ν est inférieur au degré de $\mathrm{R}(u)$, la deuxième exprime la relation de Riemann-Hurwitz. La résolution peut s'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés. Mais nous allons donner en appendice ([25]) une solution combinatoire en construisant directement le réseau de $\mathrm{R}(u)$.

([25]) *Voir* Appendices II et III.

Avec la fonction rationnelle $R(u)$ ainsi obtenue, nous formons la fonction méromorphe $R(e^z)$ qui, d'après (21), résout bien les schémas (33) et (34).

Une fois que les schémas fondamentaux sont résolus, la résolution du schéma général se ramène à un système d'équations diophantiennes. Mais la solution de ce système doit satisfaire à des conditions tellement compliquées, qu'on pourrait à peine s'en sortir et nous préférons ici la méthode combinatoire.

28. *Schémas orthogonaux.* — On peut, en modifiant l'ordre des points a_ν s'il le faut, écrire un schéma orthogonal sous la forme

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \dots & \delta_\nu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_{\nu+1} & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} & \dots & \frac{d_\nu}{n} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{e_{\nu+1}}{n} & \dots & \frac{n}{e_q} \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Pour $\nu = 2$, nous avons un schéma fondamental, déjà résolu. Soit alors $\nu \geq 3$. Nous choisissons d'abord le dénominateur commun tel que la somme $d_1 + \dots + d_\nu$ soit paire et définissons le nombre d par

$$d_1 + d_2 + \dots + d_\nu = 2d \leq 2n.$$

Nous résolvons d'abord les schémas fondamentaux (de deuxième espèce) suivants :

$$\begin{pmatrix} a_i & a_j & a_{\nu+1} & \dots & a_q \\ \frac{d}{n} & \frac{d}{n} & & & \\ & & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e_{\nu+1}}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{n} & \frac{d}{n} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & \frac{e_{\nu+1}}{n} & \dots & \frac{e_q}{n} \end{pmatrix} \tag{37}$$

pour toutes les combinaisons $i, j = 1, 2, \dots, \nu$.

La résolution de ces schémas fondamentaux d'après la méthode exposée au numéro précédent, fournit des bouts périodiques Φ'_{ij} de caractéristique nulle et tous de même longueur réduite [*voir* n° 23, formule (26)]

$$l_{ij} = \frac{n}{d}.$$

Nous construisons, d'après le n° 23, avec les bouts Φ'_{ij}, une surface W à $2d$ bouts périodiques telle que parmi les $2d$ points de ramifications logarithmiques de la surface, il y ait, sur le point fondamental a_i, exactement d_i tels points ($i = 1, 2, \dots, \nu$). Chacun de ces d_i points apporte au défaut de a_i une contribution égale à $\frac{d}{d_i} = \frac{1}{n}$, si bien que le défaut total de a_i atteint la valeur voulue $\frac{d_i}{n} = \delta_i$. D'autre part, l'indice de a_k ($k < \nu$) par rapport aux Φ'_{ij} est toujours ε_k, de sorte que par rapport à W, on a aussi $\varepsilon(a_k) = \varepsilon_k$. Donc la surface W résout bien le schéma orthogonal (37).

On remarque que pour $\nu = q$, tous les ε sont nuls et l'on a le schéma résolu par M. Nevanlinna. Ce qui précède généralise justement la méthode qu'il a employée.

Avec les schémas fondamentaux et les schémas orthogonaux, nous avons résolu tous les schémas (29) et nous pouvons par conséquent énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME B. — *Sous les conditions :*

$$1^\circ \qquad \sum_{\nu=1}^{q} \delta_\nu + \sum_{1}^{q} \varepsilon_\nu = 2;$$

$$2^\circ \qquad \delta_\nu, \quad \varepsilon_\nu \text{ } \textit{rationnels};$$

$$3^\circ \qquad \sum_{1}^{q} \delta_\nu \neq 0;$$

$$4^\circ \qquad \delta_\nu + \varepsilon_\nu \leq 1, \qquad < 1 \quad \textit{si } \varepsilon_\nu \neq 0;$$

on peut résoudre le problème d'inversion à l'aide des surfaces W *à un nombre fini de bouts périodiques et de caractéristique* Δ *nulle.*

29. On peut se demander quel est le plus petit nombre m de bouts périodiques dont on a besoin pour résoudre un schéma donné. Ce sera pour q fixe une fonction $m(\delta_i, \varepsilon_i)$ des nombres δ_i et ε_i.

De toute façon, si la méthode exposée a été commode pour démontrer la possibilité de résoudre le problème d'inversion posé, le procédé suivant donne plus rapidement la solution et nécessite un moins grand nombre de bouts périodiques.

Dans le schéma général (29)

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_q \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix},$$

considérons les ε_ν pour lesquels δ_ν est non nul. S'il le faut, nous changeons l'ordre des a_ν, de manière que ces ε_ν soient les r premiers indices rangés par ordre décroissant

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_r & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_r & \varepsilon_{r+1} & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix},$$

avec

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_r, \qquad r \leq q.$$

Pour $r \leq 2$, nous avons un schéma fondamental. Soit alors $r \geq 3$. Si pour tout $\nu \leq r$, l'inégalité

$$(38) \qquad \varepsilon_\nu \quad \sum_{\mu=1}^{q} \delta_\mu < 1$$

est vérifiée, nous pouvons encore appliquer la méthode utilisée pour résoudre les schémas orthogonaux, en considérant les schémas

$$\begin{pmatrix} a_i & a_j & a_{r+1} & \dots & a_q \\ \delta & \delta & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_i & \varepsilon_j & \varepsilon_{r-1} & \dots & \varepsilon_q \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{2}\sum_{1}^{r}\delta_\mu,$$

pour toutes les combinaisons $i, j = 1, 2, \dots, r$. Un schéma tel que toutes les inégalités (38) soient vérifiées, s'appelle un schéma quasi orthogonal et se résout moyennant $2d = d_1 + d_2 + \dots + d_r$ bouts périodiques avec les notations du n° 28.

Si pour un et un seul indice, ε_i par exemple, on a

$$\varepsilon_i + \frac{1}{2}\sum_{q}^{1}\delta_\mu \geq 1,$$

nous décomposons d'abord le schéma correspondant en deux schémas quasi orthogonaux d'après la formule

$$(\varepsilon_i - \delta_1 - \varepsilon_2)\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \dots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots \end{pmatrix} = (\varepsilon_i - \varepsilon_2)\begin{pmatrix} 0 & \delta_2 & \dots \\ \varepsilon_1 + \delta_1 & \varepsilon_2 & \dots \end{pmatrix} + \delta_1\begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \delta_1 - \varepsilon_2 & \delta_2 & \dots \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

La signification d'une telle formule a été expliquée à la fin du n° 26 (32). On vérifie aisément à l'aide des relations

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_r, \qquad \varepsilon_1 - \delta_2 < 1, \qquad \varepsilon_1 - \delta_2 + \varepsilon_2 - \delta_2 < 2,$$

que les deux schémas du deuxième membre sont bien quasi orthogonaux.

Finalement, supposons qu'on ait pour deux indices, ε_1 et ε_2 par exemple, les inégalités

$$\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{q}\delta_\mu = 1, \qquad \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{q}\delta_\mu \geq 1.$$

Ceci entraîne, à cause de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sum\delta_\mu \leq 2$,

$$\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\sum\delta_\mu = \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\sum\delta_\mu = 1, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \qquad \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_q = 0,$$

autrement dit notre schéma se réduit à

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots & \delta_q \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici *l'orthogonalisation* (n° 28) devient nécessaire et se fait en deux étapes.

Cette méthode nous donne en outre un renseignement sur la question posée : le nombre minimum m de bouts à prendre, qui est égal à 1 dans le cas où il y a au plus deux δ, non nuls, dépend en général essentiellement du plus petit

dénominateur commun n des nombres δ_ν, ε_ν et de la somme $d_1+\ldots+d_q$ correspondante.

30. D'un point de vue opposé, on peut aussi se poser une question : quels sont les bouts périodiques les plus simples qu'on pourrait prendre pour résoudre le schéma général sans se soucier du nombre m de ces bouts.

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier cette question pour les schémas suivants :

$$(39)\qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_q \\ \delta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_q \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_q \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \ldots & \varepsilon_q \end{pmatrix}.$$

Nous supposons, dans les deux cas, $q>3$. Nous pouvons alors ramener le premier schéma à une « combinaison linéaire » de schémas de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_i & a_j \\ \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad \varepsilon=\frac{1}{2}(\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_q),$$

pour tous les couples $i, j=2, 3, \ldots, q$. De même nous pouvons ramener le second schéma à une combinaison de schémas

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_i & a_j \\ \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \quad \varepsilon=\frac{1}{2}(\varepsilon_3+\ldots+\varepsilon_q),$$

pour $i, j=3, 4, \ldots, q$. La méthode est la même que dans la résolution des schémas orthogonaux (n° 28). Finalement, si nous comptons encore les cas $q\leq 3$, la résolution des schémas (39) se ramène à celle des trois schémas suivants :

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Montrons que le dernier schéma se laisse encore ramener aux deux premiers. Nous distinguons pour cela trois cas :

1° $2\varepsilon<1$. — Nous écrivons simplement

$$2\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}.$$

2° $2\varepsilon\geq 1$, $\delta_1=\delta_2=\delta$. — On aura alors $2\delta\leq 1$ et par suite $2\delta^2\leq\frac{1}{2}$, si bien qu'on peut écrire

$$(2+2\delta)\begin{pmatrix} \delta & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\delta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta^2 & 1-\delta^2 \end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix} 0 & 2\delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta & 1-\delta \end{pmatrix}+2\delta\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3° $2\varepsilon \geq 1$, $\delta_1 > \delta_2$. — On a toujours $\delta_1 + \delta_2 \leq 1$, de sorte qu'on peut faire la décomposition suivante :

$$(\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2\delta_1\delta_2)\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} = \delta_1^2 \begin{pmatrix} \delta_1 - \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} + \delta_2^2 \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 - \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} + 2\delta_1\delta_2 \begin{pmatrix} \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} & \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix},$$

ce qui nous ramène au cas 2°.

Nous pouvons ainsi énoncer le complément suivant au théorème B :

Théorème C. — *Pour résoudre le problème d'inversion posé, on peut n'utiliser que des bouts périodiques qui sont ramifiés seulement sur $q = 3$ points fondamentaux et qui correspondent aux schémas suivants dits schémas élémentaires :*

$$(41) \qquad \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Évidemment, on ne peut abaisser davantage le nombre q des points fondamentaux, car les seuls bouts à deux points fondamentaux sont les bouts logarithmiques.

30. Si nous étions partis de ce résultat, nous aurions pu simplifier la démonstration du théorème B, c'est-à-dire de la possibilité de résoudre le problème d'inversion, en ramenant d'abord, par une transformation linéaire, les trois points fondamentaux a_1, a_2, a_3 sur une même droite, avant de représenter les bouts périodiques sur un demi-plan. Nous choisissons alors comme courbe C un segment de droite joignant les deux points de ramification logarithmique du bout périodique, et la courbe Γ, son image, sera aussi, par raison de symétrie, une droite, de sorte que les domaines G_1 et G_2 sont eux-mêmes déjà des quadrants [n° 14, (*fig.* 4)].

D'un autre côté nous aurions, au lieu des schémas fondamentaux (33) et (34), seulement à résoudre les schémas (41), ce qui conduit à un problème algébrique fort simple : il s'agit de construire une fonction rationnelle, qui possède au plus cinq points de ramification répartis sur trois points fondamentaux. Ceci peut se simplifier encore.

Nous allons montrer que le problème d'inversion posé peut se ramener finalement à la construction de fonctions rationnelles $R(u)$, *avec trois points de ramification.*

Il en est déjà ainsi pour le second des schémas (41). Pour le premier, nous

le décomposons de la manière suivante :

$$(d_1+e_1-1)\begin{pmatrix}\delta_1 & 0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{pmatrix}=(d_1+e_1-1)\begin{pmatrix}\frac{2d_1}{2n} & 0 & 0\\ \frac{2e_1}{2n} & \frac{2e_2}{2n} & \frac{2e_3}{2n}\end{pmatrix}$$

$$=(d_1-1)\begin{pmatrix}\frac{(2d_1+2e_1-1)+1}{2n} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2e_2}{2n} & \frac{2e_3}{2n}\end{pmatrix}$$

$$+e_1\begin{pmatrix}\frac{1-1}{2n} & 0 & 0\\ \frac{2d_1-2e_1-2}{2n} & \frac{2e_2}{2n} & \frac{2e_3}{2n}\end{pmatrix}.$$

Nous avons bien encore pour $R(e^z)$, quatre points de ramification dans l'avant-dernier schéma ($d^-=1$) et cinq points de ramification pour le dernier ($d^-=d^-=1$); mais on a, dans les deux cas, seulement trois points de ramification pour la fonction rationnelle $R(u)$: un point de ramification logarithmique dans le premier cas, et deux points de ramification logarithmique dans le second cas proviennent des points réguliers de $R(u)$. C. Q. F. D.

31. Nous avons donc à résoudre seulement le problème suivant :

Problème. — *Construire une fonction rationnelle* R *qui, sur chaque point* $a_\nu(\nu=1, 2, 3)$, *possède un point de ramification d'ordre* λ_ν.

Évidemment les λ_ν donnés ne peuvent être tout à fait arbitraires. D'abord leur somme doit être paire, puisqu'on doit avoir $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2n-2$, où n est le degré de R. Puis il faut alors que chaque λ_ν soit au plus égal à $n-1$, ce qui entraîne que chaque λ_ν doit être au plus égal à la somme des deux autres (inégalité des triangles) :

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \text{ paire}, \qquad \lambda_\alpha \leq \lambda_\beta+\lambda_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$$

Solution. — Nous résolvons ce problème en construisant le réseau $R(u)$. Nous dessinons d'abord dans le plan des u un polygone de $2\lambda_1+2$ sommets et côtés (*fig.* 18). L'extérieur de ce polygone doit représenter le domaine algébrique (a_1). Nous numérotons alors les sommets de 1 jusqu'à $2\lambda_1+2$ et relions le premier sommet avec le $(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-2)^{\text{ième}}$ [26] par une suite de $\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1$ nœuds reliés par $\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1+1$ segments. Le polygone primitif est ainsi divisé en deux polygones, l'un à $2\lambda_2+2$ sommets, l'autre

[26] D'après ce qui précède, $\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+2=2n-\lambda_3$ est un nombre pair positif, de même que $\lambda_2+\lambda_3-\lambda_1$.

à $2\lambda_3+2$ sommets. Ces polygones doivent représenter les domaines algébriques (a_2) et (a_3). Pour obtenir le complexe voulu, il reste à compléter la figure par des « diangles » représentant les points réguliers sur a_1, a_2 et a_3.

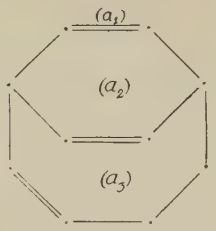

Fig. 18 : $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$.

On voit que la solution est unique.

32. Nous avons résolu le problème d'inversion sous certaines conditions. Nous voulons maintenant étudier, pour chacune d'elles, la possibilité de s'en affranchir :

a. $q<\infty$. — Comme nous avons dit dans l'Introduction, le problème d'inversion pour une infinité de valeurs exceptionnelles a_ν semble encore inaccessible avec les moyens actuels. En particulier, cela nous oblige à quitter le champ des surfaces à un nombre fini de points fondamentaux, c'est-à-dire la représentation commode par réseau, si nous voulons nous en tenir à la méthode géométrique. Aucune des fonctions connues ne présente une infinité de défauts et d'indices. On connaît des fonctions telles que

$$w(z)=\int_{z_0}^{z} e^{e^t}\,dt,$$

qui présente une infinité de valeurs asymptotiques finies ([27]). Mais leurs défauts sont nuls par raison de symétrie. On pourrait espérer obtenir des défauts positifs en rendant « dyssymétrique » le noyau de l'intégrale. On part pour cela du réseau de la surface $f(z)=e^{e^z}$, ramifiée sur les points $f(z)=0,1$ et ∞ (*fig.* 14). Dans le réseau, tous les domaines logarithmiques sur le point ∞ sont équivalents. En introduisant des nœuds non ramifiés entre les deux nœuds ramifiés, situés au bord de ces domaines, on pourrait détruire cette symétrie (*fig.* 19). La fonction uniformisante $f_1(z)$ reste entière, son intégrale

([27]) Ce sont

$$a_\nu=i\int_{2\nu\pi}^{2\nu\pi+\pi} e^{e^{iy}}\,dy=\int_{-\infty}^{x_\nu} e^{e^x}\,dx \qquad (\nu=1,2,\ldots,\infty),$$

est une fonction uniforme

$$w_1(z) = \int_0^z f_1(t)\,dt$$

et possède aussi une infinité de valeurs asymptotiques finies, mais qui, n'étant plus « équivalentes », pourraient avoir des défauts positifs.

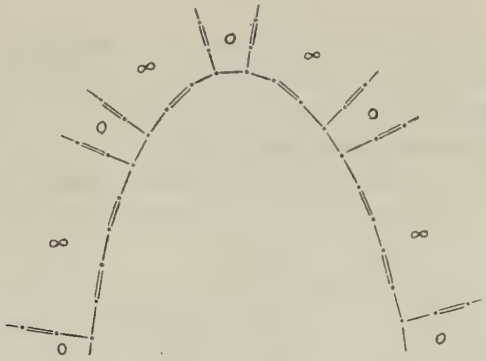

Fig. 19. — Surface $f_1(z)$.

b. $\sum(\delta_\nu+\varepsilon_\nu)=2$. — Il résulte d'un théorème de Teichmüller, que si la surface ne possède qu'un nombre fini de points fondamentaux de ramification, la somme totale des indices et des défauts atteint la valeur totale/les indices maximum 2, de sorte que le problème d'inversion dans le cas $\sum(\delta_\nu+\varepsilon_\nu)=\alpha<2$ présente la même difficulté que dans le cas précédent : la surface doit présenter des ramifications sur une infinité de points fondamentaux. La fonction intégrale $w(z)$ précédente, pour laquelle cette somme est égale à 1, possède bien une infinité de points fondamentaux de ramification; ce sont, entre autres, les valeurs asymptotiques $a_\nu(\nu=1,\ldots,\infty)$.

c. $\delta_\nu+\varepsilon_\nu$ ne peut, à cause de la périodicité des bouts, prendre la valeur 1, à moins que l'on ait $\delta_\nu=1$ et alors $\varepsilon_\nu=0$. En particulier on a toujours $\varepsilon_\nu<1$.

Fig. 20.

En modifiant les bouts périodiques de la manière indiquée dans la figure 20 pour obtenir des bouts pour ainsi dire pseudo-périodiques, E. Ullrich [28] a pu

[28] E. Ullrich [2].

réaliser des surfaces dont un point fondamental de ramification possède l'indice maximum 1. On pourrait penser à utiliser ces bouts pour étendre légèrement le problème d'inversion. Mais alors la méthode de la représentation presque conforme utilisée n'est plus applicable, car elle utilise essentiellement le fait que si $R(u)$ est infini pour u infini, on a asymptotiquement

$$\log R(e^z) \cong d^+ |z|,$$

quand z s'éloigne indéfiniment sur l'axe des x positifs. Il n'en est plus ainsi pour l'uniformisante des surfaces telles que celle de la figure 20 : ceci est en rapport avec le fait que la distribution des zéros d'une fonction sur l'axe imaginaire conditionne sa croissance sur l'axe réel.

Dans certains cas, la difficulté tient à autre chose. Ainsi, à cause de la restriction $\delta_\nu + \varepsilon_\nu < 1$, nous avons dû exclure les cas $q = 2$, avec indices positifs, tels que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ce schéma, d'apparence très simple, ne peut être résolu pourtant, non seulement par les surfaces à bouts périodiques, mais non plus par les surfaces à un nombre fini de points fondamentaux. Donc nous nous heurtons ici à la difficulté rencontrée en a et b : il faut chercher la solution parmi les surfaces à un nombre infini de points fondamentaux de ramification.

d. La restriction $\sum \delta_\nu \neq 0$ tient à l'existence des points de ramification logarithmique. On peut la lever au moyen des fonctions doublement périodiques. C'est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE VIII.

Le cas $\sum \delta_\nu = 0$ et les fonctions doublement périodiques.

33. Considérons la fonction elliptique définie par

$$\mathfrak{p}'^2(z) = [\mathfrak{p}(z) - e_0][\mathfrak{p}(z) - e_1][\mathfrak{p}(z) - e_2][\mathfrak{p}(z) - e_3].$$

L'arbre topologique (*fig.* 21) de la surface engendrée est un réseau rectangulaire : $\mathfrak{p}(z)$ ne possède sur les quatre points fondamentaux e_i ($i = 1, 2, 3, 4$) que des points de ramification algébrique d'ordre 1 et correspond au schema

de distribution suivant :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les défauts manquent et la somme des indices atteint le maximum 2. Dans

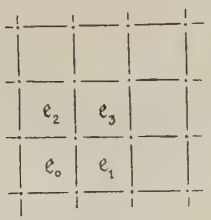

Fig. 21.

chaque parallélogramme des périodes, l'équation $\mathfrak{p}(z) = a \neq \varepsilon_i$ a deux racines, β et β'.

34. Soit maintenant $R(u)$ une fonction rationnelle de degré n et $a_1, \ldots, a_q$ l'ensemble des points fondamentaux de $R(u)$ plus les points $R(\varepsilon_0)$, $R(\varepsilon_1)$, $R(\varepsilon_2)$, $R(\varepsilon_3)$ ([29]) considérés comme points fondamentaux apparents, s'ils ne sont pas déjà parmi les points fondamentaux véritables. Supposons que sur a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, q$), $R(u)$ possède des points de ramification a_ν^μ ($\mu = 1, 2, \ldots, k_\nu$) d'ordre λ_ν^μ dont la somme est

$$\lambda_\nu = \sum_{\mu=1}^{k_\nu} \lambda_\nu^\mu.$$

Nous avons, d'après la relation de Riemann-Hurwitz,

$$\sum_{\nu,\mu} \lambda_\nu^\mu = \sum_{\nu} \lambda_\nu = 2n - 2.$$

Formons alors la fonction elliptique paire ([30])

$$w = R[\mathfrak{p}(z)].$$

Chaque parallélogramme des périodes de w correspond à $2n$ feuillets, donc à $4n$ nœuds du réseau.

Sur un point $w = a_\nu \neq R(\varepsilon_i)$, cette fonction possède dans le parallélogramme

([29]) Plusieurs des points $R(\varepsilon_i)$ peuvent coïncider.

([30]) Toutes les fonctions elliptiques paires de mêmes périodes que $\mathfrak{p}(z)$ sont de la forme $R[\mathfrak{p}(z)]$.

des périodes des points de ramification β_ν^μ et $\beta_\nu'^\mu$ tels que

$$\mathfrak{p}(\beta_\nu^\mu) = \mathfrak{p}(\beta_\nu'^\mu) = a_\nu^\mu,$$

chacun d'ordre λ_ν^μ ($\mu = 1, 2, \ldots, k_\nu$). Ce qui fait que l'indice de a_ν par rapport à $R[\mathfrak{p}(z)]$ est égal à

$$\varepsilon(a_\nu) = \frac{\sum_\mu 2\lambda_\nu^\mu}{2n} = \frac{\lambda_\nu}{n} \qquad [\alpha_\nu \neq R(\varepsilon_i)].$$

Mais un point de ramification $a_\nu^\mu = \varepsilon_i$ sur le point fondamental $a_\nu = R(\varepsilon_i)$ donne naissance à un seul point de ramification d'ordre $2\lambda_\nu^\mu + 1$ pour $R[\mathfrak{p}(z)]$. Son apport à l'indice de a_ν est donc égal à

$$\frac{2\lambda_\nu^\mu + 1}{2n}.$$

Finalement la somme des indices est

$$\sum_\nu \varepsilon(a_\nu) = \frac{\sum_{\nu,\mu} 2\lambda_\nu^\mu + 1}{2n} = 2. \tag{42}$$

Comme l'ordre total des points de ramification de $R(u)$ sur un point fondamental donné est nécessairement inférieur au degré, on a de nouveau

$$\varepsilon(a_\nu) < 1. \tag{43}$$

35. Soit maintenant à résoudre le schéma

$$\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_\nu & \ldots & a_q \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_q & \ldots & \varepsilon_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_\nu & \ldots & \varepsilon_q \end{pmatrix} = (\varepsilon_1 \quad \ldots \quad \varepsilon_\nu \quad \ldots \quad \varepsilon_q), \tag{44}$$

où les ε_ν satisfont aux relations (42) et (43), ce qui exige en particulier que le nombre q des points fondamentaux soit supérieur à 2 : $q \geq 3$.

Si nous écrivons

$$\varepsilon_\nu = \frac{2e_\nu}{2n},$$

avec $n \geq 4$, le schéma devient

$$\left(\frac{2e_1}{2n} \quad \ldots \quad \frac{2e_\nu}{2n} \quad \ldots \quad \frac{2e_q}{2n}\right).$$

Nous pouvons supposer que e_1 et e_2 sont les plus petits des e_ν.

Nous construisons alors une fonction rationnelle $R(u)$ de degré n satisfaisant aux conditions suivantes :

1° sur a_1 et a_2, l'ordre total des points de ramification est respectivement $e_1 - 1$ et $e_2 - 1$;

2° sur a_ν $(\nu = 3, \ldots, q)$, l'ordre total des points de ramification est égal à e_ν.

Ce problème algébrique est résoluble, grâce aux conditions (42) et (43). Nous donnerons en appendice ([31]) la méthode de construction directe du réseau de $R(u)$.

Les relations

$$e_1 + e_2 - \ldots + e_q = 2n - 2,$$

$$e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_q,$$

$$q \geq 3, \qquad n \geq 4$$

entraînent nécessairement

$$e_1 \leq e_2 \leq n - 2.$$

Mais comme l'équation $R(u) = a_1$ doit avoir n racines, $R(u)$ aura sur a_1 encore au moins deux points réguliers : $u = \mathfrak{e}_0$ et $u = \mathfrak{e}_1$. De même elle aura sur a_2 encore au moins deux points réguliers : $u = \mathfrak{e}_2$ et $u = \mathfrak{e}_3$.

Le schéma (44) est alors résolu par la fonction $R[\mathfrak{p}(z)]$, où $\mathfrak{p}(z)$ est la fonction elliptique définie par

$$\mathfrak{p}'^2(z) = [\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{e}_0][\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{e}_1][\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{e}_2][\mathfrak{p}(z) - \mathfrak{e}_3].$$

Théorème. — *Le problème d'inversion dans le cas* $\sum \varepsilon_\nu = 0$, $\varepsilon_\nu < 1$ *peut être résolu par les fonctions elliptiques paires* $R[\mathfrak{p}(z)]$.

La solution donnée ci-dessus est générale, mais dans des cas spéciaux, $R(u)$ peut être choisi plus simplement. En particulier, son degré n'a pas besoin de dépasser 4.

APPENDICE.

I. En différents endroits de ce travail, nous avions à construire des fonctions rationnelles $R(u)$ satisfaisant à certaines conditions. Pratiquement, on peut obtenir $R(u)$ par la méthode des coefficients indéterminés, mais il est difficile de démontrer par cette méthode que le problème est toujours possible dans le cas général. Aussi nous proposons-nous ici de résoudre le problème général par la méthode combinatoire, c'est-à-dire de construire directement le réseau de $R(u)$.

([31]) *Voir* Appendice I.

Nous commençons par le problème général suivant :

Problème. — *Construire une fonction* $R(u)$ *telle que sur le point fondamental* a_ν, *l'ordre total des points de ramification soit égal à* λ_ν,

$$(\nu = 1, \ldots, q).$$

Évidemment les λ_ν doivent satisfaire à certaines conditions qui découlent de la formule de Riemann-Hurwitz ([32])

$$\sum_{\nu=1}^{q} \lambda_\nu = 2(n-1), \tag{45}$$

où n est de degré de $R(u)$. Il s'ensuit d'abord que la somme des λ doit être paire. En exprimant ensuite que l'ordre total de ramification sur un point fondamental α_ν donné est inférieur au degré, on obtient les inégalités suivantes, dites inégalités du polygone

$$\lambda_i \leq \sum_{\nu \neq i} \lambda_\nu. \tag{46}$$

Solution. — Nous représentons les données du problème par le schéma

$$\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_\nu & \ldots & a_q \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_\nu & \ldots & \lambda_q \end{pmatrix},$$

où les λ_ν satisfont aux relations (45) et (46).

Au n° 31 nous avons résolu le problème dans le cas $q = 3$. Supposons qu'on ait pu le faire jusqu'à $q - 1$.

Nous construisons alors à partir des λ_ν un système de q nombres $\lambda'_1 = 0$, $\lambda'_2, \ldots, \lambda'_q$ satisfaisant aussi aux inégalités du polygone (46) et tel que

$$\lambda'_\nu \leq \lambda_\nu, \qquad \sum_{\nu=1}^{q} (\lambda_\nu - \lambda'_\nu) = 2\lambda_1 \qquad \text{ou} \qquad \sum_{\nu=2}^{q} (\lambda_\nu - \lambda'_\nu) = \lambda_1.$$

On peut obtenir un tel système par le procédé suivant : dans le système primitif on diminue d'une part λ_1 d'une unité, d'autre part un des plus grands λ restants aussi d'une unité. Sur le nouveau système on recommence la même opération, c'est-à-dire qu'on diminue d'une part $\lambda_1 - 1$ d'une unité, d'autre part un des plus grands λ restants d'une unité et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait enlevé au total $2\lambda_1$ unité à la somme totale des λ. Il est facile de voir qu'à chaque stade, le système des λ obtenus continue à satisfaire aux inégalités du polygone.

([32]) *Voir* n° 7.

Avec le système des λ_ν obtenus à la fin, nous résolvons le schéma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_q \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & \lambda'_q \end{pmatrix},$$

où a_1 n'est maintenant plus qu'un point fondamental apparent. Il existe au moins un a_ν tel que λ'_ν soit vraiment plus petit que λ_ν

$$\lambda'_\nu < \lambda_\nu.$$

Nous pouvons toujours supposer que c'est a_2, en modifiant s'il le faut la courbe L qui relie les points fondamentaux a_ν. Considérons alors un diangle (a_1) sur le point a_1 ([33]). Un des deux domaines algébriques qui lui sont voisins appartient à a_2, appelons-le (a_2); (a_1) et (a_2) sont séparés par un segment reliant les deux sommets (nœuds) communs (*fig.* 22). En remplaçant ce

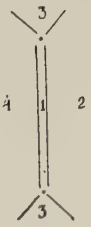

Fig. 22.

segment par une suite de $1 + 2(\lambda_2 - \lambda'_2)$ faisceaux composés alternativement de 1 et de $q - 1$ segments (*fig.* 23), nous créons un domaine algébrique de $2 + 2(\lambda_2 - \lambda'_2)$ côtés, c'est-à-dire d'ordre $\lambda_2 - \lambda'_2$ sur le point a_1, tandis que

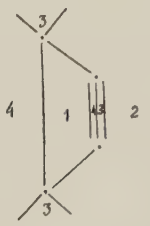

Fig. 23 : $\lambda_2 - \lambda'_2 = 1$.

l'ordre total de ramification sur a_2 s'est augmenté de $\lambda_2 - \lambda'_2$ pour atteindre la valeur donnée λ_2. Au bord du nouveau domaine algébrique (a_1) ainsi créé, il y a sûrement un diangle (a_3) appartenant au point fondamental a_3 et qui est

([33]) Dans les figures 22 et 23, nous désignons les domaines algébriques correspondant aux points fondamentaux a_1, a_2, a_3, a_4 par les chiffres 1, 2, 3, 4.

séparé de (a_1) par un faisceau de $q-2$ segments. Si nous remplaçons ce faisceau par une suite de $1+2$ $(\lambda_3-\lambda'_3)$ faisceaux composés alternativement de $q-2$ et de 2 segments, (a_1) devient un domaine algébrique de $2+2$ $(\lambda_2-\lambda'_2+\lambda_3-\lambda'_3)$ côtés, c'est-à-dire d'ordre $\lambda_2-\lambda'_2+\lambda_3-\lambda'_3$, tandis que l'ordre total de ramification sur a_3 s'est augmenté de $\lambda_3-\lambda'_3$ unités pour atteindre la valeur donnée λ_3.

Nous recommençons la même chose avec a_4, a_5, ... Finalement, nous obtenons un réseau de degré $n=\frac{1}{2}\left(1+\sum\lambda_\nu\right)$, dans lequel l'ordre total de ramification sur un point a_ν $(\nu=2, 3, \ldots, q)$ est λ_ν, tandis que sur a_1 on a un seul point de ramification d'ordre positif et égal à

$$\sum_{2}^{q}(\lambda_\nu-\lambda'_\nu)=\lambda_1.$$

Le problème posé est par suite résolu.

Cette construction suffit pour résoudre le problème du n° 35 : on n'a qu'à poser

$$\lambda_1=e_1-1, \qquad \lambda_2=e_2-1, \qquad \lambda_\nu=e_\nu \quad (\nu\geq 3).$$

II. Pour résoudre les schémas fondamentaux de première espèce, nous avions au n° 27, à construire une fonction $R(u)$ telle que :

1° sur a_1, se trouve un point de ramification d'ordre $d^- - 1$; et un point de ramification d'ordre $d^- - 1$, tandis que l'ordre total des autres points de ramification est égal à e_1;

2° sur a_ν $(\nu\geq 2)$, l'ordre total des points de ramification est égal à e_ν.

Nous posons $\lambda_1=d^-+d^-+e_1-2$, $\lambda_\nu=e_\nu$ $(\nu\geq 2)$, et déterminons comme plus haut le système des λ' avec lequel nous construisons une surface à $q-1$ points fondamentaux véritables. Puis, au lieu de partir d'un seul diangle (a_1) pour construire un point de ramification d'ordre λ_1 sur a_1, nous construisons d'abord un point de ramification d'ordre d^+-1. Nous partons alors d'un autre diangle (a_1) que nous transformons de la même manière en un domaine algébrique d'ordre $d^- - 1$. Finalement nous construisons à partir d'un troisième diangle (a_1) un point de ramification (a_1) d'ordre e_1. Il y a lieu, chaque fois s'il le faut, de modifier la courbe L pour pouvoir amorcer les constructions.

III. En dernier lieu nous avions pour résoudre les schémas fondamentaux de seconde espèce, à construire une fonction $R(u)$ telle que :

1° sur a_1, se trouve un point de ramification d'ordre d_1-1, l'ordre total des autres points de ramification étant égal à e_1;

2° sur a_2, se trouve un point de ramification d'ordre $d_2 - 1$, l'ordre total des autres points de ramification étant égal à e_2;

3° sur a_ν ($\nu \geqq 3$), l'ordre total des points de ramification étant égal à e_ν.

Nous posons ici $\lambda_1 = e_1 + d_1 - 1$, $\lambda_2 = e_2 + d_2 - 1$ et, pour $\nu \geqq 3$, $\lambda_\nu = e_\nu$, puis déterminons comme précédemment un système des λ' : $\lambda'_1 = 0, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_q$. Nous résolvons le schéma

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_q \\ 0 & \lambda'_2 & \ldots & \lambda'_q \end{pmatrix}$$

par un réseau R', dans lequel se trouvent, sur le point fondamental a_2, deux domaines algébriques d'ordre positif, l'un d'ordre $d'_2 - 1$, l'autre d'ordre e'_2, tels que

$$e'_2 + d'_2 - 1 = \lambda'_2 \leqq \lambda_2, \quad d'_2 \leqq d_2, \quad e'_2 \leqq e_2.$$

Nous introduisons alors sur a_1 deux domaines algébriques d'ordres respectifs $d_1 - 1$ et e_1, de telle manière que sur a_2 nous obtenions deux domaines algébriques d'ordre respectif $d_2 - 1$ et e_2, et que sur a_ν ($\nu \geqq 3$) l'ordre total de ramification devienne e_ν.

BIBLIOGRAPHIE.

AHLFORS (L.) :

[1] *Ueber eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Funktionen* (*Acta Math.*, 58, 1932).

BLANC (C.) :

[1] *Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes* (*Comment. Math. Helv.*, 9, 1937).

DENJOY (A.) :

[1] *Sur les fonctions entières de genre fini* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 145, 1907).

LAWRENTIEFF (M.) :

[1] *Sur une classe de représentations continues* (*C. R. Acad. Moscou*, 42, 1935).

LE VAN THIEM :

[1] *Beitrag zum Typenproblem der Riemannschen Flaechen* (*Comment. Math. Helv.*, 20, 1947).

[2] *Ueber das Ueber das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre* (*Ibid.*, 23, 1949).

[3] *Le degré de ramification d'une surface de Riemann et la croissance de la caractéristique de la fonction uniformisante* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 228, 1949).

[4] *Un problème de type généralisé* (*Ibid.*, 228, 1949).

MYRBERG (P. J.) :

[1] *Ueber die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Flaeche* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, A 45, 1935).

NEVANLINNA (R.) :

[1] *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).
[2] *Ueber Riemannsche Flaechen mit endlich vielen Windungspunkten* (*Acta Math.*, 58, 1932).
[3] *Eindeutige analytische Funktionen* (Berlin, Springer, 1936).
[4] *Ein Satz ueber offene Riemannsche Flaechen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, 54, 1940).

SPEISER (A.) :

[1] *Ueber Riemannsche Flaechen* (*Comment. Math. Helv.*, 2, 1930).

TEICHMUELLER (O.) :

[1] *Untersuchung ueber konforme und quasikonforme Abbildungen* (*Deutsche Math.*, 3, 1938).
[2] *Eine Umkehrung des zweiten Hauptsatzes* (*Ibid.*, 2, 1937).

ULLRICH (E.) :

[1] *Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre* (*Nachr. Ges. Wiss.*, Gœttingen N. F. 1, 1936).
[2] *Flaechenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen* (*Jahrber. Deutsche Math. Ver.*, 46, 1936).
[3] *Flaechenbau und Wertverteilung* (9e *Cong. Math. scand.*, 1939).

VALIRON (G.) :

[1] *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, Édouard Privat, 1923).
[2] *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable* (*Mém. Sc. Math.*, 2, 1925).
[3] *Directions de Borel des fonctions méromorphes* (*Ibid.*, 89, 1937).

WITTICH (H.) :

[1] *Ueber die konforme Abbildung einer Klasse von Riemannscher Flaechen* (*Math. Zeits.*, 45, 1939).
[2] *Ueber die Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion* (*Ibid.*, 51, 1947).

SUR LES

THÉORÈMES INVERSES DES PROCÉDÉS DE SOMMATION

DES SÉRIES DIVERGENTES

(PREMIER MÉMOIRE.)

PAR M. HUBERT DELANGE.

Introduction.

Les procédés usuels de sommation des séries divergentes peuvent être ramenés à la forme générale suivante :

A la série $\sum_{n}^{+\infty} u_n$, on associe une fonction $s(t)$ définie comme suit pour $t \geq 0$:

$\{\lambda_n\}$ étant une suite de nombres réels satisfaisant à

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty,$$

on pose

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0, \\ \displaystyle\sum_{\lambda_n \leq t} u_n & \text{pour } t > 0, \end{cases}$$

(la somme $\sum_{\lambda_n \leq t} u_n$ étant prise égale à zéro s'il n'y a aucun λ_n au plus égal à t).

On considère ensuite une intégrale de l'une des formes

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t) \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt,$$

où φ ou ψ est une certaine fonction de t et du paramètre x (la première forme correspond à la méthode dite des « facteurs de convergence », la seconde à la méthode dite des « moyennes »).

Si l'intégrale est convergente pour x appartenant à un certain ensemble $\mathcal{E}$ et

tend vers une limite finie S quand x tend vers une certaine valeur x_0 en restant sur $\mathcal{E}$, on attribue à la série $\sum_0^{+\infty} u_n$ la somme généralisée S.

Ainsi, le procédé de sommation est déterminé par la donnée de la suite $\{\lambda_n\}$, de la fonction φ ou ψ, de l'ensemble $\mathcal{E}$, et de x_0.

Tous les procédés sont assujettis à la « condition de permanence », à savoir que toute série convergente soit sommable et que sa somme généralisée soit égale à sa somme ordinaire.

Autrement dit, *si la fonction* $s(t)$ *est supposée nulle pour* $t = 0$, *et pour* $0 < t < \lambda_0$ *si* $\lambda_0 > 0$, *et constante pour* $\lambda_n \leq t < \lambda_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *et pour* $0 < t < \lambda_1$ *si* $\lambda_0 = 0$ *ou pour* $\lambda_0 \leq t < \lambda_1$ *si* $\lambda_0 > 0$, toutes les fois que $s(t)$ tend vers une limite finie quand t tend vers $+\infty$, l'intégrale considérée est convergente pour x appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$ et tend vers la même limite quand x tend vers x_0 en restant sur $\mathcal{E}$.

En fait, lorsque l'intégrale est de la première forme, cette propriété subsiste toujours sous la seule hypothèse que $s(t)$ est nulle pour $t = 0$ et à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$; lorsque l'intégrale est de la deuxième forme, la propriété subsiste toujours sous la seule hypothèse que $s(t)$ est mesurable et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$.

Le fait que la condition de permanence est satisfaite, est donc, dans les deux cas, une conséquence d'un théorème plus général relatif à l'intégrale considérée.

De même, les théorèmes inverses apparaissent comme corollaires de théorèmes du type suivant :

Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$ $\left(\text{ou } \int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt\right)$, où $s(t)$ est nulle pour $t = 0$ et à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ (ou mesurable et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$), est convergente pour x appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$ et tend vers une limite finie S quand x tend vers x_0 en restant sur $\mathcal{E}$, *et si la fonction* $s(t)$ *satisfait à une hypothèse supplémentaire convenable*, $s(t)$ tend vers S quand t tend vers $+\infty$.

Un tel théorème entraîne que, si une série est sommable par le procédé considéré, et si la fonction $s(t)$ associée à cette série satisfait à la condition mentionnée, que nous appellerons « condition de convergence », elle est aussi convergente.

J. Karamata a publié [9] (1) une étude générale des théorèmes de ce genre, avec des méthodes générales de démonstration.

---

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article (que nous n'avons pas cherché à faire complète, étant donnée l'abondance de la littérature sur ces questions).

Ces théorèmes se divisent en deux groupes suivant que leur démonstration est, ou non, de caractère élémentaire.

Les conditions de convergence sont déterminées par une fonction réelle $\Lambda(t)$ dépendant du procédé de sommation considéré et qui est continue et croissante pour $t \geq 0$ et tend vers $+\infty$ avec t.

$V(t)$ étant la fonction inverse de $\Lambda(t)$, on pose

$$T(t, \lambda) = V[\lambda \Lambda(t)].$$

Dans les théorèmes élémentaires, la condition de convergence est

$$\lim_{t \to -\infty} \left\{ \operatorname*{Sup}_{t - t' \leq T(t,\lambda)} s(t') - s(t) \right\} = 0. \tag{1}$$

Lorsque t est supposée à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, cette condition est équivalente à

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\Lambda(x)} \int_0^{\infty} \Lambda(t)\, ds(t) = 0. \tag{2}$$

Les théorèmes non élémentaires, dont la démonstration peut être basée sur l'unicité de la solution d'une certaine équation intégrale, correspondent aux conditions de convergence suivantes :

$$\lim_{\lambda \to 1-0} \left\{ \overline{\lim_{t \to -\infty}} \left(\operatorname*{Sup}_{t - t' \leq T(t,\lambda)} s(t') - s(t) \right) \right\} = 0 \tag{3}$$

et

$$\lim_{\lambda \to 1-0} \left\{ \underline{\lim_{t \to -\infty}} \left(\operatorname*{Inf}_{t - t' \leq T(t,\lambda)} [s(t') - s(t)] \right) \right\} = 0. \tag{4}$$

Nous nous proposons de reprendre complètement, dans ce Mémoire et dans un autre qui lui fera suite, l'étude de ces différents théorèmes.

D'une part, nous verrons que, pour chaque procédé de sommation, chacun des théorèmes inverses correspondant aux conditions de convergence indiquées plus haut est en fait un corollaire d'un théorème qui, avec une condition plus générale, donne une limitation, pour t infiniment grand, de la différence $\Psi[\xi(t)] - s(t)$, où $\Psi(x)$ désigne la valeur de l'intégrale qui sert à définir le procédé de sommation considéré, et $\xi(t)$ une certaine fonction de t dont la valeur appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ et qui tend vers x_0 quand t tend vers $+\infty$ ([2]).

En particulier, le théorème inverse relatif à la condition (1) est un corollaire d'un théorème du type suivant :

([2]) Nous supposons, comme Karamata, que $\varphi(0, x) = 1$ ou $\int_0^{\infty} \psi(t, x)\, dt = 1$. Ceci ne restreint pas la généralité de nos résultats, car on peut toujours se ramener à ce cas en divisant $\varphi(\ldots$ par $\varphi(0, x)$ ou $\psi(t, x)$ par $\int_0^{\infty} \psi(t, x)\, dt$, ce qui ne modifie pas le procédé de sommation considéré (ou plus exactement, le remplace par un procédé équivalent).

Des généralisations d'un autre genre ont été données par H. R. Pitt ([10] et [11]).

Il existe une constante τ telle que, si l'on a pour tout λ supérieur à 1

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left\{\sup_{t\leq t'\leq T(t,\lambda)}|s(t')-s(t)|\right\}\leq\omega\log\lambda,$$

on a

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,|\Psi[\xi(t)]-s(t)|\leq\tau\omega.$$

Le théorème inverse relatif à la condition (2), qui résulte d'ailleurs de celui relatif à la condition (1), est aussi un corollaire d'un théorème du type suivant :

Il existe une constante τ^* telle que l'on ait toujours

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,|\Psi[\xi(t)]-s(t)|\leq\tau^*\,\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,|\hat{s}(x)|,$$

où

$$\hat{s}(x)=s(x)-\frac{1}{\Lambda(x)}\int_0^x s(t)\,d\Lambda(t),$$

quantité qui est égale à $\frac{1}{\Lambda(x)}\int_0^x\Lambda(t)\,ds(t)$ dans le cas où $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t=0$ [ce qu'il faut obligatoirement supposer si l'on considère un procédé de sommation défini par l'intégrale $\int_0^{+\infty}\varphi(t,x)\,ds(t)$] (3).

On pourrait établir les deux théorèmes cités en prenant exactement les mêmes hypothèses que Karamata pour le théorème inverse relatif à la condition (1). Nous utiliserons ici des hypothèses un peu plus restrictives (4), mais qui sont satisfaites pour la plupart des procédés usuels, et cela nous permettra de déterminer exactement les valeurs les plus petites possibles pour τ et τ^*.

On verra que, tandis que, dans les théorèmes qui donnent comme corollaires les théorèmes inverses relatifs aux conditions (1) et (2), on ne suppose rien sur le comportement de $\Psi(x)$, ceux qui donnent comme corollaires les théorèmes inverses relatifs aux conditions (3) et (4) contiennent une hypothèse qui exprime une certaine régularité dans ce comportement, pour x tendant vers x_0.

D'autre part, nous donnerons des énoncés qui comportent une condition unilatérale correspondant à (1) de la même façon que (4) correspond à (3), à savoir

$$\lim_{t\to+\infty}\left\{\inf_{t\leq t'\leq T(t,\lambda)}[s(t')-s(t)]\right\}=0\quad(5).$$

---

(3) Des résultats de ce genre ont été établis pour le procédé d'Abel par Aurel Wintner [15], H. Hadwiger [4], Philip Hartman [5], et R. P. Agnew [1].

(4) Du moins, nos hypothèses sont plus restrictives que celles de Karamata si l'on se limite, comme lui, au cas où $\varphi(t,x)$ est réelle et fonction non croissante de t, ou bien où $\psi(t,x)$ est réelle ≥ 0. Mais nous supposons en général $\varphi(t,x)$ ou $\psi(t,x)$ réelle ou complexe, ainsi que $s(t)$.

(5) Ici le noyau $\varphi(t,x)$ ou $\psi(t,x)$ est supposé réel ainsi que $s(t)$. Des résultats du même genre ont été donnés par Ramaswami ([12] et [13]).

Nous réservons pour notre deuxième Mémoire les théorèmes dont la démonstration fait appel à la propriété d'unicité mentionnée plus haut pour la solution d'une certaine équation intégrale, ou à une propriété liée à celle-là, théorèmes que nous appellerons « de type non élémentaire ».

Nous n'énoncerons en détail que les théorèmes correspondant au cas où $\Lambda(t)=t$ et $\xi(t)=t$ ou $\frac{t}{\alpha}$, $\mathcal{E}$ étant l'ensemble des nombres réels supérieurs à un nombre a positif ou nul, et x_0 étant égal à $+\infty$, cas que nous appellerons le « cas canonique ». Nous indiquerons simplement, à la fin du deuxième Mémoire, comment les énoncés plus généraux s'en déduisent.

Par contre, nous donnerons, comme application de nos résultats, quelques énoncés particuliers où figurera la série $\sum_{n}^{-\infty,\prime} u_n$ au lieu de la fonction $s(t)$.

Nous ne nous attacherons pas à obtenir les énoncés les plus généraux possibles, mais plutôt à donner des méthodes de démonstration.

Quelques résultats de ce Mémoire ont été donnés, sous une forme un peu plus générale, dans notre Note [3] (6), et quelques résultats de notre second Mémoire ont été donnés, dans un cas particulier, dans notre Note [2].

I. — Préliminaires.

1.1. Pour éviter toute ambiguïté, nous précisons une fois pour toutes les points suivants :

Il est entendu que toutes les intégrales ordinaires (c'est-à-dire autres que des intégrales de Stieltjes) que nous considérerons s'entendent au sens de Lebesgue.

a et b étant finis, avec $a<b$, si $f(t)$ est une fonction complexe définie sur l'intervalle $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est définie à l'aide des intégrales des parties réelle et imaginaire de $f(t)$, obtenues par le procédé de Lebesgue. L'intégrale $\int_b^a f(t)\,dt$ est définie comme égale à $-\int_a^b f(t)\,dt$.

On pose

$$\int_a^a f(t)\,dt=0.$$

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est définie comme limite pour L infini de $\int_a^L f(t)\,dt$. Quand cette limite existe, l'intégrale est dite *convergente*. La fonction $f(t)$ est

(6) Signalons en passant que, dans cette Note, la formule donnée pour $\tau^*(x)$ au théorème 2 donne en réalité la valeur de $\tau^*(x)-1$.

dite *sommable* sur l'intervalle $(a, +\infty)$ si elle est sommable sur tout intervalle fini (a, L) (de sorte que $|f(t)|$ l'est aussi) et si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ est convergente. On sait que la sommabilité de $f(t)$ sur l'intervalle $(a, +\infty)$ entraîne la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$.

Pour les intégrales de Stieltjes, les définitions élémentaires suivantes nous suffiront :

$f(t)$ étant continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et $g(t)$ à variation bornée sur cet intervalle, et ces deux fonctions pouvant être réelles ou complexes, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ se définit comme limite pour $\mathrm{Max}(x_i - x_{i-1})$ tendant vers zéro de :

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})],$$

avec

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad \text{et} \qquad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i.$$

$\int_b^a f(t)\,dg(t)$ se définit comme égale à $-\int_a^b f(t)\,dg(t)$.

On pose

$$\int_a^a f(t)\,dg(t) = 0.$$

$f(t)$ étant continue pour $t \geq a$ et $g(t)$ à variation bornée sur tout intervalle fini $[a, L]$, et ces deux fonctions pouvant être réelles ou complexes, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ se définit comme limite pour L infini de $\int_a^L f(t)\,dg(t)$. Lorsque cette limite existe, l'intégrale est dite *convergente*.

1.1.1. Rappelons les faits bien connus suivants :

a. Les intégrales $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ ou $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ ne sont pas modifiées si l'on ajoute une constante à $g(t)$.

b. Pour toute fonction $g(t)$ à variation bornée sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b dg(t) = g(b) - g(a).$$

c. Si $g(t)$ est à variation bornée sur $[a, b]$ et si $\theta(u)$ est réelle et continue sur $[\alpha, \beta]$ et croit de a à b quand u croit de α à β, la fonction $\gamma(u)$ définie par

$\gamma(u) = g[\theta(u)]$ est à variation bornée sur $[\alpha, \beta]$ et l'on a, quelle que soit $f(t)$ continue sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \int_\alpha^\beta f[\theta(u)]\, d\gamma(u).$$

d. Comme conséquence de cela, si $g(t)$ est définie pour $t \geq a$ et à variation bornée sur tout intervalle fini $[a, L]$, et si $\theta(u)$ est une fonction réelle continue pour $u \geq \alpha$ et qui croît de a à $+\infty$ quand u croît de α à $+\infty$, de sorte que la fonction $\gamma(u)$ définie par $\gamma(u) = g[\theta(u)]$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[\alpha, \Lambda]$, alors, $f(t)$ étant une fonction quelconque continue pour $t \geq a$, toutes les fois que l'une des intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\, dg(t)$ et $\int_\alpha^{+\infty} f[\theta(u)]\, d\gamma(u)$ est convergente, l'autre l'est aussi et lui est égale.

e. Si $\gamma(t)$ est sommable sur (a, b), la fonction $g(t)$ définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$ par $g(t) = \int_a^t \gamma(u)\, du$ est à variation bornée sur cet intervalle et, quelle que soit $f(t)$ continue sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = \int_a^b f(t)\, \gamma(t)\, dt.$$

De plus, la variation totale de $g(t)$ sur $[a, b]$ est égale à $\int_a^b |\gamma(u)|\, du$.

f. $f(t)$ étant continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et $g(t)$ à variation bornée sur cet intervalle, la fonction $h(t)$ définie sur $[a, b]$ par $h(t) = \int_a^t f(u)\, dg(u)$ est à variation bornée sur $[a, b]$ et, si $\varphi(t)$ est une autre fonction continue sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b \varphi(t)\, dh(t) = \int_a^b \varphi(t)\, f(t)\, dg(t).$$

g. Si $\varphi(t)$ est sommable sur (a, b) et si $f(t)$ satisfait sur l'intervalle fermé $[a, b]$ à $f(t) = \int_a^t \varphi(u)\, du + \text{const.}$, [de sorte que $f(t)$ est continue sur cet intervalle], quelle que soit $g(t)$ à variation bornée sur $[a, b]$, on a la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)\, dg(t) = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b \varphi(t)\, g(t)\, dt.$$

h. Les nombres $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ formant une suite croissante, si une fonction $g(t)$ définie sur l'intervalle fermé $[x_0, x_n]$ garde une valeur constante g_i dans chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ (de sorte qu'elle est à

variation bornée sur $[x_0, x_n]$), on a, quelle que soit $f(t)$ continue sur $[x_0\, x_n]$,

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = [g_1 - g(x_0)]f(x_0) + \sum_{i=1}^{i=n-1} [g_{i+1} - g_i]f(x_i) + [g(x_n) - g_n]f(x_n).$$

1.1.2. $f(t)$ satisfaisant pour $t \geq a$ à $f(t) = \int_a^t \varphi(u)\,du + \text{const.}$, avec $\varphi(t)$ sommable sur tout intervalle fini (a, L), et $g(t)$ étant à variation bornée sur tout intervalle fini $[a, \mathrm{L}]$, l'égalité

$$\int_a^{\mathrm{L}} f(t)\,dg(t) = f(\mathrm{L})\,g(\mathrm{L}) - f(a)\,g(a) - \int_a^{\mathrm{L}} \varphi(t)\,g(t)\,dt \tag{5}$$

montre que, *si le produit $f(t)\,g(t)$ tend vers zéro pour t infini*, la convergence de l'une des intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ et $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,g(t)\,dt$ entraîne celle de l'autre, avec

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t) = -f(a)\,g(a) - \int_a^{+\infty} \varphi(t)\,g(t)\,dt. \tag{6}$$

Il faut noter que, *si $\varphi(t) \leq 0$, de sorte que $f(t)$ est non croissante, et si $f(t)$ tend vers zéro pour t infini*, la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ suffit à entraîner que $f(t)\,g(t)$ tende vers zéro pour t infini, de sorte que *dans ce cas la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ entraîne celle de $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,g(t)\,dt$, avec la formule ci-dessus.*

Nous pouvons écarter de suite le cas où $f(t) = 0$ pour t supérieur ou égal à un certain t_0, auquel cas il n'y a rien à démontrer.

Supposons donc $f(t) > 0$ quel que soit $t \geq 0$.

Si l'on pose

$$\int_a^t f(u)\,dg(u) = h(t),$$

on a pour $t > a$

$$g(t) - g(a) = \int_a^t dg(u) = \int_a^t \frac{1}{f(u)}\,dh(u).$$

Comme on a, pour $t \geq a$,

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{f(a)} + \int_a^t \frac{-\varphi(u)}{[f(u)]^2}\,du \quad (7), \tag{7}$$

(7) En effet, si $t > a$, la fonction $\frac{1}{f(u)}$ est absolument continue sur l'intervalle $[a, t]$ et a presque partout sur cet intervalle une dérivée égale à $\frac{-\varphi(u)}{[f(u)]^2}$. [Plus précisément, ceci a lieu partout où $f'(u)$ existe et est égale à $\varphi(u)$.]

on obtient par intégration par parties :

$$g(t)-g(a)=\frac{h(t)}{f(t)}+\int_a^t\frac{\varphi(u)\,h(u)}{[f(u)]^2}\,du,$$

d'où

$$f(t)\,g(t)=f(t)\,g(a)+h(t)+f(t)\int_a^t\frac{\varphi(u)\,h(u)}{[f(u)]^2}\,du. \tag{8}$$

La convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dg(t)$ équivaut au fait que $h(t)$ tend vers une limite finie I quand t tend vers $+\infty$. En tenant compte de (7), (8) peut s'écrire

$$f(t)\,g(t)=f(t)\,g(a)+h(t)+f(t)\left[\frac{1}{f(a)}-\frac{1}{f(t)}\right]\mathrm{I}+f(t)\int_a^t\frac{\varphi(u)\,[h(u)-\mathrm{I}]}{[f(u)]^2}\,du.$$

Pour t infini, le premier terme du second membre tend vers zéro, le second vers I, le troisième vers — I. Il reste à montrer que le dernier tend vers zéro :

Posons pour simplifier :

$$\mathrm{F}(t)=\int_a^t\frac{\varphi(u)\,[h(u)-\mathrm{I}]}{[f(u)]^2}\,du.$$

Quel que soit $t_0\geqq a$, on a pour $t\geqq t_0$,

$$|\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(t_0)|\leqq\operatorname*{Sup}_{u\geq t_0}|h(u)-\mathrm{I}|\int_{t_0}^t\frac{|\varphi(u)|}{[f(u)]^2}\,du$$

ou

$$|\mathrm{F}(t)-\mathrm{F}(t_0)|\leqq\left[\frac{1}{f(t)}-\frac{1}{f(t_0)}\right]\operatorname*{Sup}_{u\geq t_0}|h(u)-\mathrm{I}|,$$

d'où

$$|f(t)\,\mathrm{F}(t)|\leqq\left[1-\frac{f(t)}{f(t_0)}\right]\operatorname*{Sup}_{u\geq t_0}|h(u)-\mathrm{I}|+|f(t)\,\mathrm{F}(t_0)|.$$

On a donc, quel que soit $t_0\geqq a$,

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,|f(t)\mathrm{F}(t)|\leqq\operatorname*{Sup}_{u\geq t_0}|h(u)-\mathrm{I}|,$$

et, comme le second membre tend vers zéro quand t_0 tend vers $+\infty$, ceci donne

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)\,\mathrm{F}(t)=0.$$

La continuité absolue sur $[a,\,t]$ résulte de ce que, si $a\leqq t'<t''\leqq t$,

$$\left|\frac{1}{f(t'')}-\frac{1}{f(t')}\right|=\frac{f(t')-f(t'')}{f(t')f(t'')}\leqq\frac{\int_{t'}^{t''}|\varphi(u)|\,du}{[f(t)]^2}.$$

1.2. Dans un autre ordre d'idées, nous aurons à utiliser plusieurs fois les remarques simples suivantes :

a. *$f(x)$ étant une fonction réelle définie pour x réel supérieur à a, si de toute suite de nombres réels supérieurs à a, appartenant à un certain ensemble* E *et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite partielle $\{x_n\}$ telle que $f(x_n)$ tende vers une limite l au plus égale à un nombre fixe* M, *on a*

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} f(x) \leq \overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} f(x) \leq M.$$

De même, si de toute suite ayant les propriétés indiquées on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $f(x_n)$ tende vers une limite supérieure ou égale à un nombre fixe m, on a

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} f(x) \geq \underline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} f(x) \geq m.$$

Ceci résulte simplement de ce qu'il existe toujours deux suites $\{\xi_n\}$ et $\{\xi'_n\}$ tendant vers $+\infty$, formées de nombres de E, et telles que $f(\xi_n)$ tende vers $\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} f(x)$ et $f(\xi'_n)$ vers $\underline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} f(x)$, et que toute suite extraite de l'une des suites $\{f(\xi_n)\}$ ou $\{f(\xi'_n)\}$ tend vers la même limite que celle-ci.

b. *$f(x)$ étant une fonction réelle ou complexe définie pour x réel $> a$, si de toute suite de nombres réels supérieurs à a, appartenant à un certain ensemble* E, *et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $f(x_n)$ tende vers une certaine limite* L, *alors $f(x)$ tend vers* L *quand x tend vers $+\infty$ sur l'ensemble* E.

On le voit en appliquant la première partie de la remarque *a* à la fonction $|f(x) - L|$, avec M positif quelconque.

1.3. Nous aurons aussi à utiliser les lemmes suivants :

Lemme 1. — *Soit $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots$ une suite de fonctions réelles sommables sur un même intervalle (a, b), fini ou non.*

S'il existe une fonction positive ou nulle $G(t)$ sommable sur (a, b) et telle que l'on ait, quel que soit n et quel que soit t appartenant à (a, b), $|f_n(t)| \leq G(t)$, on a

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \int_a^b f_n(t)\,dt \leq \int_a^b \left[\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(t)\right] dt.$$

Lemme 2. — *Soit $f_\alpha(t)$ une fonction réelle sommable sur l'intervalle (a, b), fini ou non, et dépendant du paramètre x qui parcourt l'ensemble des nombres réels supérieurs à un certain nombre* A.

S'il existe une fonction positive ou nulle $G(t)$ *sommable sur* (a, b) *et telle que l'on ait, quel que soit* x *supérieur à* A *et quel que soit* t *appartenant à* (a, b), $|f_x(t)| \leq G(t)$, *alors, quelle que soit la fonction réelle* $g(t)$ *sommable sur* (a, b) *et satisfaisant à* $g(t) \geq \overline{\lim}_{x \to +\infty} f_x(t)$, *on a*

$$\overline{\lim}_{x \to +\infty} \int_a^b f_x(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt \quad (^8).$$

Plus généralement, E *étant un ensemble de nombres réels supérieurs à* A, *non borné supérieurement, quelle que soit la fonction* $g(t)$ *sommable sur* (a, b) *et satisfaisant à* $g(t) \geq \overline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f_x(t)$, *on a*

$$\overline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} \int_a^b f_x(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt.$$

Pour établir le lemme 1, il suffit de remarquer que l'on a

$$\overline{\lim}_{n \to +\infty} f_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t), \qquad \text{avec} \quad \varphi_n(t) = \operatorname{Sup}_{n' \geq n} f_{n'}(t).$$

$\varphi_n(t)$ est mesurable sur (a, b) comme borne supérieure d'une famille dénombrable de fonctions mesurables, et elle est sommable parce que $|\varphi_n(t)| \leq G(t)$.

Comme $f_n(t) \leq \varphi_n(t)$, on a

$$\int_a^b f_n(t)\, dt \leq \int_a^b \varphi_n(t)\, dt.$$

D'après le théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe $\int$, le second membre tend pour n infini vers $\int_a^b \left[\overline{\lim}_{n \to +\infty} f_n(t)\right] dt$, et l'on obtient ainsi l'inégalité indiquée.

Pour le lemme 2, il suffit d'établir la deuxième partie, puisque la première n'est qu'un cas particulier de celle-ci, obtenu en prenant E égal à l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à A.

On remarque que, quelle que soit la suite $\{x_n\}$ formée de nombres de E et tendant vers $+\infty$, on a

$$\overline{\lim}_{n \to +\infty} f_{x_n}(t) \leq g(t),$$

de sorte que le lemme 1 donne

$$\overline{\lim}_{n \to +\infty} \int_a^b f_{x_n}(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt.$$

---

(8) Nous ne pouvons pas écrire $\overline{\lim}_{x \to +\infty} \int_a^b f_x(t)\, dt \leq \int_a^b \left[\overline{\lim}_{x \to +\infty} f_x(t)\right] dt$ parce que rien ne prouve que $\overline{\lim}_{x \to +\infty} f_x(t)$ soit une fonction mesurable.

Or on peut choisir la suite $\{x_n\}$ de façon que $\int_a^b f_{x_n}(t)\,dt$ tende vers

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}} \int_a^b f_x(t)\,dt.$$

Il est clair que l'on peut remplacer dans les énoncés ci-dessus les $\overline{\lim}$ par des $\underline{\lim}$, en changeant le sens des inégalités.

1.4. Indiquons également deux autres lemmes que nous aurons aussi à utiliser plusieurs fois :

LEMME 3. — *$f(t)$ étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, définissons une fonction $g(t)$ pour $t \geq 1$ par $g(t) = \int_t^{+\infty} f(u)\,du$.*

Si $f(t)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$, le produit $g(t)\log t$ tend vers zéro pour t infini, $\frac{g(t)}{t}$ est sommable sur $(1, +\infty)$, et l'on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\log t\,dt.$$

LEMME 4. — *$f(t)$ étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle $(0, 1)$, définissons une fonction $g(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$ par $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$.*

Si $f(t)\log\frac{1}{t}$ est sommable sur $(0, 1)$, le produit $g(t)\log\frac{1}{t}$ tend vers zéro avec t, $\frac{g(t)}{t}$ est sommable sur $(0, 1)$, et l'on a

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_0^1 f(t)\log\frac{1}{t}\,dt.$$

Les deux lemmes se démontrent de façon semblable, nous donnerons la démonstration seulement pour le premier.

Il faut noter tout d'abord que la fonction $\frac{g(t)}{t}$ est continue pour $t \geq 1$.

a. Ceci étant, traitons pour commencer le cas où $f(t) \geq 0$, de sorte qu'il en est de même de $g(t)$.

En premier lieu, on peut écrire

$$g(t)\log t = \int_t^{+\infty} f(u)\log t\,du \leq \int_t^{+\infty} f(u)\log u\,du,$$

et l'on voit ainsi que $g(t)\log t$ tend vers zéro pour t infini.

D'autre part, comme $g(t)=\int_1^t -f(u)\,du+\text{const.}$, on a par intégration par parties :

$$\int_1^L \frac{g(t)}{t}\,dt = g(L)\log L + \int_1^L f(t)\log t\,dt.$$

Quand L tend vers $+\infty$, le second membre tend vers $\int_1^{+\infty} f(t)\log t\,dt$.

La fonction $\frac{g(t)}{t}$ étant positive ou nulle, ceci montre qu'elle est sommable sur $(1, +\infty)$ et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\log t\,dt.$$

b. Pour le cas général, posons

$$\int_t^{+\infty} |f(u)|\,du = G(t).$$

D'après ce que l'on vient de démontrer, $G(t)\log t$ tend vers zéro pour t infini et $\frac{G(t)}{t}$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

L'inégalité $|g(t)| \leq G(t)$ montre alors que $g(t)\log t$ tend vers zéro pour t infini et que $\frac{g(t)}{t}$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

Le calcul fait plus haut montre encore que

$$\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} f(t)\log t\,dt.$$

II. — Préliminaires (*suite*).

2.1. A chaque fonction réelle ou complexe $s(t)$ définie pour t réel ≥ 0 et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, nous associerons un certain nombre de fonctions définies comme nous allons l'indiquer.

Il est entendu que λ désignera toujours une variable réelle supérieure à 1 et E un ensemble variable de nombres réels positifs, supposé non borné supérieurement.

2.2. Nous posons d'abord

$$W_s(t, \lambda) = \operatorname*{Sup}_{t-t'<\lambda} |s(t') - s(t)|,$$

$$w_s(\lambda) = \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, W_s(t, \lambda),$$

$$w_s(E, \lambda) = \overline{\lim_{\substack{t\to+\infty \\ t\in E}}}\, W_s(t, \lambda).$$

Il est clair que $W_s(t, \lambda)$, $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$ sont essentiellement positives ou nulles. Mais, tandis que $W_s(t, \lambda)$ a une valeur finie, $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$ peuvent prendre la valeur $+\infty$.

Dans tous les cas, on a quel que soit E : $w_s(E, \lambda) \leq w_s(\lambda)$.

D'autre part, $W_s(t, \lambda)$, $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$ ne peuvent décroître quand λ croît.

Par suite, chacune des fonctions $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$, si elle n'est pas constamment égale à $+\infty$, a une valeur finie pour λ voisin de 1 et tend vers une limite finie positive ou nulle quand λ tend vers 1. Si elle est constamment égale à $+\infty$, on peut dire qu'elle tend vers $+\infty$ quand λ tend vers 1. Dans tous les cas, nous désignerons par $w_s(1+0)$ et $w_s(E, 1+0)$ les limites de $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$ pour λ tendant vers 1.

2.2.1. *On voit aisément que l'on a, quels que soient λ_1 et $\lambda_2 > 1$,*

$$w_s(\lambda_1\lambda_2) \leq w_s(\lambda_1) + w_s(\lambda_2). \tag{9}$$

Cette inégalité n'a besoin d'être démontrée que si $w_s(\lambda_1) < +\infty$ et $w_s(\lambda_2) < +\infty$.

Soit ε un nombre positif quelconque. Il existe un nombre positif t_0 tel que, pour $t \geq t_0$,

$$W_s(t, \lambda_1) \leq w_s(\lambda_1) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad W_s(t, \lambda_2) \leq w_s(\lambda_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quel que soit t positif, si $t \leq t' \leq \lambda_1 t$, on a

$$s(t') - s(t) \leq W_s(t, \lambda_1) \leq W_s(t, \lambda_1) + W_s(\lambda_1 t, \lambda_2),$$

et, si $\lambda_1 t < t' \leq \lambda_1\lambda_2 t$, on a

$$s(t') - s(t) \mid \leq \mid s(\lambda_1 t) - s(t) \mid + \mid s(t') - s(\lambda_1 t) \mid \leq W_s(t, \lambda_1) + W_s(\lambda_1 t, \lambda_2).$$

On a donc

$$W_s(t, \lambda_1\lambda_2) \leq W_s(t, \lambda_1) + W_s(\lambda_1 t, \lambda_2).$$

Si $t \geq t_0$, le second membre est au plus égal à $w_s(\lambda_1) + w_s(\lambda_2) + \varepsilon$.

Par conséquent

$$w_s(\lambda_1\lambda_2) \leq w_s(\lambda_1) + w_s(\lambda_2) + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitrairement petit, on a bien l'inégalité annoncée.

2.2.2. — Il résulte de là que *l'une des deux circonstances suivantes se présente nécessairement :*

ou bien $w_s(\lambda) = +\infty$ *quel que soit* λ ;
ou bien $w_s(\lambda) < +\infty$ *quel que soit* λ.

Il suffit d'observer que, si $w_s(\lambda_0) < +\infty$, on a quel que soit λ : $w_s(\lambda) < +\infty$.

En effet, il résulte de l'inégalité (9) que l'on a pour p entier ≥ 1

$$w_s(\lambda_0^p) \leq p w_s(\lambda_0). \tag{10}$$

Quel que soit λ, il existe un entier p tel que $\lambda_0^p \geq \lambda$, et l'on a

$$w_s(\lambda) \leq w_s(\lambda_0^p) \leq p w_s(\lambda_0) < +\infty.$$

2.2.3. — Notons que, *dans le cas où* $w_s(\lambda) < +\infty$, *il existe deux constantes positives* A *et* B *telles que l'on ait quel que soit* λ

$$w_s(\lambda) \leq A \log \lambda + B. \tag{11}$$

En effet, si dans le raisonnement qui précède on prend pour p le plus petit entier satisfaisant à l'inégalité indiquée, on obtient

$$w_s(\lambda) \leq w_s(\lambda_0)\left[1 + \frac{\log \lambda}{\log \lambda_0}\right].$$

2.2.4. — D'autre part, on voit facilement que, *lorsque* $w_s(\lambda) < +\infty$, *il existe deux nombres positifs* H *et* K *tels que l'on ait quels que soient* t *et* t' *positifs*

$$s(t') - s(t) \leq H\left|\log \frac{t'}{t}\right| + K. \tag{12}$$

Il est clair que l'on peut supposer sans inconvénient $t < t'$.

On voit d'abord que, pour λ fixé, $W_s(t, \lambda)$ est borné indépendamment de t. En effet $W_s(t, \lambda)$ est manifestement borné sur tout intervalle fini tel que $[0, a]$ et sa plus grande limite pour t infini a une valeur finie.

Si l'on pose

$$\operatorname*{Sup}_{t>0} W_s(t, \lambda) = W_s(\lambda),$$

on voit que l'on a quels que soient λ_1 et $\lambda_2 > 1$

$$W_s(\lambda_1 \lambda_2) \leq W_s(\lambda_1) + W_s(\lambda_2),$$

car, quel que soit t positif, si $t \leq t' \leq \lambda_1 t$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leq W_s(\lambda_1) \leq W_s(\lambda_1) + W_s(\lambda_2),$$

et, si $\lambda_1 t < t' \leq \lambda_1 \lambda_2 t$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leq |s(\lambda_1 t) - s(t)| + |s(t') - s(\lambda_1 t)| \leq W_s(\lambda_1) + W_s(\lambda_2).$$

Il résulte de là que, quels que soient λ et $p \geq 1$,

$$W_s(\lambda^p) \leq p W_s(\lambda).$$

Choisissons une valeur λ_0 pour λ. Alors, t et t' étant deux nombres positifs

quelconques satisfaisant à $t < t'$, si p est le plus petit entier tel que $\lambda_0^p t \geq t'$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leq W_s(\lambda_0^p) \leq p\, W_s(\lambda_0) < W_s(\lambda_0) \left[\frac{\log \frac{t'}{t}}{\log \lambda_0} + 1 \right].$$

Notons que, si l'on fait $t' = 1$ dans (12), on obtient

$$|s(t) - s(1)| \leq H |\log t| + K,$$

d'où

$$|s(t)| \leq H |\log t| + K', \qquad \text{avec} \quad K' = K + |s(1)|.$$

L'hypothèse $w_s(\lambda) < +\infty$ *entraîne donc*

$$s(t) = O[\log t] \text{ pour } t \text{ tendant vers } +\infty.$$

2.2.5. Remarquons enfin que, si l'on a pour une valeur de λ : $w_s(\lambda) = 0$, il en est de même pour toutes les autres valeurs de λ.

En effet, si $w_s(\lambda_0) = 0$, (10) montre que pour p entier ≥ 1 $w_s(\lambda_0^p) = 0$. Comme on l'a dit plus haut, quel que soit λ, il existe un entier p tel que $\lambda_0^p \geq \lambda$ et l'on voit que $w_s(\lambda) = 0$.

Il résulte de là que *l'on a ou bien* $w_s(\lambda) > 0$ *quel que soit* λ *ou bien* $w_s(\lambda) = 0$ *quel que soit* λ.

2.3. Dans le cas où $s(t)$ est supposée réelle, nous posons encore

$$-\Pi_s'(t, \lambda) = \operatorname*{Inf}_{t \leq t' \leq \lambda t} [s(t') - s(t)],$$

$$\Pi_s''(t, \lambda) = \operatorname*{Sup}_{\frac{t}{\lambda} \leq t' \leq t} [s(t') - s(t)],$$

$$\varpi_s'(E, \lambda) = \overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}}\, \Pi_s'(t, \lambda),$$

$$\varpi_s''(E, \lambda) = \overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}}\, \Pi_s''(t, \lambda).$$

Il est clair que $\Pi_s'(t, \lambda)$, $\Pi_s''(t, \lambda)$, $\varpi_s'(E, \lambda)$, $\varpi_s''(E, \lambda)$ sont essentiellement positifs ou nuls et ne peuvent décroître quand λ croît. $\Pi_s'(t, \lambda)$ et $\Pi_s''(t, \lambda)$ ont une valeur finie, mais $\varpi_s'(E, \lambda)$ et $\varpi_s''(E, \lambda)$ peuvent avoir une valeur finie ou la valeur $+\infty$.

On voit immédiatement que, λ étant fixé, si l'on a $\Pi_s'(t, \lambda) \leq k$ pour $t \geq t_0$, l'on a $\Pi_s'(t, \lambda) \leq k$ pour $t \geq \lambda t_0$, et, si l'on a $\Pi_s''(t, \lambda) \leq k$ pour $t \geq t_0$, on a aussi $\Pi_s'(t, \lambda) \leq k$ pour $t \geq t_0$. Il en résulte que, lorsque E est l'ensemble de tous les nombres positifs, $\varpi_s'(E, \lambda)$ et $\varpi_s''(E, \lambda)$ ont la même valeur. Nous désignerons cette valeur commune par $\varpi_s(\lambda)$.

Puisque $\varpi_s(\lambda)$ est la valeur de $\varpi_s'(E, \lambda)$ pour un E particulier, $\varpi_s(\lambda)$ est ≥ 0 et ne peut décroître quand λ croît.

D'autre part, comme $\Pi'_s(t, \lambda) \leqq W_s(t, \lambda)$, on a toujours $\varpi_s(E, \lambda) \leqq \omega_s(E, \lambda)$ et par suite $\varpi_s(\lambda) \leqq \omega_s(\lambda)$.

De plus, il est clair que, quel que soit E, $\varpi'_s(E, \lambda) \leqq \varpi_s(\lambda)$ et $\varpi''_s(E, \lambda) \leqq \varpi_s(\lambda)$.

Chacune des fonctions $\varpi_s(\lambda)$, $\varpi'_s(E, \lambda)$, $\varpi''_s(E, \lambda)$, si elle n'est pas constamment égale à $+\infty$, a une valeur finie pour λ voisin de 1 et tend vers une limite finie $\geqq 0$ quand λ tend vers 1. Si elle est constamment égale à $+\infty$, on peut dire qu'elle tend vers $+\infty$ quand λ tend vers 1. Dans tous les cas, nous désignerons par $\varpi_s(1+0)$, $\varpi'_s(E, 1+0)$ et $\varpi''_s(E, 1+0)$ les limites de $\varpi_s(\lambda)$, $\varpi'_s(E, \lambda)$ et $\varpi''_s(E, \lambda)$ pour λ tendant vers 1.

2.3.1. On voit, par des raisonnements tout à fait semblables à ceux des paragraphes 2.2.1 à 2.2.5, que *l'on a nécessairement ou bien* $\varpi_s(\lambda) = +\infty$ *quel que soit* λ, *ou bien* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$ *quel que soit* λ, et aussi que *l'on a nécessairement ou bien* $\varpi_s(\lambda) > 0$ *quel que soit* λ *ou bien* $\varpi_s(\lambda) = 0$ *quel que soit* λ.

On voit également que, *lorsque* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *il existe deux constantes positives* H *et* K *telles que l'on ait, quels que soient* t *et* t' *satisfaisant à* $0 < t < t'$,

$$s(t') - s(t) \geqq -H \log \frac{t'}{t} - K. \tag{13}$$

2.4. On peut aussi associer à chaque fonction réelle ou complexe $s(t)$ définie pour t réel $\geqq 0$ et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, des fonctions analogues aux précédentes et qui dépendent en outre d'une fonction réelle $\Lambda(t)$ continue et dérivable pour $t \geqq 0$ et qui croît de 0 à $+\infty$ quand t croît de 0 à $+\infty$.

On définit d'abord, à partir de $\Lambda(t)$, une fonction T des deux variables réelles positives t et α par $T(t, \alpha) = V[\alpha\Lambda(t)]$, où V est la fonction inverse de Λ. On pose ensuite

$$W_{s,\Lambda}(t, \lambda) = \sup_{t \leq t' \leq T(t, \lambda)} |s(t') - s(t)|,$$

$$w_{s,\Lambda}(\lambda) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} W_{s,\Lambda}(t, \lambda),$$

$$w_{s,\Lambda}(E, \lambda) = \overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}} W_{s,\Lambda}(t, \lambda),$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$-\Pi'_{s,\Lambda}(t, \lambda) = \inf_{t \leq t' \leq T(t, \lambda)} [s(t') - s(t)],$$

$$\Pi''_{s,\Lambda}(t, \lambda) = \sup_{T\left(t, \frac{1}{\lambda}\right) \leq t' \leq t} [s(t') - s(t)],$$

$$\varpi'_{s,\Lambda}(E, \lambda) = \overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}} \Pi'_{s,\Lambda}(t, \lambda),$$

$$\varpi''_{s,\Lambda}(E, \lambda) = \overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}} \Pi''_{s,\Lambda}(t, \lambda).$$

On voit de suite que, si l'on pose $\sigma(t) = s[V(t)]$, on a

$$W_{s,\Lambda}(t, \lambda) = W_{\sigma}[\Lambda(t), \lambda],$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$\Pi'_{s,\Lambda}(t,\lambda)=\Pi'_{\sigma}[\Lambda(t),\lambda] \qquad \text{et} \qquad \Pi''_{s,\Lambda}(t,\lambda)=\Pi''_{\sigma}[\Lambda(t),\lambda].$$

Par suite, on a

$$w_{s,\Lambda}(\lambda)=w_{\sigma}(\lambda), \qquad w_{s,\Lambda}(\mathrm{E},\lambda)=w_{\sigma}[\Lambda(\mathrm{E}),\lambda],$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$\varpi'_{s,\Lambda}(\mathrm{E},\lambda)=\varpi'_{\sigma}[\Lambda(\mathrm{E}),\lambda] \qquad \text{et} \qquad \varpi''_{s,\Lambda}(\mathrm{E},\lambda)=\varpi''_{\sigma}[\Lambda(\mathrm{E}),\lambda]$$

[$\Lambda(\mathrm{E})$ désignant l'ensemble des valeurs de $\Lambda(t)$ pour t appartenant à E].

Dans le cas où $s(t)$ est réelle, on voit que, si E est l'ensemble de tous les nombres réels positifs, de sorte qu'il en est de même de $\Lambda(\mathrm{E})$, $\varpi'_{s,\Lambda}(\mathrm{E},\lambda)$ et $\varpi''_{s,\Lambda}(\mathrm{E},\lambda)$ ont la même valeur $\varpi_{\sigma}(\lambda)$.

Par une convention analogue à celle faite plus haut pour $\varpi'_{s}(\mathrm{E},\lambda)$ et $\varpi''_{s}(\mathrm{E},\lambda)$, nous désignerons par $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)$ la valeur commune de $\varpi'_{s,\Lambda}(\mathrm{E},\lambda)$ et $\varpi''_{s,\Lambda}(\mathrm{E},\lambda)$ pour E égal à l'ensemble de tous les nombres réels positifs.

On a encore

$$\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)=\varpi_{\sigma}(\lambda).$$

Ces différentes relations montrent que les fonctions définies dans ce paragraphe possèdent les mêmes propriétés que celles définies précédemment. En particulier, elles sont liées entre elles par les inégalités correspondant à celles écrites plus haut, on a nécessairement ou bien $w_{s,\Lambda}(\lambda)=+\infty$ quel que soit λ, ou bien $w_{s,\Lambda}(\lambda)<+\infty$ quel que soit λ, et, de même, ou bien $w_{s,\Lambda}(\lambda)>0$ quel que soit λ, ou bien $w_{s,\Lambda}(\lambda)=0$ quel que soit λ; lorsque $s(t)$ est réelle, on a nécessairement ou bien $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)=+\infty$ quel que soit λ, ou bien $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)<+\infty$ quel que soit λ, et aussi ou bien $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)>0$ quel que soit λ, ou bien $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)=0$ quel que soit λ.

Les fonctions définies dans ce paragraphe se réduisent d'ailleurs à celles définies précédemment si $\Lambda(t)=t$.

Les conditions de convergence (1), (3) et (4) indiquées dans l'Introduction peuvent s'écrire respectivement : $w_{s,\Lambda}(\lambda)=0$, $w_{s,\Lambda}(1+0)=0$ et $\varpi_{s,\Lambda}(1+0)=0$. La condition unilatérale que nous avons indiquée comme correspondant à (1) de la même manière que (4) correspond à (3) peut s'écrire $\varpi_{s,\Lambda}(\lambda)=0$.

2.5. Si la fonction $s(t)$ est non seulement bornée sur tout intervalle fini [0, L], mais mesurable, on peut encore lui associer la fonction $\delta_s(t)$ définie pour $t>0$ par

$$\delta_s(t)=s(t)-\frac{1}{t}\int_0^t s(u)\,du.$$

Lorsque $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini [0, L], on voit, par une intégration par parties, que

$$\delta_s(t)=\frac{1}{t}\int_0^t u\,ds(u).$$

Nous allons voir que *l'hypothèse* $w_s(\lambda) < +\infty$ *équivaut à* $\delta_s(t) = O[1]$ *pour* t *infini, et l'hypothèse* $w_s(\lambda) = o$ *équivaut à* $\delta_s(t) = o[1]$ (9).

Ceci est une conséquence immédiate des résultats suivants :

1° *Si* $w_s(\lambda) < +\infty$, *on a*

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |\delta_s(t)| \leq \int_0^1 w_s\left(\frac{1}{u}\right) du. \tag{14}$$

2° *Si* $\delta_s(t) = O[1]$ *pour* $t \to +\infty$, *on a*

$$w_s(\lambda) \leq [2 + \log\lambda] \overline{\lim_{t \to +\infty}} \delta_s(t). \tag{15}$$

Pour établir le premier, nous remarquons que l'on a

$$\delta_s(t) = \int_0^1 [s(t) - s(\sigma t)]\, d\sigma.$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe 2.2.4, on a quel que soit $t > o$ et quel que soit σ compris entre o et 1 :

$$s(t) - s(\sigma t) \leq H \log \frac{1}{\sigma} + K.$$

D'autre part, comme $|s(t) - s(\sigma t)| \leq W_s\left(\sigma t, \frac{1}{\sigma}\right)$, on a

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |s(t) - s(\sigma t)| \leq w_s\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

La fonction $w_s\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ est sommable sur (o, 1) puisque, d'après le paragraphe 2.2.3,

$$w_s\left(\frac{1}{\sigma}\right) \leq A \log \frac{1}{\sigma} + B.$$

Le lemme 2 du paragraphe 1.3 donne alors (14).

Pour établir le second résultat, nous remarquons d'abord que, si l'on pose

$$S(t) = \int_0^t s(u)\, du,$$

quels que soient t et t' positifs, on a par intégration par parties :

$$\int_t^{t'} \frac{s(u)}{u}\, du = \frac{S(t')}{t'} - \frac{S(t)}{t} - \int_t^{t'} \frac{S(u)}{u^2}\, du.$$

---

(9) Ces deux faits ont été établis par Karamata ([7] et [8]), le second dans le cas où $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini [o, L], le premier dans le cas où elle est la fonction associée à une série comme il a été dit dans l'introduction. Le second avait déjà été établi dans ce dernier cas par M. Riesz ([14], § 3, p. 357).

En tenant compte de ce que $S(t) = t[s(t) - \delta_s(t)]$, ceci donne

$$s(t') - s(t) = \delta_s(t') - \delta_s(t) + \int_t^{t'} \frac{\delta_s(u)}{u}\, du \quad (16) \quad (10).$$

Supposons alors $\delta_s(t) = O[1]$ et posons

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \, |\delta_s(t)| = \omega.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre positif $t_0(\varepsilon)$ tel que, pour $t \geq t_0(\varepsilon)$,

$$|\delta_s(t)| \leq \omega + \varepsilon.$$

(16) montre alors que, pour $t \geq t_0(\varepsilon)$ et $t \leq t' \leq \lambda t$,

$$|s(t') - s(t)| \leq (\omega + \varepsilon)\left[2 + \log\frac{t'}{t}\right] \leq (\omega + \varepsilon)(2 + \log\lambda).$$

Autrement dit, pour $t \geq t_0(\varepsilon)$, on a

$$W_s(t, \lambda) \leq (\omega + \varepsilon)(2 + \log\lambda).$$

On a donc, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$w_s(\lambda) \leq (\omega + \varepsilon)(2 + \log\lambda) \quad (11).$$

2.5.1. $s(t)$ étant encore mesurable, et $\Lambda(t)$ étant, comme au paragraphe 2.4, une fonction réelle continue et dérivable pour $t \geq 0$, et qui croît de 0 à $+\infty$ quand t croît de 0 à $+\infty$, nous définirons une nouvelle fonction $\delta_{s,\Lambda}(t)$, pour $t > 0$, par

$$\delta_{s,\Lambda}(t) = s(t) - \frac{1}{\Lambda(t)} \int_0^t s(u)\, \Lambda'(u)\, du.$$

Lorsque $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ on voit, par une intégration par parties, que

$$\delta_{s,\Lambda}(t) = \frac{1}{\Lambda(t)} \int_0^t \Lambda(u)\, ds(u).$$

---

(10) Nous aurons encore à utiliser cette formule au paragraphe 3.6.

(11) Notons que le facteur $(2 + \log\lambda)$ dans (15) ne peut être remplacé par un plus petit. On le voit en considérant la fonction $s(t)$ définie par

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t < 1 \\ 1 + \log t - 2\log[1.3.\ldots.(2n-1)] & \text{pour} \quad (2n-1)! \leq t < (2n)! \\ -(1 + \log t) + 2\log(2.4.\ldots.2n) & \text{pour} \quad (2n)! \leq t < (2n+1)! \end{cases}$$

Pour cette fonction, $|\delta_s(t)| = 1$ pour $t \geq 1$ et $\omega_s(\lambda) = 2 + \log\lambda$.

On voit immédiatement que l'on a toujours

$$\delta_{s,\Lambda}(t) = \delta_{\sigma}[\Lambda(t)],$$

où $\sigma(t)$ est définie comme au paragraphe 2.4.

Il en résulte que *l'hypothèse* $w_{s,\Lambda}(\lambda) < +\infty$ *équivaut à* $\delta_{s,\Lambda}(t) = O[1]$ *pour* t *infini, et* $w_{s,\Lambda}(\lambda) = o$ *équivaut à* $\delta_{s,\Lambda}(t) = o[1]$.

III. — Théorèmes de type élémentaire, dans le cas canonique.

3.1. Pour abréger les énoncés des théorèmes, nous convenons une fois pour toutes que, dans tout ce Chapitre, nous faisons les hypothèses suivantes, qui resteront sous-entendues :

1° *Pour chaque valeur de* x *réelle et supérieure à un certain nombre* a *positif ou nul,* $\psi(t, x)$, *qui est réelle ou complexe, est une fonction de* t *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *et l'on a*

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, dt = 1. \tag{17}$$

2° $\varphi(t, x)$ *est la fonction définie pour* $x > a$ *et* $t \geq 0$ *par*

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du. \tag{18}$$

3° *Il existe une fonction positive ou nulle* $F(t)$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et telle que l'on ait, quel que soit* $x > a$ *et quel que soit* $t > 0$,

$$|x\psi(xt, x)| \leq F(t). \tag{19}$$

4° *Quand* x *tend vers* $+\infty$, $x\psi(xt, x)$ *tend vers une fonction limite* $N(t)$.

5° $s(t)$ *est une fonction réelle ou complexe, définie pour* $t \geq 0$, *mesurable et bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$, [de sorte que, pour $x > a$, l'intégrale

$$\int_0^L \psi(t, x)\, s(t)\, dt$$

existe toujours quel que soit $L > 0$] (12).

---

(12) Notons que les hypothèses indiquées pour $\psi(t, x)$ sont satisfaites en particulier si l'on prend $\psi(t, x) = \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)$, avec $N(t)$ sommable sur $(0, +\infty)$ et $\int_0^{+\infty} N(t)\, dt = 1$. [On peut prendre $a = 0$, $F(t) = |N(t)|$]. On a dans ce cas

$$\varphi(t, x) = K\left(\frac{t}{x}\right), \qquad \text{avec} \quad K(t) = \int_t^{+\infty} N(u)\, du.$$

3.1.1 On voit immédiatement que :

1° $\varphi(0, x) = 1$ *et, pour* x *fixé,* $\varphi(t, x)$ *est une fonction de* t *continue pour* $t \geq 0$ *et qui tend vers zéro pour* t *infini.*

2° $N(t)$ *est sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et l'on a*

$$\int_0^{+\infty} N(t)\,dt = 1, \tag{20}$$

car, en remplaçant t par xt dans (17), on obtient

$$\int_0^{+\infty} x\psi(xt, x)\,dt = 1.$$

3° *Quand* x *tend vers* $+\infty$, $\varphi(xt, x)$ *tend vers la fonction* $K(t)$ *définie par*

$$K(t) = \int_t^{+\infty} N(u)\,du,$$

car on a

$$\varphi(xt, x) = \int_{xt}^{+\infty} \psi(u, x)\,du = \int_t^{+\infty} x\psi(ux, x)\,du.$$

$K(0) = 1$ *et* $K(t)$ *est continue pour* $t \geq 0$ *et tend vers zéro pour* t *infini.*

4° *Quel que soit* $\alpha > 0$, *on a* $\left| x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \right| \leq \alpha F(\alpha t)$ *et* $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)$ *tend vers* $\alpha N(\alpha t)$ *quand* x *tend vers* $+\infty$, car on peut écrire

$$x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \alpha \frac{x}{\alpha} \psi\left(\frac{x}{\alpha}\alpha t, \frac{x}{\alpha}\right).$$

$\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)$ *tend vers* $K(\alpha t)$, car

$$\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\alpha t, \frac{x}{\alpha}\right).$$

3.1.2. Il faut noter d'autre part que *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$ *est certainement convergente pour* $x > a$ *si* $s(t)$ *est bornée.*

D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.1.2, *si* $s(t)$ *est en outre à variation bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$ *et nulle pour* $t = 0$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ *est aussi convergente pour* $x > a$ *et égale à la précédente,* puisque

$$\varphi(t, x) = \int_0^t -\psi(u, x)\,du + 1$$

et le produit $\varphi(t, x)s(t)$ tend vers zéro pour t infini.

Si $s(t)$ tend vers une limite finie S quand t tend vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$ tend vers S quand x tend vers $+\infty$.

En effet, pour $x > a$,

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt - S = \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\,[s(t) - S]\, dt = \int_0^{+\infty} x\psi(xt, x)\,[s(xt) - S]\, dt.$$

On a

$$|x\psi(xt, x)\,[s(xt) - S]| \leq F(t)\,\mathrm{Sup}\,|s(t) - S|,$$

et, quand x tend vers $+\infty$, $x\psi(xt, x)[s(xt) - S]$ tend vers zéro pour tout $t > 0$.

On peut donc définir un procédé de sommation au moyen de l'une des intégrales $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ ou $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$, avec $\mathfrak{E}$ égal à l'ensemble des nombres réels $> a$ et $x_0 = +\infty$ [13].

3.2. Dans plusieurs paragraphes nous supposerons que $F(t)\log t$ est sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$. Indiquons dès maintenant quelques conséquences de cette hypothèse :

a. Pour $x > a$, $\psi(t, x)\log t$ est une fonction de t sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$.

En effet, en remplaçant t par $\frac{t}{x}$ dans (19), on obtient

$$|\psi(t, x)| \leq \frac{1}{x} F\left(\frac{t}{x}\right),$$

d'où

$$|\psi(t, x)\log t| \leq \frac{1}{x} F\left(\frac{t}{x}\right)\left|\log \frac{t}{x}\right| + \frac{1}{x}|\log x|\, F\left(\frac{t}{x}\right),$$

et chacun des termes du second membre est une fonction de t sommable sur $(0, +\infty)$ puisque $F(t)|\log t|$ et $F(t)$ le sont.

b. D'après les lemmes 3 et 4 (§ 1.4), *ceci entraîne que, pour x fixe $> a$, $\varphi(t, x)\log t$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$ et $[1 - \varphi(t, x)]\log \frac{1}{t}$ tend vers zéro quand t tend vers zéro.*

$$\left[\text{On a } 1 - \varphi(t, x) = \int_0^t \psi(u, x)\, du\right].$$

c. Il résulte de *a* que *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ *est certainement convergente pour $x > a$ toutes les fois que $s(t) = O[\log t]$ pour t infini, en particulier si $w_s(\lambda) < +\infty$ (cf. § 2.2.4).*

---

[13] Il faut noter que nous n'avons pas utilisé, pour établir ce fait, l'hypothèse (4).

Il résulte de b que, si, en plus de cette condition, $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ *et nulle pour* $t=0$, *l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$ *est aussi convergente pour* $x > a$ *et égale à la précédente.*

d. $N(t)\log t$ *est sommable sur* $(0, +\infty)$ puisque $|N(t)| \leq F(t)$. Par suite, *quel que soit* $\alpha > 0$, $N(\alpha t)\log t$ *est sommable sur* $(0, +\infty)$.

e. D'après les lemmes 3 et 4, il résulte de là que, *quel que soit* $\alpha > 0$, $[1 - K(\alpha t)]\log\frac{1}{t}$ *tend vers zéro avec* t, $K(\alpha t)\log t$ *tend vers zéro pour* t *infini*, $\frac{1 - K(\alpha t)}{t}$ *est sommable sur* $(0, 1)$ et $\frac{K(\alpha t)}{t}$ *est sommable sur* $(1 + \infty)$.

En effet, on a

$$1 - K(\alpha t) = \int_0^{\alpha t} N(u)\, du = \int_0^t \alpha N(\alpha u)\, du \text{ et } K(\alpha t) = \int_{\alpha t}^{+\infty} N(u)\, du = \int_t^{+\infty} \alpha N(\alpha u)\, du.$$

f. Quel que soit $\alpha > 0$, *pour* x *fixé* $> \alpha a$, *le produit* $\left[1 - \varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\right]\log\frac{1}{t}$ *tend vers zéro avec* t, *le produit* $\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\log t$ *tend vers zéro pour* t *infini, la fonction* $\frac{1 - \varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t}$ *est sommable sur* $(0, 1)$ *et la fonction* $\frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t}$ *est sommable sur* $(1, +\infty)$.

En effet,

$$1 - \varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \int_0^{xt} \psi\left(u, \frac{x}{\alpha}\right) du = \int_0^t x\psi\left(xu, \frac{x}{\alpha}\right) du,$$

$$\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) = \int_{xt}^{+\infty} \psi\left(u, \frac{x}{\alpha}\right) du = \int_t^{+\infty} x\psi\left(xu, \frac{x}{\alpha}\right) du.$$

D'autre part, $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, car, comme

$$\left|x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\right| \leq \alpha F(\alpha t),$$

on a

$$\left|x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\log t\right| \leq \alpha F(\alpha t)\,|\log \alpha t| + \left|\log\frac{1}{\alpha}\right| F(\alpha t).$$

Les lemmes 3 et 4 donnent alors les résultats annoncés.

3.3. Donnons encore des formules qui joueront un rôle important dans la suite :

Supposons l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ convergente pour $x > a$.

D'abord, il est clair que, quel que soit $\alpha > 0$, on a pour $x > \alpha a$

$$\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) s(xt)\, dt. \tag{21}$$

De même, en remplaçant t par xt, dans $\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) dt = 1$, on a

$$\int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) dt = 1.$$

En retranchant membre à membre de (21) cette égalité multipliée par $s(x)$, on a

$$\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x) = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) [s(xt) - s(x)]\, dt. \tag{22}$$

3.4. Ces préliminaires terminés, nous établirons en premier lieu le théorème suivant :

• THÉORÈME 1. — *Supposons* $F(t) \log t$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *et soit* α *un nombre positif quelconque. Si l'on a* $w_s(\lambda) < +\infty$ [*ou* $\delta_s(t) = O[1]$ *pour* t *infini*], de sorte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$, *alors,* E *étant un ensemble quelconque de nombres réels* $> \alpha a$, *supposé non borné supérieurement, quelle que soit la fonction réelle positive* $g(u)$ *telle que* $N(\alpha u) g(u)$ *soit sommable sur* $(0, +\infty)$ *et que l'on ait pour tout* $u > 0$

$$\overline{\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \in E}}} |s(ut) - s(t)| \leq g(u), \tag{23}$$

on a

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} \left| \int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x) \right| \leq \int_0^{+\infty} \alpha\, |N(\alpha u)|\, g(u)\, du. \tag{24}$$

Nous poserons, pour simplifier,

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt = \Psi(x).$$

La formule (22) donne alors

$$\left| \Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x) \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) \right| |s(xt) - s(x)|\, dt. \tag{25}$$

En tenant compte de (12), on voit que la fonction sous le signe $\int$ au second membre de (25) est au plus égale à $\alpha F(\alpha t)[H|\log t| + K]$, qui est une fonction sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$.

D'autre part, comme $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)$ tend vers $\alpha N(\alpha t)$ quand x tend vers $+\infty$, (23) donne

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in E}}} \left\{\left|x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\right| |s(xt)-s(x)|\right\} \leq \alpha |N(\alpha t)| g(t).$$

Le lemme 2 du paragraphe 1.3 donne alors (24).

3.4.1. Comme cas particulier, le théorème 1 donne le suivant :

Théorème 1 *a*. — $F(t)\log t$ *étant supposée sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *si l'on a* $w_s(\lambda) < +\infty$, *on a quel que soit* $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \left|\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x)\right| \leq \int_0^1 \alpha |N(\alpha u)| w_s\left(\frac{1}{u}\right) du + \int_1^{+\infty} \alpha |N(\alpha u)| w_s(u)\, du. \tag{26}$$

On obtient immédiatement ce théorème à partir du théorème 1 en prenant pour E l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à αa et pour $g(u)$ la fonction définie par

$$g(u) = \begin{cases} w_s\left(\frac{1}{u}\right) & \text{pour } u < 1, \\ 0 & \text{pour } u = 1, \\ w_s(u) & \text{pour } u > 1. \end{cases}$$

Ceci est légitime car, d'une part, cette fonction est évidemment mesurable sur tout intervalle fini $[0, L]$ et, comme $w_s(\lambda)$ est ≥ 0 et satisfait à (11), on a

$$0 \leq g(u) \leq A |\log u| + B,$$

de sorte que $g(u)N(\alpha u)$ est sommable sur $(0, +\infty)$; d'autre part, les inégalités

$$|s(ut) - s(t)| \leq W_s(t, u) \qquad \text{pour } u > 1$$

et

$$|s(ut) - s(t)| \leq W_s\left(ut, \frac{1}{u}\right) \qquad \text{pour } u < 1,$$

montrent que

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |s(ut) - s(u)| \leq g(u).$$

3.4.2. Ce théorème entraîne à son tour comme corollaire le théorème suivant :

Théorème 2. — $F(t)\log t$ *étant supposée sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *si*

l'on a $w_s(\lambda)=o$, *ou, ce qui est équivalent,* $\delta_s(t)=o[1]$ *pour t infini, on a quel que soit* $\alpha>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\psi\left(t,\frac{x}{\alpha}\right)s(t)\,dt-s(x)\right]=o.$$

3.5. Un autre corollaire immédiat est le suivant :

$F(t)\log t$ *étant supposée sommable sur* $(o,+\infty)$, *si l'on a* $w_s(\lambda)\leq\omega\log\lambda$, *on a, quel que soit* $\alpha>0$,

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_0^{+\infty}\psi\left(t,\frac{x}{\alpha}\right)s(t)\,dt-s(x)\right|\leq\omega\int_0^{+\infty}\alpha\,|N(\alpha u)\log u|\,du.$$

Nous allons voir que l'on peut, par un raisonnement plus subtil, obtenir avec les mêmes hypothèses une inégalité meilleure.

Nous établirons en effet le résultat suivant :

Théorème 3. — $F(t)\log t$ *étant supposée sommable sur* $(o,+\infty)$, *si l'on a* $w_s(\lambda)\leq\omega\log\lambda$, *on a pour chaque* $\alpha>0$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_0^{+\infty}\psi\left(t,\frac{x}{\alpha}\right)s(t)\,dt-s(x)\right|\leq\omega\tau(\alpha), \tag{27}$$

où $\tau(\alpha)$ *est la constante définie par*

$$\tau(\alpha)=\int_0^1\frac{|1-K(\alpha u)|}{u}\,du+\int_1^{+\infty}\frac{|K(\alpha u)|}{u}\,du. \tag{28}$$

Notons d'abord que, d'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2*e*, les intégrales qui figurent dans l'expression de $\tau(\alpha)$ ont bien un sens.

D'autre part, on a toujours

$$\tau(\alpha)\leq\int_0^{+\infty}\alpha\,|N(\alpha u)\log u|\,du, \tag{29}$$

l'égalité n'ayant lieu que si $N(t)$ garde presque partout un argument constant sur chacun des intervalles $\left(o,\frac{1}{\alpha}\right)$ et $\left(\frac{1}{\alpha},+\infty\right)$.

En effet, l'égalité

$$1-K(\alpha t)=\int_0^{\alpha t}N(u)\,du=\int_0^t\alpha N(\alpha u)\,du$$

entraîne

$$|1-K(\alpha t)|\leq\mathfrak{N}_\alpha(t),\qquad\text{avec}\quad\mathfrak{N}_\alpha(t)=\int_0^t\alpha\,|N(\alpha u)|\,du.$$

Mais, d'après le lemme 4 du paragraphe 1.4, $\frac{\mathcal{H}_\alpha(t)}{t}$ est sommable sur $(0, 1)$ et

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{H}_\alpha(t)}{t}\,dt = \int_0^1 \alpha\,|N(\alpha t)|\,\log\frac{1}{t}\,dt.$$

On a donc

$$\int_0^1 \frac{|1-K(\alpha t)|}{t}\,dt \leq \int_0^1 \alpha\,|N(\alpha t)|\,\log\frac{1}{t}\,dt. \tag{30}$$

De même, l'égalité

$$K(\alpha t) = \int_{\alpha t}^{+\infty} N(u)\,du = \int_t^{+\infty} \alpha N(\alpha u)\,du$$

entraine

$$|K(\alpha t)| \leq \mathcal{H}_\alpha^*(t), \qquad \text{avec} \quad \mathcal{H}_\alpha^*(t) = \int_t^{+\infty} \alpha\,|N(\alpha u)|\,du,$$

et, comme, d'après le lemme 3, $\frac{\mathcal{H}_\alpha^*(t)}{t}$ est sommable sur $(1, +\infty)$ et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathcal{H}_\alpha^*(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} \alpha\,|N(\alpha t)|\,\log t\,dt,$$

on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{|K(\alpha t)|}{t}\,dt \leq \int_1^{+\infty} \alpha\,|N(\alpha t)|\,\log t\,dt. \tag{31}$$

(30) et (31) donnent (29) et l'on voit qu'il ne peut y avoir égalité dans (29) que s'il y a égalité dans (30) et (31).

En raison de la continuité de $\frac{1-K(\alpha t)}{t}$ pour $0 < t \leq 1$ et de $\frac{K(\alpha t)}{t}$ pour $t \geq 1$, ceci n'est possible que si l'on a

$$1 - K(\alpha t) = \mathcal{H}_\alpha(t), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left|\int_0^t \alpha N(\alpha u)\,du\right| = \int_0^t |\alpha N(\alpha u)|\,du,$$

pour tout t satisfaisant à $0 < t \leq 1$, et

$$K(\alpha t) = \mathcal{H}_\alpha^*(t), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left|\int_t^{+\infty} \alpha N(\alpha u)\,du\right| = \int_t^{+\infty} |\alpha N(\alpha u)|\,du,$$

pour tout t supérieur ou égal à 1.

Ceci a lieu si $N(\alpha t)$ a presque partout un argument constant sur chacun des intervalles $(0, 1)$ et $(1, +\infty)$, et seulement dans ce cas (14).

---

(14) Cela résulte du lemme suivant :

$f(t)$ étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle (a, b) fini ou non, pour que l'on ait

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

il faut et il suffit qu'il existe un θ tel que $e^{i\theta} f(t)$ soit réel et ≥ 0 presque partout sur (a, b).

Passons maintenant à la démonstration du théorème 3.

a. Étudions d'abord la famille des fonctions $g_x(t)$ définies pour $t \geq 0$ par $g_x(t) = s(xt) - s(x)$.

Nous observons en premier lieu que, comme $\omega_s(\lambda) < +\infty$, $s(t)$ satisfait à (12) et l'on a, quels que soient x et t positifs,

$$|g_x(t)| \leq H|\log t| + K. \tag{32}$$

D'autre part, on a, pour t et t' positifs quelconques et x positif quelconque,

$$g_x(t') - g_x(t) = s(xt') - s(xt),$$

et par suite

$$|g_x(t') - g_x(t)| \leq \begin{cases} W_s\left(xt, \frac{t'}{t}\right) & \text{si } t < t', \\ W_s\left(xt', \frac{t}{t'}\right) & \text{si } t > t'. \end{cases}$$

La condition est suffisante car, si elle est satisfaite, on a presque partout sur (a, b):

$$|f(t)| = |e^{i\theta} f(t)| = e^{i\theta} f(t) \quad \text{ou} \quad f(t) = e^{-i\theta}|f(t)|,$$

et par suite

$$\int_a^b f(t)\,dt = e^{-i\theta} \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Pour montrer qu'elle est nécessaire, remarquons d'abord que, si $\int_a^b |f(t)|\,dt = 0$, elle est satisfaite avec θ arbitraire car $f(t) = 0$ presque partout.

Si maintenant $\int_a^b |f(t)|\,dt > 0$, on voit que, si l'on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

le point $\int_a^t f(u)\,du$ du plan complexe est situé, quel que soit t satisfaisant à $a < t < b$, sur le segment de droite joignant l'origine au point $\int_a^b f(t)\,dt$. En effet, si pour t_0 satisfaisant à $a < t_0 < b$ le point $\int_a^t f(u)\,du$ n'était pas sur ce segment de droite, on aurait

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| < \left|\int_a^{t_0} f(u)\,du\right| + \left|\int_{t_0}^b f(u)\,du\right|, \quad \text{d'où} \quad \left|\int_a^b f(t)\,dt\right| < \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

On voit de même que, quels que soient t et t' satisfaisant à $a < t < t' < b$, le point $\int_a^{t'} f(u)\,du$ doit se trouver sur le segment joignant le point $\int_a^t f(u)\,du$ au point $\int_a^b f(u)\,du$.

Au total, on voit que, si l'on appelle $-\theta$ l'un des arguments du nombre complexe $\int_a^b f(t)\,dt$, la fonction $e^{i\theta}\int_a^t f(u)\,du$ est réelle ≥ 0 et non décroissante pour $a < t < b$. Il en résulte que, partout où sa dérivée existe, elle ne peut être que réelle ≥ 0. Or, on sait que presque partout cette dérivée existe et est égale à $e^{\theta i} f(t)$.

Ceci entraîne que, quelle que soit la suite de nombres positifs x_n tendant vers $+\infty$, on a pour t et t' positifs avec $t \neq t'$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |g_{x_n}(t') - g_{x_n}(t)| \leq \begin{cases} \omega_s\left(\frac{t'}{t}\right) & \text{si } t < t', \\ \omega_s\left(\frac{t}{t'}\right) & \text{si } t > t'. \end{cases}$$

Comme $\omega_s(\lambda) \leq \omega \log \lambda$, on peut écrire simplement

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |g_{x_n}(t') - g_{x_n}(t)| \leq \omega \left| \log \frac{t'}{t} \right|. \tag{33}$$

Les inégalités (32) et (33) vont nous permettre de montrer que, *de toute suite de nombres réels positifs tendant vers* $+\infty$, *on peut extraire une suite* $\{x_n\}$ *telle que la suite des fonctions* $g_{x_n}(t)$ *converge pour* $t > 0$ *vers une certaine fonction continue* $\sigma(t)$.

(32) montre d'abord que l'on peut extraire de la suite donnée une suite partielle $\{x_n\}$ telle que, pour une valeur positive donnée de t, $g_{x_n}(t)$ tende vers une limite finie.

Par un raisonnement bien connu, on en déduit que l'on peut trouver une suite partielle $\{x_n\}$ telle que $g_{x_n}(t)$ converge pour chaque valeur rationnelle positive de t vers une limite finie $\sigma(t)$.

La fonction $\sigma(t)$ ainsi définie pour t rationnel positif est uniformément continue pour $t \geq \varepsilon$, avec ε positif quelconque, car (33) montre que pour t et t' rationnels positifs quelconques

$$|\sigma(t') - \sigma(t)| \leq \omega \left| \log \frac{t'}{t} \right|. \tag{34}$$

On peut donc prolonger cette fonction sur l'ensemble de tous les nombres positifs de façon à obtenir une fonction continue sur cet ensemble.

On voit alors que $g_{x_n}(t)$ converge vers la fonction $\sigma(t)$ ainsi obtenue, non seulement pour les valeurs rationnelles positives de t, mais pour toutes les valeurs positives.

En effet, considérons un t irrationnel positif quelconque.

Quel que soit t' rationnel positif, on a

$$|g_{x_n}(t) - \sigma(t)| \leq |g_{x_n}(t') - g_{x_n}(t)| + |g_{x_n}(t') - \sigma(t')| + |\sigma(t') - \sigma(t)|,$$

d'où en tenant compte de (33)

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |g_{x_n}(t) - \sigma(t)| \leq \omega \left| \log \frac{t'}{t} \right| + |\sigma(t') - \sigma(t)|.$$

Si l'on fait tendre t' vers t, le second membre tend vers zéro.

Ajoutons les remarques suivantes :

On a $\sigma(1) = 0$, *car, quel que soit* x, $g_x(1) = 0$.

(33) *montre que l'on a* (34) *pour* t *et* t' *positifs quelconques.*

En faisant $t'=1$, (34) montre que *l'on a quel que soit t positif*

$$|\sigma(t)|\leq\omega|\log t|.$$

b. Ceci étant, nous poserons encore

$$\int_0^{+\infty}\psi(t,x)s(t)\,dt=\Psi(x)$$

et nous montrerons que, de toute suite de nombres réels supérieurs à αa et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\left|\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)-s(x_n)\right.$ tende vers une limite au plus égale à $\omega\tau(\alpha)$. (27) en résultera grâce à la première remarque du paragraphe 1.2.

Notons d'abord que (22) donne

$$\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)-s(x)=\int_0^{+\infty}x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)g_x(t)\,dt.$$

De toute suite de nombres réels supérieurs à αa et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $g_{x_n}(t)$ tende pour $t>0$ vers une fonction $\sigma(t)$ ayant les propriétés indiquées plus haut.

$x_n\psi\left(x_nt,\frac{x_n}{\alpha}\right)g_{x_n}(t)$ tend alors vers $\alpha N(\alpha t)\sigma(t)$.

Comme, d'après (32), $x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)g_x(t)$ est, pour $x>\alpha a$, de module au plus égal à $\alpha F(\alpha t)[H|\log t|+K]$, qui est une fonction sommable sur l'intervalle $(0,+\infty)$, on voit que $\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)-s(x_n)$ tend vers $\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt$ et $\left|\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)-s(x_n)\right|$ tend vers $\left|\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt\right|$.

Il ne reste qu'à montrer que

$$\left|\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt\right|\leq\omega\tau(\alpha). \tag{35}$$

Pour celà, nous remarquons d'abord que (34) entraîne que $\sigma(t)$ est absolument continue pour $t>0$. Elle possède donc une dérivée presque partout sur $(0,+\infty)$.

De plus, on a $|\sigma'(t)|\leq\frac{\omega}{t}$, de sorte que $[1-K(\alpha t)]\sigma'(t)$ est sommable sur $(0,1)$ et $K(\alpha t)\sigma'(t)$ l'est sur $(1,+\infty)$ (*cf.* § 3.2 *e*).

Comme $1-K(\alpha t)=\int_0^t\alpha N(\alpha u)\,du$, quel que soit ε positif et inférieur à 1, on peut écrire par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1\alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt=-[1-K(\alpha\varepsilon)]\sigma(\varepsilon)-\int_\varepsilon^1[1-K(\alpha t)]\sigma'(t)\,dt.$$

Le premier terme du second membre tend vers zéro avec ε puisque $|\sigma(\varepsilon)| \leq \omega \log \frac{1}{\varepsilon}$ (*cf.* § 3.2 *e*); donc, quand ε tend vers zéro, cette égalité donne à la limite

$$\int_0^1 \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt = -\int_0^1 [1 - K(\alpha t)]\sigma'(t)\,dt.$$

De même, comme $K(\alpha t) = \int_0^t -\alpha N(\alpha u)\,du + 1$, on a quel que soit $L > 1$

$$\int_1^L \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt = K(\alpha L)\sigma(L) + \int_1^L K(\alpha t)\sigma'(t)\,dt.$$

Quand L tend vers $+\infty$, le premier terme du second membre tend vers zéro puisque $|\sigma(L)| \leq \omega \log L$ (*cf.* § 3.2 *e*); on a donc à la limite

$$\int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt = \int_1^{+\infty} K(\alpha t)\sigma'(t)\,dt.$$

En définitive, on a

$$\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt = -\int_0^1 [1 - K(\alpha t)]\sigma'(t)\,dt + \int_1^{+\infty} K(\alpha t)\sigma'(t)\,dt,$$

d'où

$$\left|\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |[1 - K(\alpha t)]\sigma'(t)|\,dt + \int_1^{+\infty} K(\alpha t)\sigma'(t)|\,dt,$$

et, comme $|\sigma'(t)| \leq \frac{\omega}{t}$, ceci donne (35).

3.5.1. Le théorème 3 donne comme conséquence le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Supposons* $F(t)\log t$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et soit une suite de nombres réels* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *satisfaisant à*

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1.$$

Quelle que soit la suite de nombres réels ou complexes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *satisfaisant à*

$$u_n = O\left[\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right] \qquad (\textit{pour } n \textit{ infini}),$$

les séries $\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x)\,u_n$ *et* $\sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]S_n$, *où* $S_n = \sum_0^n u_j$, *sont convergentes pour* $x > a$ *et ont la même somme.*

Si l'on désigne celle-ci par $S(x)$, *on a pour chaque* $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|S\left(\frac{x}{\alpha}\right)-\sum_{\lambda_n\leq x}u_n\right|\leq\tau(\alpha)\,\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}|u_n|, \tag{36}$$

où $\tau(\alpha)$ *est la constante définie par* (28).

Considérons la fonction $s(t)$ définie pour $t\geq 0$ par

$$s(t)=\begin{cases}0 & \text{pour } t=0,\\ \displaystyle\sum_{\lambda_n\leq t}u_n & \text{pour } t>0\end{cases}$$

$\left(\text{la somme } \displaystyle\sum_{\lambda_n\leq t}u_n \text{ étant prise égale à 0 s'il n'y a aucun } \lambda_n \text{ au plus égal à } t\right)$.

On voit que, si l'on pose

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}|u_n|=\omega,$$

on a

$$w_s(\lambda)\leq\omega\log\lambda.$$

En effet, soit ε positif quelconque. Il existe un entier n_0 tel que, pour $n\geq n_0$,

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\leq e^{\varepsilon}\qquad\text{et}\qquad|u_n|\leq(\omega+\varepsilon)\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}<(\omega+\varepsilon)\log\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

On en conclut que, pour $t\geq\lambda_{n_0-1}$ et $t'>t$,

$$|s(t')-s(t)|<(\omega+\varepsilon)\left[\log\frac{t'}{t}+\varepsilon\right].$$

En effet, s'il n'y a aucun λ_n satisfaisant à $t<\lambda_n\leq t'$, on a

$$|s(t')-s(t)|=0.$$

S'il y en a un, soit λ_{n_1}, on a, puisque $n_1\geq n_0$,

$$|s(t')-s(t)|=|u_{n_1}|<(\omega+\varepsilon)\log\frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_{n_1-1}}\leq(\omega+\varepsilon)\varepsilon;$$

s'il y en a plusieurs, $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_1+1}, \ldots, \lambda_{n_2}$, on a

$$|s(t')-s(t)|\leq\sum_{n_1}^{n_2}|u_n|<\sum_{n_1}^{n_2}(\omega+\varepsilon)\log\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\leq(\omega+\varepsilon)\left[\varepsilon+\log\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}\right].$$

On a donc

$$W_s(t,\lambda)<(\omega+\varepsilon)[\log\lambda+\varepsilon]\qquad\text{pour}\quad t\geq\lambda_{n_0-1},$$

et par suite

$$w_s(\lambda)\leq(\omega+\varepsilon)[\log\lambda+\varepsilon].$$

En faisant tendre ε vers zéro, on trouve $w_s(\lambda)\leq\omega\log\lambda$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2 *c*, comme $F(t)\log t$ est supposée sommable sur $(0, +\infty)$, le fait que $\omega_3(\lambda) < +\infty$ entraine la convergence pour $x > a$ de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$, et, $s(t)$ étant de plus à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ est aussi convergente et égale à la précédente.

Comme

$$\sum_0^N [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]S_n = \int_0^{\lambda_{N+1}} \psi(t, x)s(t)\,dt$$

et

$$\sum_0^N \varphi(\lambda_n, x)u_n = \int_0^{\lambda_N} \varphi(t, x)\,ds(t),$$

les deux séries indiquées dans l'énoncé du théorème sont convergentes et égales à $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$.

Le théorème 3 donne alors le résultat annoncé.

3.5.2. Il faut noter que, *dans le théorème 4, quelle que soit la suite* $\{\lambda_n\}$ *possédant les propriétés indiquées, la constante* $\tau(\alpha)$ *ne peut être remplacée par une plus petite et le signe* $\leqq$ *dans* (36) *ne peut être remplacée par* $<$ [15], car, α étant fixé, on peut former une suite $\{u_n\}$ telle que

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |u_n| = 1 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| S\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x} u_n \right| = \tau(\alpha).$$

On voit de suite que, pour prouver qu'une suite $\{u_n\}$ possède ces propriétés, il suffit de montrer que

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |u_n| \leqq 1,$$

et qu'il existe une suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ supérieurs à αa et tendant vers $+\infty$, telle que $\left| S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x_p} u_n \right|$ tende vers $\tau(\alpha)$.

Nous déterminerons la suite $\{u_n\}$ comme suit :

Définissons d'abord la fonction $sg(z)$ pour z complexe quelconque par

$$sg(z) = \frac{z}{|z|} \quad \text{si } z \neq 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \quad \text{si } z = 0,$$

---

[15] Pour $\psi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$, $\lambda_n = n$, l'existence d'une constante $\tau(\alpha)$ telle que l'on ait (36) a été établie pour $\alpha = 1$ par A. Wintner [13], la valeur la plus petite possible pour $\tau(1)$ a été déterminée par H. Hadwiger [4] et Ph. Hartman [5], et R. P. Agnew [1] a traité le cas de α quelconque.

de sorte que l'on a toujours

$$z\,sg(z) = |z|.$$

Puis définissons une fonction $\rho(t)$ pour t réel ≥ 0 de la façon suivante :

Pour $0 \leq t \leq 1$,

$$\rho(t) = sg[K(\alpha t) - 1],$$

et pour $t > 1$,

$$\rho(t) = sg[K(\alpha t)].$$

Il est clair que cette fonction est mesurable. D'autre part, $|\rho(t)|$ est toujours égal à 0 ou 1.

Choisissons, d'autre part, une suite croissante d'entiers positifs $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ telle que $\lambda_{n_2} > \alpha a$ et que $\frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}}$ tende vers $+\infty$.

Puis définissons une fonction $\mu(t)$ pour $t \geq 0$ par

$$\mu(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t < \lambda_{n_1}$$

et

$$\mu(t) = \rho\left(\frac{t}{\lambda_{n_{2p}}}\right) \qquad \text{pour} \quad \lambda_{n_{2p-1}} \leq t < \lambda_{n_{2p+1}} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ceci étant, prenons $u_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{\mu(t)}{t}\, dt.$$

D'abord, comme $|\mu(t)| \leq 1$, on a pour $n \geq 2$,

$$|u_n| \leq \log \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

Par suite

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |u_n| \leq 1.$$

D'autre part, nous allons montrer que, si l'on pose $\lambda_{n_{2p}} = x_p$, on a

$$\lim_{p \to +\infty} \left[S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x_p} u_n \right] = \tau(\alpha).$$

a. Pour cela, montrons en premier lieu que, $s(t)$ étant la fonction définie à partir de la suite $\{u_n\}$ comme il a été dit au paragraphe précédent, quand p tend vers $+\infty$, $s(x_p t) - s(x_p)$ converge, pour $t > 0$, vers la fonction $\sigma_0(t)$ définie par

$$\sigma_0(t) = \int_1^t \frac{\rho(u)}{u}\, du.$$

Considérons à cet effet une certaine valeur positive de t et appelons n'_p l'entier déterminé par

$$n'_p = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_{n_{2p}} t < \lambda_0,$$
$$\lambda_{n'_p} \leq t\lambda_{n_{2p}} < \lambda_{n'_p+1} \quad \text{si} \quad \lambda_{n_{2p}} t \geq \lambda_0.$$

On a

$$s(x_p t)-s(x_p)=s(\lambda_{n'_p})-s(\lambda_{n_{2p}})=\int_{\lambda_{n_{2p}}}^{\lambda_{n'_p}}\frac{\mu(u)}{u}\,du.$$

Mais, puisque $\frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}}$ tend vers $+\infty$ avec p, on a pour p assez grand $n_{2p-1}\leq n'_p\leq n_{2p+1}$ et par suite

$$\int_{\lambda_{n_{2p}}}^{\lambda_{n'_p}}\frac{\mu(u)}{u}\,du=\int_{\lambda_{n_{2p}}}^{\lambda_{n'_p}}\rho\left(\frac{u}{\lambda_{n_{2p}}}\right)\frac{du}{u}=\int_1^{\theta_p}\frac{\rho(u)}{u}\,du=\sigma_0(\theta_p),\qquad\text{avec}\quad\theta_p=\frac{\lambda_{n'_p}}{\lambda_{n_{2p}}}.$$

Pour p infini, θ_p tend vers t, puisque les inégalités qui définissent n'_p donnent $\left(\frac{\lambda_{n'_p}}{\lambda_{n'_{p+1}}}\right)t<\theta_p\leq t$, et par suite $\sigma_0(\theta_p)$ tend vers $\sigma_0(t)$.

b. Ceci étant, on voit, en raisonnant comme au paragraphe 3.5, en *b*, que, pour p infini, $\int_0^{+\infty}\psi\left(t,\frac{x_p}{\alpha}\right)s(t)\,dt-s(x_p)$, qui est égal à $S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right)-\sum_{\lambda_n\leq x_p}u_n$, tend vers $\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\sigma_0(t)\,dt$, et que ceci est égal à

$$-\int_0^1[1-K(\alpha t)]\sigma'_0(t)\,dt+\int_1^{+\infty}K(\alpha t)\sigma'_0(t)\,dt.$$

Comme on a presque partout $\sigma'_0(t)=\frac{\rho(t)}{t}$, on voit en se reportant à la définition de $\rho(t)$, que ceci est égal à $\tau(\alpha)$.

3.5.3. Remarquons que ce que nous venons d'établir prouve en même temps que *dans le théorème* 3 *la constante* $\tau(\alpha)$ *ne peut être remplacée par une plus petite et le signe* $\leq$ *dans* (27) *ne peut être remplacé par* $<$.

3.5.4. La formule qui donne $\tau(\alpha)$ peut s'écrire, en remplaçant u par $\frac{u}{\alpha}$,

$$\tau(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{|1-K(u)|}{u}\,du+\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{|K(u)|}{u}\,du.$$

On voit que $\tau(\alpha)$ possède une dérivée par rapport à α égale à

$$\frac{|1-K(\alpha)|-|K(\alpha)|}{\alpha}.$$

Cette dérivé est du signe de $\frac{1}{2}-\mathcal{R}[K(\alpha)]$, où $\mathcal{R}[\ ]$ désigne la partie réelle de la quantité entre crochets.

Il en résulte que, *dans le cas où* $\mathcal{R}[N(t)]\geq 0$, *de sorte que* $\mathcal{R}[K(t)]$ *est non croissante,* $\tau(\alpha)$ *prend la valeur la plus petite possible pour* $\mathcal{R}[K(\alpha)]=\frac{1}{2}$.

Remarquons d'autre part que, *lorsque* $K(t)$ *est réel et satisfait à* $0 \leq K(t) \leq 1$, *on peut écrire*

$$\tau(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t) |\log t| \, dt.$$

En effet, on a dans ce cas

$$|1 - K(\alpha t)| = 1 - K(\alpha t) \qquad \text{et} \qquad |K(\alpha t)| = K(\alpha t),$$

et les lemmes 3 et 4 du paragraphe 1.4 donnent

$$\int_0^1 \frac{1 - K(\alpha t)}{t} \, dt = \int_0^1 \alpha N(\alpha t) \log \frac{1}{t} \, dt$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{K(\alpha t)}{t} \, dt = \int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t) \log t \, dt,$$

puisque

$$1 - K(\alpha t) = \int_0^{\alpha t} N(u) \, du = \int_0^t \alpha N(\alpha u) \, du$$

et

$$K(\alpha t) = \int_{\alpha t}^{+\infty} N(u) \, du = \int_t^{+\infty} \alpha N(\alpha u) \, du.$$

3.6. Nous avons donné le théorème 2 comme corollaire du théorème 1*a*. Il est aussi un corollaire du théorème suivant :

Théorème 5. — $F(t) \log t$ *étant supposée sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *si l'on a* $\delta_s(t) = O[1]$ *pour* t *tendant vers* $+\infty$ [*ce qui équivaut à* $w_s(\lambda) < +\infty$], *on a pour chaque* α *réel positif*

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| \int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t) \, dt - s(x) \right| \leq \tau^*(\alpha) \overline{\lim_{t \to +\infty}} |\delta_s(t)|, \tag{37}$$

où $\tau^*(\alpha)$ *est la constante définie par la formule*

$$\tau^*(\alpha) = 1 + \int_0^1 \left| \alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t) - 1}{t} \right| dt + \int_1^{+\infty} \left| \alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t)}{t} \right| dt \quad (16). \tag{38}$$

Nous poserons, comme précédemment,

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t) \, dt = \Psi(x).$$

---

(16) L'existence d'une constante $\tau^*(\alpha)$ telle que l'on ait (37) résulte de l'inégalité (15) du paragraphe 2.5 et du théorème 1*a*. Mais la valeur que l'on obtient ainsi pour $\tau^*(\alpha)$ est en général plus grande que celle donnée ici. [Il y a égalité si l'on a $N(t)$ réel ≥ 0 presque partout et $N(t) = 0$ presque partout sur l'intervalle $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$].

a. Nous allons montrer d'abord que l'on a pour $x > \alpha a$

$$(39)\quad \Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x) = -\delta_s(x) + \int_0^1 \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t} \right] \delta_s(xt)\, dt + \int_1^{+\infty} \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)}{t} \right] \delta_s(xt)\, dt.$$

En remplaçant dans (16) t par x et t' par xt, on obtient

$$s(xt) - s(x) = \delta_s(xt) - \delta_s(x) + \Delta_s(x, t),$$

avec

$$\Delta_s(x, t) = \int_x^{xt} \frac{\delta(u)}{u}\, du = \int_1^t \frac{\delta(xu)}{u}\, du.$$

La fonction sous le signe $\int$ au second membre de (22) peut donc s'écrire

$$x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) [\delta_s(xt) - \delta_s(x) + \Delta_s(x, t)].$$

Puisque $\delta_s(t)$ est manifestement bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$, l'hypothèse $\delta_s(t) = O[1]$ pour t infini entraîne qu'il existe un nombre positif M tel que, pour t positif quelconque, $|\delta_s(t)| \leq M$.

Ceci entraîne que, quels que soient x et t positifs,

$$|\Delta_s(x, t)| \leq M |\log t|.$$

On voit alors que, pour x fixé $> \alpha a$, $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\delta_s(xt)$, $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\delta_s(x)$ et $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\Delta_s(x, t)$ sont des fonctions de t sommables sur l'intervalle $(0, +\infty)$, car les deux premières sont de module au plus égal à $M\alpha F(\alpha t)$ et la troisième de module au plus égal à $M\alpha F(\alpha t)|\log t|$.

On peut donc écrire (22) sous la forme

$$\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x) = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\delta_s(xt)\, dt - \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\delta_s(x)\, dt + \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\Delta_s(x, t)\, dt.$$

La seconde intégrale est égale à $\delta_s(x)$. Pour obtenir (39), il suffira de montrer que

$$(40)\quad \int_0^1 x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)\Delta_s(x, t)\, dt = \int_0^1 \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - 1}{t}\, \delta_s(xt)\, dt,$$

et

$$(41)\qquad \int_1^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)\Delta_s(x,t)\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)}{t}\,\delta_s(xt)\,dt.$$

Nous pouvons observer de suite que, comme $|\delta_s(xt)| \leq M$, $\dfrac{\varphi\left(xt\ \frac{x}{\chi}\right)-1}{t}\delta_s(xt)$ est sommable sur l'intervalle $(0,1)$ et $\dfrac{\varphi\left(xt\ \frac{x}{\chi}\right)}{t}\delta_s(xt)$ est sommable sur $(1,+\infty)$ (*Cf.* 3.2 *f*).

Pour établir (40), nous observons d'abord que, comme

$$1-\varphi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right) = \int_0^{xt} \psi\left(u, \frac{x}{\chi}\right)du = \int_0^{t} x\psi\left(xu, \frac{x}{\chi}\right)du \qquad \text{et} \qquad \Delta_s(x,1) = 0,$$

quel que soit ε positif et inférieur à 1, on a par intégration par parties

$$(42)\qquad \int_\varepsilon^1 x\psi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)\Delta_s(x,t)\,dt = -\left[1-\varphi\left(x\varepsilon, \frac{x}{\chi}\right)\right]\Delta_s(x,\varepsilon) - \int_\varepsilon^1 \frac{1-\varphi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)}{t}\,\delta_s(xt)\,dt.$$

Comme $|\Delta_s(x,\varepsilon)| \leq M\log\frac{1}{\varepsilon}$, le premier terme du second membre tend vers zéro avec ε, puisque $\left|1-\varphi\left(x\varepsilon, \frac{x}{\chi}\right)\right|\log\frac{1}{\varepsilon}$ tend vers zéro. Donc, quand ε tend vers zéro, (42) donne à la limite (40).

De même, comme

$$\varphi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right) = \int_{xt}^{+\infty} \psi\left(u, \frac{x}{\chi}\right)du = \int_t^{+\infty} x\psi\left(xu, \frac{x}{\chi}\right)du,$$

on a pour tout $L > 1$

$$(43)\qquad \int_1^L x\psi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)\Delta_s(x,t)\,dt = -\varphi\left(xL, \frac{x}{\chi}\right)\Delta_s(x,L) + \int_1^L \frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)}{t}\,\delta_s(xt)\,dt.$$

Comme $|\Delta_s(x,L)| \leq M\log L$, le premier terme du second membre tend vers zéro pour L infini puisque $\varphi\left(xL, \frac{x}{\chi}\right)\log L$ tend vers zéro. Donc, quand L tend vers $+\infty$, (43) donne à la limite (41).

b. La formule (39) donne

$$\left|\Psi\left(\frac{x}{\chi}\right)-s(x)\right| \leq |\delta_s(x)| + \int_0^1 \left|\left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)+\frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)-1}{t}\right]\delta_s(xt)\right|dt - \int_1^{+\infty} \left|\left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)+\frac{\varphi\left(xt, \frac{x}{\chi}\right)}{t}\right]\delta_s(xt)\right|dt.$$

Pour obtenir (37), il suffira de montrer que, si l'on pose

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,|\delta_s(t)|=\omega,$$

on a

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\int_0^1\left|\left[x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\varphi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)-1}{t}\right]\delta_s(xt)\right|dt\leq\omega\int_0^1\left|\alpha N(\alpha t)+\frac{K(\alpha t)-1}{t}\right|dt$$

et

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\int_1^{+\infty}\left|\left[x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\varphi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)}{t}\right]\delta_s(xt)\right|dt\leq\omega\int_1^{+\infty}\left|\alpha N(\alpha t)+\frac{K(\alpha t)}{t}\right|dt.$$

Ces deux inégalités résultent du lemme 2 du paragraphe 1.3.
En effet, puisque

$$1-\varphi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)=\int_0^{xt}\psi\left(u,\frac{x}{\alpha}\right)du=\int_0^t x\psi\left(xu,\frac{x}{\alpha}\right)du\qquad\text{et}\qquad\left|x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)\right|\leq\alpha F(\alpha t),$$

on a

$$\left|\left[x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\varphi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)-1}{t}\right]\delta_s(xt)\right|\leq M\left[\alpha F(\alpha t)+\frac{1}{t}\int_0^t\alpha F(\alpha u)\,du\right].$$

Le second membre est sommable sur (0, 1) d'après le lemme 4 du paragraphe 1.4.

De plus, comme, pour x infini, $x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\varphi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)-1}{t}$ tend vers $\alpha N(\alpha t)+\frac{K(\alpha t)-1}{t}$, on a

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\left[x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\varphi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)-1}{t}\right]\delta_s(xt)\right|=\omega\left|\alpha N(\alpha t)+\frac{K(\alpha t)-1}{t}\right|.$$

Ceci est une fonction sommable sur (0, 1), d'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2 *e*.

De même, $\left[x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\varphi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)}{t}\right]\delta_s(xt)$ est de module au plus égal à $M\left[\alpha F(\alpha t)+\frac{1}{t}\int_t^{+\infty}\alpha F(\alpha u)\,du\right]$, qui est une fonction sommable sur $(1,+\infty)$ d'après le lemme 3, on a

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\left[x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)+\frac{\varphi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)}{t}\right]\delta_s(xt)\right|=\omega\left|\alpha N(\alpha t)+\frac{K(\alpha t)}{t}\right|,$$

et ceci est une fonction sommable sur $(1, +\infty)$, d'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2 *e*.

3.6.1. Comme corollaire du théorème 5, on a le suivant :

THÉORÈME 6. — *Supposons* $F(t)\log t$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et soit* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *une suite de nombres réels satisfaisant à*

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1.$$

Si la suite de nombres réels ou complexes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *satisfait à*

$$\sum_0^n \lambda_\nu u_\nu = O[\lambda_n] \qquad (\textit{pour } n \textit{ infini}),$$

les séries $\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x) u_n$ *et* $\sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)] S_n$, *où* $S_n = \sum_0^n u_j$, *sont convergentes pour* $x > a$ *et ont la même somme.*

Si l'on désigne celle-ci par $S(x)$, *on a pour chaque* α *positif*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \left| S\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x} u_n \right| \leq \tau^*(\alpha) \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_1^n \lambda_\nu u_\nu \right|, \tag{44}$$

où $\tau^*(\alpha)$ *est la constante définie par* (38).

On définit $s(t)$ comme au paragraphe 3.5.1. On voit alors que, pour $t > 0$,

$$t\,\delta_s(t) = \int_0^t [s(t) - s(u)]\,du = \int_0^t u\,ds(u) = \sum_{\lambda_n \leq t} \lambda_n u_n,$$

(le $\sum$ étant pris nul s'il n'y a aucun λ_n au plus égal à t).

On a donc pour $\lambda_n \leq t < \lambda_{n+1}$ (avec $n \geq 1$ si $\lambda_0 = 0$)

$$|\delta_s(t)| \leq \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_0^n \lambda_\nu u_\nu \right|,$$

et l'égalité a lieu pour $t = \lambda_n$.

Donc

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |\delta_s(t)| = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_0^n \lambda_\nu u_\nu \right|.$$

Ceci étant fini, on a $w_s(\lambda) < +\infty$ et les intégrales $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ sont convergentes et égales pour $x > a$.

On en conclut, comme au paragraphe 3.5.1, que les séries

$$\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x)\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_0^{+\infty} |\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)| S_n$$

sont convergentes pour $x > a$ et égales à $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$.

Le théorème 5 donne alors (44).

3.6.2. Nous allons montrer que, *dans le théorème 6, quelle que soit la suite* $\{\lambda_n\}$ *possédant les propriétés indiquées, la constante* $\tau^*(\alpha)$ *ne peut être remplacée par une plus petite et le signe* $\leq$ *dans* (44) *ne peut être remplacé par* $<$ ([17]).

En effet, la suite $\{\lambda_n\}$ étant donnée, et α étant fixé, on peut former une suite $\{u_n\}$ satisfaisant à

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_0^n \lambda_\nu u_\nu \right| = 1,$$

et telle que

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left| S\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x} u_n \right| = \tau^*(\alpha).$$

Pour prouver qu'une suite $\{u_n\}$ possède ces propriétés, il suffit de montrer que

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \left| \sum_0^n \lambda_\nu u_\nu \right| \leq 1,$$

et qu'il existe une suite de nombres réels x_p supérieurs à αa tendant vers $+\infty$ et telle que

$$\lim_{p \to +\infty} \left[S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n \leq x_p} u_n \right] = \tau^*(\alpha).$$

Nous poserons

$$\delta_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_0^n \lambda_\nu u_\nu \qquad (\text{pour } n \geq 1 \text{ si } \lambda_0 = 0).$$

Il est clair que l'on peut déterminer les u_n de manière à faire prendre à tous les δ_n des valeurs arbitraires.

([17]) Pour $\psi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$, $\lambda_n = n$, $\alpha = 1$, l'existence d'une constante τ^* telle que l'on ait (44) a été établie par A. Wintner [15], et la valeur la plus petite possible pour cette constante a été déterminée par H. Hadwiger [4] et Ph. Hartman [3].

Nous choisirons les δ_n de la façon suivante :

Nous formons d'abord une suite d'entiers positifs croissants $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ telle que $\frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}}$ tende vers $+\infty$.

D'autre part, nous définissons une fonction $G_\alpha(t)$ pour $t > 0$, par

$$G_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha N(\alpha t) + \dfrac{K(\alpha t) - 1}{t} & \text{pour } t \leq 1, \\ \alpha N(\alpha t) + \dfrac{K(\alpha t)}{t} & \text{pour } t > 1. \end{cases}$$

Cette fonction est sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$, puisque les intégrales qui figurent dans la formule donnant $\tau^*(\alpha)$ existent.

Nous définissons ensuite la fonction $H_\alpha(t)$, pour $t > 0$, par

$$H_\alpha(t) = \int_0^t G_\alpha(u)\, du.$$

Ceci étant, et $sg(z)$ étant défini comme au paragraphe 3.5.2, nous prenons

$$\delta_n = 0 \quad \text{pour } n < n_1,$$
$$\delta_n = sg\left[H_\alpha\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n_{2p}}}\right) - H_\alpha\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n_{2p}}}\right)\right] \quad \text{pour } n_{2p-1} \leq n < n_{2p+1} \text{ et } n \neq n_{2p},$$

et

$$\delta_{n_{2p}} = -1, \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il est clair que l'on a $|\delta_n| \leq 1$ quel que soit n, d'où

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} |\delta_n| \leq 1.$$

Nous allons montrer que, si l'on pose $x_p = \lambda_{n_{2p}}$, $S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n < x_p} u_n$ tend pour p infini vers $\tau^*(\alpha)$.

$s(t)$ étant définie comme il a été dit plus haut, on a

$$S\left(\frac{x_p}{\alpha}\right) - \sum_{\lambda_n < x_p} u_n = \int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x_p}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x_p).$$

La formule (39) donne ensuite

$$\int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x_p}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x_p) = 1 + \int_0^{+\infty} \Phi_\alpha(t, x_p)\, \delta_s(x_p t)\, dt,$$

avec

$$\Phi_\alpha(t, x) = \begin{cases} x\psi\left(xt, \dfrac{x}{\alpha}\right) + \dfrac{\varphi\left(xt, \dfrac{x}{\alpha}\right) - 1}{t} & \text{pour } t \leq 1, \\ x\psi\left(xt, \dfrac{x}{\alpha}\right) + \dfrac{\varphi\left(xt, \dfrac{x}{\alpha}\right)}{t} & \text{pour } t > 1. \end{cases}$$

Nous devons montrer que $\int_0^{+\infty} \Phi_x(t, x_p)\,\delta_s(x_p t)\,dt$ tend vers $\tau^*(\alpha) - 1$ quand p tend vers $+\infty$.

a. Introduisons la fonction $\delta^*(t)$ définie pour $t > 0$ par

$$\delta^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \lambda_{n_1}, \\ \delta_n & \text{pour } \lambda_n \leq t < \lambda_{n+1} \quad (n \geq n_1). \end{cases}$$

On voit que

$$\delta^*(t) - \delta_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < \lambda_{n_1}, \\ \dfrac{t - \lambda_n}{t}\,\delta_n & \text{pour } \lambda_n \leq t < \lambda_{n+1} \quad (n \geq n_1). \end{cases}$$

Comme $|\delta_n| \leq 1$, on a

$$|\delta^*(t) - \delta_s(t)| \leq 1 \qquad \text{quel que soit } t > 0$$

et

$$|\delta^*(t) - \delta_s(t)| \leq \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} - 1 \qquad \text{pour } \lambda_n \leq t < \lambda_{n+1} \quad (n \geq n_1).$$

Cette dernière inégalité montre que $\delta^*(t) - \delta_s(t)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$.

On peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Phi_x(t, x_p)\,\delta_s(x_p t)\,dt = & \int_0^{+\infty} G_x(t)\,\delta^*(x_p t)\,dt \\ & + \int_0^{+\infty} G_x(t)\,[\delta_s(x_p t) - \delta^*(x_p t)]\,dt \\ & + \int_0^{+\infty} [\Phi_x(t, x_p) - G_x(t)]\,\delta_s(x_p t)\,dt. \end{aligned}$$

Le second terme du premier membre tend vers zéro pour p infini, car la fonction sous le signe $\int$ est de module au plus égal à $|G_x(t)|$, qui est une fonction sommable sur $(0, +\infty)$, et elle tend vers zéro pour p infini.

Il en est de même du troisième terme, car son module est au plus égal à $\int_0^{+\infty} |\Phi_x(t, x_p) - G_x(t)|\,dt$, qui tend vers zéro puisque la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro et est majorée en module par la fonction sommable qui vaut

$$2x\left[F(xt) + \frac{1}{t}\int_0^t F(xu)\,du\right] \qquad \text{pour } t \leq 1$$

et

$$2x\left[F(xt) + \frac{1}{t}\int_t^{+\infty} F(xu)\,du\right] \qquad \text{pour } t > 1.$$

Nous sommes donc ramenés à montrer que, lorsque p tend vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} G_\alpha(t)\hat{\delta}^*(x_p t)\,dt$ tend vers $\tau^*(\alpha)-1=\int_0^{+\infty}|G_\alpha(t)|\,dt$.

b. En vertu d'un théorème bien connu sur le changement d'ordre des passages à la limite, il nous suffira de montrer que, quel que soient b et c positifs, avec $b<c$, $\int_b^c G_\alpha(t)\hat{\delta}^*(x_p t)\,dt$ tend pour p infini vers $\int_b^c |G_\alpha(t)|\,dt$, puisque $\int_b^c G_\alpha(t)\hat{\delta}^*(x_p t)\,dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} G_\alpha(t)\hat{\delta}^*(x_p t)\,dt$ uniformément par rapport à p quand b tend vers zéro et c vers $+\infty$.

Posons

$$\xi_n^{(p)}=\frac{\lambda_n}{x_p}=\frac{\lambda_n}{\lambda_{n_{2p}}}.$$

On voit que, pour $\xi_n^{(p)}\leq t<\xi_{n+1}^{(p)}$, $\hat{\delta}^*(x_p t)=\delta_n$, de sorte que

$$\int_{\xi_n^{(p)}}^{\xi_{n+1}^{(p)}} G_\alpha(t)\,\delta^*(x_p t)\,dt=\delta_n\{H_\alpha[\xi_{n+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_n^{(p)}]\}.$$

Par suite, pour $n_{2p-1}\leq n<n_{2p}$ et pour $n_{2p}<n<n_{2p+1}$,

$$\int_{\xi_n^{(p)}}^{\xi_{n+1}^{(p)}} G_\alpha(t)\,\delta^*(x_p t)\,dt=|H_\alpha[\xi_{n+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_n^{(p)}]|,$$

tandis que

$$\int_{\xi_{n_{2p}}^{(p)}}^{\xi_{n_{2p}+1}^{(p)}} G_\alpha(t)\,\delta^*(x_p t)\,dt=-\{H_\alpha[\xi_{n_{2p}+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_{n_{2p}}^{(p)}]\}.$$

b et c étant fixés, soient n'_p et n''_p les entiers déterminés, pour chaque p, par

$$\lambda_{n'_p}\leq b\lambda_{n_{2p}}<\lambda_{n'_p+1} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{n''_p}<c\lambda_{n_{2p}}\leq\lambda_{n''_p+1},$$

c'est-à-dire

$$\xi_{n'_p}^{(p)}\leq b<\xi_{n'_p+1}^{(p)} \qquad \text{et} \qquad \xi_{n''_p}^{(p)}<c\leq\xi_{n''_p+1}^{(p)}.$$

Comme, pour p infini, $\frac{\lambda_{n_{p+1}}}{\lambda_{n_p}}$ tend vers $+\infty$, on a pour p assez grand $n_{2p-1}\leq n'_p+1<n''_p<n_{2p+1}$, et l'on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\int_b^c G_\alpha(t)\,\delta^*(x_p t)\,dt=&\left|H_\alpha\left[\xi_{n'_p+1}^{(p)}\right]-H_\alpha(b)\right|+\sum_{n'_p+1}^{n''_p-1}|H_\alpha[\xi_{n+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_n^{(p)}]|\\&+\left|H_\alpha(c)-H_\alpha\left[\xi_{n''_p}^{(p)}\right]\right|+\int_b^{\xi_{n'_p+1}^{(p)}} G_\alpha(t)\,\delta^*(x_p t)\,dt+\int_{\xi_{n''_p}^{(p)}}^c G_\alpha(t)\,\delta^*(x_p t)\,dt\\&-\{H_\alpha[\xi_{n_{2p}+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_{n_{2p}}^{(p)}]\}-|H_\alpha[\xi_{n_{2p}+1}^{(p)}]-H_\alpha[\xi_{n_{2p}}^{(p)}]|\\&-\left|H_\alpha\left[\xi_{n'_p+1}^{(p)}\right]-H_\alpha(b)\right|-\left|H_\alpha(c)-H_\alpha\left[\xi_{n''_p}^{(p)}\right]\right|.\end{aligned}$$

Quand p tend vers $+\infty$, la somme des trois premiers termes du second membre tend vers la variation totale de la fonction $H_\alpha(t)$ sur l'intervalle $[b, c]$, soit $\int_b^c |G_\alpha(t)|\,dt$, puisque $H_\alpha(t)$ est continue et la longueur maxima des intervalles partiels $\left[b, \xi_{n'_p+1}^{(p)}\right]$, $\left[\xi_n^{(p)}, \xi_{n+1}^{(p)}\right]$ $(n = n'_p + 1,\ n'_p + 2,\ \ldots,\ n''_p - 1)$, et $\left[\xi_{n''_p}^{(p)}, c\right]$ tend vers zéro. Chacun des six derniers termes tend vers zéro.

3.6.3. Remarquons que, ce que nous venons d'établir prouve en même temps que dans le théorème 5 la constante $\tau^*(\alpha)$ ne peut être remplacée par une plus petite et le signe $\leq$ dans (37) ne peut être remplacé par $<$.

3.6.4. *Dans le cas particulier où $N(t)$ est réelle positive ou nulle et non croissante, on a*

$$\tau^*(\alpha) = \tau(\alpha) + 2K(\alpha).$$

Pour le voir, nous remarquons d'abord que, du fait que l'on a pour $0 < t < u$

$$0 \leq N(t) - N(u) \leq N(t),$$

il résulte que

$$0 \leq \int_0^u [N(t) - N(u)]\,dt \leq \int_0^u N(t)\,dt \leq 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 0 \leq 1 - K(u) - uN(u) \leq 1.$$

On en déduit que, pour α et t positifs quelconques,

$$\alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t) - 1}{t} \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha N(\alpha t) + \frac{K(\alpha t)}{t} \geq 0.$$

La formule (38) donne alors

$$\tau^*(\alpha) = 1 - \int_0^1 \alpha N(\alpha t)\,dt + \int_0^1 \frac{1 - K(\alpha t)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{K(\alpha t)}{t}\,dt,$$

d'où, en tenant compte de ce que $1 = \int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,dt$,

$$\tau^*(\alpha) = \int_0^1 \frac{1 - K(\alpha t)}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{K(\alpha t)}{t}\,dt + 2\int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,dt.$$

La somme des deux premiers termes du second membre est égale à $\tau(\alpha)$, puisque $1 - K(\alpha t)$ et $K(\alpha t)$ sont positifs ou nuls.

D'autre part

$$\int_1^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,dt - \int_\alpha^{+\infty} N(t)\,dt = K(\alpha).$$

3.7. Nous allons maintenant établir le théorème suivant :

Théorème 7. — *Supposons que $\psi(t, x)$ soit réelle* [de sorte qu'il en sera de même de $N(t)$ et $K(t)$].

Si $s(t)$ *est réelle et satisfait à* $s(t)=O[1]$ *pour* t *tendant vers* $+\infty$, *et* $\varpi_s(\lambda)=o$, *alors, en posant*

$$s=\varliminf_{t\to+\infty} s(t), \qquad S=\varlimsup_{t\to+\infty} s(t),$$

$$\psi=\varliminf_{x\to-\infty}\int_0^{+\infty}\psi(t,x)\,s(t)\,dt, \qquad \Psi=\varlimsup_{x\to-\infty}\int_0^{+\infty}\psi(t,x)\,s(t)\,dt,$$

$$K_1=-\operatorname{Inf}K(t), \qquad K_2=\operatorname{Sup}[K(t)-1],$$

(*de sorte que* $K_1\geq o$ *et* $K_2\geq o$), *on a*

$$(45)\qquad s-K_1[S-s]\leq\psi\leq s\leq S\leq\Psi\leq S+K_2[S-s],$$

d'où

$$(46)\qquad \begin{cases}\psi\leq s\leq\psi+\dfrac{K_1}{1+K_1}[\Psi-\psi]\\ \text{et}\\ \Psi-\dfrac{K_2}{1+K_2}[\Psi-\psi]\leq S\leq\Psi.\end{cases}$$

Dans le cas particulier où $o\leq K(t)\leq 1$, *ce qui a lieu par exemple si* $\psi(t,x)\geq o$, *on a*

$$(47)\qquad s=\psi, \qquad S=\Psi.$$

Nous poserons comme précédemment

$$\Psi(x)=\int_0^{+\infty}\psi(t,x)\,s(t)\,dt.$$

a. Indiquons d'abord comment, une fois (45) établi, on en déduit (46). D'abord, si $s=S$, on obtient $\psi=\Psi=s=S$ et l'on a bien (46). Supposons maintenant $s<S$.

La fonction homographique $\dfrac{s-x}{S-x}$ étant décroissante pour $x<S$, on a

$$\frac{s-\psi}{S-\psi}\leq\frac{s-[s-K_1(S-s)]}{S-[s-K_1(S-s)]}=\frac{K_1}{1+K_1},$$

d'où

$$s-\psi\leq\frac{K_1}{1+K_1}[S-\psi]\leq\frac{K_1}{1+K_1}[\Psi-\psi],$$

d'où

$$s\leq\psi+\frac{K_1}{1+K_1}[\Psi-\psi].$$

On a donc bien la première ligne de (46).

De même, la fonction homographique $\dfrac{x-S}{x-s}$ étant croissante pour $x>s$, on

$$\frac{\Psi-S}{\Psi-s}\leq\frac{[S+K_2(S-s)]-S}{[S+K_2(S-s)]-s}=\frac{K_2}{1+K_2},$$

d'où

$$\Psi - S \leq \frac{K_2}{1+K_2}[\Psi - s] \leq \frac{K_2}{1+K_2}[\Psi - \psi],$$

d'où

$$S \geq \Psi - \frac{K_2}{1+K_2}[\Psi - \psi].$$

On a donc bien la seconde ligne de (46).

Ajoutons qu'il est évident que, si $0 \leq K(t) \leq 1$, on a $K_1 = K_2 = 0$ et (45) donne (47).

D'autre part, ceci a manifestement lieu si $\psi(t, x) \geq 0$, car alors $N(t) \geq 0$ et $K(t)$ est non croissante.

b. Pour obtenir (45), nous montrerons d'une part que

$$s - K_1(S - s) \leq \psi \leq \Psi \leq S + K_2(S - s), \tag{48}$$

et d'autre part que

$$\psi \leq s \leq S \leq \Psi. \tag{49}$$

D'après la remarque *a* du paragraphe 1.2, pour établir (48) il suffit de montrer que, de toute suite de nombres réels supérieurs à a tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\Psi(x_n)$ tende vers une limite l satisfaisant à

$$s - K_1(S - s) \leq l \leq S + K_2(S - s). \tag{50}$$

De même, pour établir (49) il suffit de montrer que, de toute suite de nombres réels positifs tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $s(x_n)$ tende vers une limite l' satisfaisant à

$$\psi \leq l' \leq \Psi.$$

c. Commençons par étudier la famille des fonctions $s(xt)$.

En premier lieu, on voit qu'il existe un nombre positif M tel que l'on ait, quels que soient x et t positifs,

$$|s(xt)| \leq M. \tag{51}$$

D'autre part, comme on a, pour $x > 0$ et $0 < t < t'$,

$$s(xt') - s(xt) \geq -\Pi_3'\left(xt, \frac{t'}{t}\right),$$

on voit que, quelle que soit la suite de nombres positifs x_n tendant vers $+\infty$, on a pour t et t' positifs quelconques, avec $t < t'$,

$$\varliminf_{n \to +\infty} [s(x_n t') - s(x_n t)] \geq 0, \tag{52}$$

puisque

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \Pi_s\left(x_n t, \frac{t'}{t}\right) \leq \varpi_s\left(\frac{t'}{t}\right).$$

(51) et (52) vont nous permettre de montrer que, *de toute suite de nombres positifs tendant vers* $+\infty$, *on peut extraire une suite* $\{x_n\}$ *telle que la suite des fonctions* $s(x_n t)$ *converge vers une fonction bornée non décroissante* $\sigma(t)$.

(51) montre d'abord que l'on peut extraire de la suite donnée une suite partielle $\{x'_n\}$ telle que, pour une valeur positive donnée de t, $s(x'_n t)$ tende vers une limite finie. Par le raisonnement bien connu auquel nous avons déjà fait allusion au paragraphe 3.5. on en déduit que l'on peut trouver une suite partielle $\{x''_n\}$ telle que $s(x''_n t)$ converge pour chaque valeur rationnelle positive de t vers une limite $\sigma^*(t)$.

(52) montre que la fonction $\sigma^*(t)$, ainsi définie pour t rationnel positif, est non décroissante.

Par suite, quel que soit t_0 positif, $\sigma^*(t)$ tend vers des limites finies $\sigma^*(t_0 - 0)$ et $\sigma^*(t_0 + 0)$ quand t, en restant rationnel, tend vers t_0 par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures, et l'on a

$$\sigma^*(t_0 - 0) \leq \sigma^*(t_0 + 0).$$

De plus, l'ensemble E des valeurs de t_0 pour lesquelles il n'y a pas égalité est vide, fini ou dénombrable.

On voit que la suite des fonctions $s(x''_n t)$ est en fait convergente non seulement pour t rationnel positif, mais pour toutes les valeurs positives de t n'appartenant pas à E, la limite étant la valeur commune de $\sigma^*(t-0)$ et $\sigma^*(t+0)$. Cela résulte immédiatement de ce que, si t' et t'' sont deux nombres rationnels satisfaisant à $0 < t' < t < t''$, (52) donne

$$\sigma^*(t') \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} s(x''_n t) \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}} s(x''_n t) \leq \sigma^*(t'').$$

Si E est vide, nous prendrons $x_n = x''_n$. Sinon, on peut extraire de la suite $\{x''_n\}$ une suite $\{x_n\}$ telle que $s(x_n t)$ converge sur l'ensemble E.

Dans les deux cas, la suite des fonctions $s(x_n t)$ convergera pour toutes les valeurs positives de t. Désignons par $\sigma(t)$ la fonction limite, évidemment égale à $\sigma^*(t)$ pour t rationnel. (51) et (52) montrent que $\sigma(t)$ est bornée et non décroissante.

d. D'après ce que nous avons dit en *b*, la démonstration de (45) sera achevée lorsque nous aurons montré que, si la suite $\{x_n\}$ tend vers $+\infty$ et est telle que $s(x_n t)$ converge vers la fonction bornée non décroissante $\sigma(t)$, d'une part $\Psi(x_n)$ tend vers une limite l satisfaisant à (50), d'autre part on a

$$\Psi \leq \sigma(1) \leq \Psi \tag{53}$$

[car $s(x_n)$ tend vers $\sigma(1)$].

Reprenons la formule (21) donnée au paragraphe 3.3. Elle s'écrit

$$\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty} x\,\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)s(xt)\,dt$$

(α est un nombre positif quelconque et x est supposé $>\alpha a$).

La fonction sous le signe $\int$ est majorée en module par $M\alpha F(\alpha t)$.

De plus, quand x tend vers $+\infty$, $x\psi\left(xt,\frac{x}{\alpha}\right)$ tend vers $\alpha N(\alpha t)$.

Donc, si $s(x_n t)$ tend vers $\sigma(t)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)=\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\sigma(t)\,dt=\int_0^{+\infty}N(t)\sigma\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt. \tag{54}$$

En particulier, prenons $\alpha=1$:

$$\Psi(x_n)\quad\text{tend vers}\quad l=\int_0^{+\infty}N(t)\sigma(t)\,dt=-\int_0^{+\infty}\sigma(t)\,dK(t).$$

Désignons par $\sigma(+0)$ et $\sigma(+\infty)$ les limites de $\sigma(t)$ pour t tendant vers zéro ou vers $+\infty$.

On a par intégration par parties

$$l=\sigma(+0)+\int_0^{+\infty}K(t)\,d\sigma(t).$$

Comme $-K_1\leq K(t)\leq 1+K_2$, on a

$$-K_1[\sigma(+\infty)-\sigma(+0)]\leq\int_0^{+\infty}K(t)\,d\sigma(t)\leq(1+K_2)[\sigma(+\infty)-\sigma(+0)].$$

Par suite

$$\sigma(+0)-K_1[\sigma(+\infty)-\sigma(+0)]\leq l\leq\sigma(+\infty)+K_2[\sigma(+\infty)-\sigma(+0)]. \tag{55}$$

Mais, comme $\sigma(t)=\lim_{n\to+\infty}s(x_n t)$, on a quel que soit $t>0$

$$s\leq\sigma(t)\leq S,$$

et par suite

$$s\leq\sigma(+0)\leq\sigma(+\infty)\leq S.$$

En tenant compte de ces inégalités, (55) donne (50).

Revenons maintenant à (54) : Il en résulte que, quel que soit $\alpha>0$,

$$\psi\leq\int_0^{+\infty}N(t)\sigma\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt\leq\Psi.$$

Mais $\int_0^{+\infty}N(t)\sigma\left(\frac{t}{\alpha}\right)dt$ tend vers $\sigma(0)$ si α tend vers $+\infty$ et vers $\sigma(+\infty)$ si α tend vers zéro.

On a donc $\psi\leq\sigma(+0)\leq\sigma(+\infty)\leq\Psi$, d'où résulte (53).

3.7.1. Ajoutons la remarque suivante sur le théorème 7 :

D'après ce théorème, avec les hypothèses indiquées, si l'on connaît s et S, on sait que ψ et Ψ doivent satisfaire aux inégalités (45). *Nous allons voir que l'on ne peut remplacer ces inégalités par de plus serrées.*

En effet, étant donnés deux nombres réels A et B, avec $A < B$, nous pouvons former deux fonctions bornées satisfaisant à $\varpi_s(\lambda) = 0$, $s = A$, $S = B$, l'une telle que $\psi = s$ et $\Psi = S$, l'autre telle que $\psi = s - K_1(S - s)$ et $\Psi = S + K_2(S - s)$ ([18]). Nous pouvons même former ces deux fonctions indépendamment du noyau $\psi(t, x)$.

Prenons d'abord

$$s(t) = \frac{A - B}{2} + \frac{B - A}{2} \sin\{\pi \log[\log(2 - t)]\}.$$

$s(t)$ est bornée et l'on a bien $\varpi_s(\lambda) = 0$, $s = A$, $S = B$. De plus, la différence $\Psi(x) - s(x)$ tend vers zéro pour x infini, car

$$\Psi(x) - s(x) = \int_0^\infty x\psi(xt, x)[s(xt) - s(x)]\,dt$$

et la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro pour x infini et reste de module au plus égal à $[B - A]F(t)$. Par suite $\psi = s$, $\Psi = S$.

Définissons maintenant $s(t)$ de la façon suivante :

Donnons-nous une suite de nombres réels positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ satisfaisant à

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots, \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = -\infty.$$

Puis prenons

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{pour } t < x_1, \\ B - (B - A)\dfrac{\log \dfrac{t}{x_n}}{\log \dfrac{x_{n+1}}{x_n}} & \text{pour } x_n \leq t < x_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

$s(t)$ est bornée, on a

$$\varpi_s(\lambda) = 0, \qquad s = A, \qquad S = B.$$

Nous allons voir que l'on a

$$\psi = s - K_1(S - s) \qquad \text{et} \qquad \Psi = S + K_2(S - s).$$

([18]) Au contraire, lorsque ψ et Ψ sont donnés, la borne supérieure donnée pour s et la borne inférieure donnée pour S, dans (46), ne sont pas en général les meilleures possibles. Les meilleures bornes possibles ne semblent pas pouvoir être déterminées simplement.

Il suffit d'observer que, pour n infini, $s(x_n t)$ tend vers la fonction $\sigma(t)$ égale à A pour $t<1$ et à B pour $t\geq 1$, de sorte que (54) donne

$$\lim_{n\to+\infty}\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)=A+(B-A)K(\alpha)=s+(S-s)K(\alpha),$$

ce qui entraine

$$\psi\leq s+(S-s)K(\alpha)\leq\Psi.$$

En faisant varier α, on en déduit

$$\psi\leq s-K_1(S-s)\leq S+K_2(S-s)\leq\Psi,$$

ce qui, avec (45), donne le résultat annoncé.

3.8. Nous allons voir que, moyennant des hypothèses convenables sur le noyau $\psi(t,x)$, on peut remplacer par d'autres l'hypothèse $s(t)=O[1]$ du théorème 7.

Pour cela nous établirons d'abord le théorème suivant :

Théorème 8. — *Supposons que, pour chaque x fixé supérieur à a, la fonction $x\psi(xt,x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1,+\infty)$, et que l'on ait*

$$\int_1^{+\infty} x\psi(xt,x)\log t\,dt=O[1]\qquad(x\to+\infty). \tag{56}$$

Alors, si $w_s(\lambda)<+\infty$ [ou $\hat{\sigma}_s(t)=O[1]$ pour t infini] et si

$$\int_0^{+\infty}\psi(t,x)s(t)\,dt=O[1]\qquad(x\to+\infty),$$

on a

$$s(t)=O[1]\qquad(t\to+\infty)\quad(19).$$

a. Observons d'abord que la sommabilité de $x\psi(xt,x)\log t$ sur l'intervalle $(1,+\infty)$ entraine celle de $\psi(t,x)\log t$ sur tout intervalle $(A,+\infty)$, avec $A>0$.

---

(19) Il est clair que l'hypothèse faite ici sur $\psi(t,x)$ est satisfaite en particulier si $F(t)\log t$ est sommable sur $(1,+\infty)$. Si $\psi(t,x)=\frac{1}{x}N\left(\frac{t}{x}\right)$, elle se traduit par le fait que $N(t)\log t$ est sommable sur $(1,+\infty)$.

Lorsque $F(t)\log t$ est sommable sur $(0,+\infty)$ le résultat est immédiat car, compte tenu de ce que $s(t)$ satisfait à (12), la formule (22) donne

$$\left|\int_0^{+\infty}\psi(t,x)s(t)\,dt-s(x)\right|\leq\int_0^{+\infty}F(t)\,|\,H\,|\log t\,|+K\,|\,dt.$$

Le cas particulier où $\psi(t,x)=\frac{1}{x}N\left(\frac{t}{x}\right)$, avec $N(t)\log t$ sommable sur $(1,+\infty)$, et de plus $N(t)=0$ et $s(t)$ à variation bornée sur tout intervalle fini $[0,L]$, est contenu dans un théorème établi par Karamata [6].

Alors, si $\omega_s(\lambda) < +\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est convergente, puisque $\omega_s(\lambda) < +\infty$ entraîne $s(t) = O[\log t]$.

b. Le principe de notre démonstration sera le suivant :

Nous poserons

$$M(t) = \operatorname{Sup}_{t' \leq t} |s(t')|.$$

On a évidemment $|s(t)| \leq M(t)$. D'autre part, $M(t)$ est non décroissante et, par suite, ne peut que tendre vers $+\infty$ ou rester bornée quand t tend vers $+\infty$.

Nous montrerons que l'on ne peut supposer que $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t sans aboutir à une contradiction.

1° Il résulte de la définition de $M(t)$ que, si $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t, on a

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{|s(t)|}{M(t)} = 1.$$

En effet, d'une part on a toujours $\frac{|s(t)|}{M(t)} \leq 1$, d'autre part, si ε est un nombre positif quelconque inférieur à 1, il existe quel que soit t_0 positif un $t_1 > t_0$ et tel que $\frac{|s(t_1)|}{M(t_1)} \geq 1 - \varepsilon$.

On peut supposer $M(t_0) > 0$. Il existe d'abord $t_2 > t_0$ tel que $M(t_2) > \frac{M(t_0)}{1 - \varepsilon}$; puis il existe un $t_1 \leq t_2$ tel que $|s(t_1)| \geq M(t_2)(1 - \varepsilon)$; ceci entraîne $|s(t_1)| > M(t_0)$ et par suite $t_1 > t_0$; d'autre part, on a

$$\frac{s(t_1)}{M(t_1)} \geq \frac{s(t_1)}{M(t_2)} \geq 1 - \varepsilon.$$

2° Nous allons voir que, si l'on suppose que $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t, les hypothèses du théorème permettent d'en déduire que

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{|s(t)|}{M(t)} = 0,$$

d'où la contradiction annoncée.

Remarquons d'abord que, si l'on pose

$$T(\alpha, x) = \int_x^{+\infty} x \psi(xt, x) \log \frac{t}{x}\, dt, \qquad (\alpha > 0, x > 0),$$

on a, quel que soit $\alpha > 0$,

$$T[\alpha, x] = O(1) \quad \text{pour } x \text{ tendant vers } +\infty.$$

En effet, si $\alpha \geq 1$,

$$T(\alpha, x) \leq \int_1^{+\infty} x \psi(xt, x) \log t\, dt,$$

et, si $\alpha < 1$,

$$T(\alpha, x) \leq \log\frac{1}{\alpha}\int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\,dt - \int_{1}^{+\infty} |x\psi(xt, x)| \log t\,dt.$$

D'autre part, puisque $K(t)$ tend vers 1 quand t tend vers zéro, il existe un α_0 positif tel que $K(\alpha) \neq 0$ pour tout α positif au plus égal à α_0.

Choisissons donc un α positif au plus égal à α_0.

Si l'on pose

$$\Psi(x) = \int_{0}^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\,dt,$$

on pourra écrire

$$(57)\quad \begin{cases} \Psi(x) = \displaystyle\int_{0}^{\alpha x} \psi(t, x)\, s(t)\,dt + s(\alpha x)\int_{\alpha x}^{+\infty} \psi(t, x)\,dt + \int_{\alpha x}^{+\infty} \psi(t, x)\,[s(t) - s(\alpha x)]\,dt, \\ \quad = \displaystyle\int_{0}^{\alpha} x\psi(xt, x)\, s(xt)\,dt + \varphi(\alpha x, x)\, s(\alpha x) + \int_{\alpha}^{+\infty} x\psi(xt, x)[s(xt) - s(\alpha x)]\,dt. \end{cases}$$

On sait que, quand x tend vers $+\infty$, $\varphi(\alpha x, x)$ tend vers $K(\alpha)$. Donc pour x assez grand, $\varphi(\alpha x, x)$ ne sera pas nul.

On aura alors

$$s(\alpha x) \leq \frac{1}{\varphi(\alpha x, x)}\left\{ \Psi(x) - \left|\int_{0}^{\alpha} x\psi(xt, x)\, s(xt)\,dt\right| - \left|\int_{\alpha}^{+\infty} x\psi(xt, x)\,[s(xt) - s(\alpha x)]\,dt\right|\right\}.$$

Mais, en tenant compte de (19) et de la définition de $M(t)$, on a

$$\left|\int_{0}^{\alpha} x\psi(xt, x)\, s(xt)\,dt\right| \leq M(\alpha x)\int_{0}^{\alpha} F(t)\,dt.$$

D'autre part, comme $s(t)$ satisfait à (12), on a

$$\left|\int_{\alpha}^{+\infty} x\psi(xt, x)\,[s(xt) - s(\alpha x)]\,dt\right| \leq \int_{\alpha}^{+\infty} x\psi(xt, x)\left[H\log\frac{t}{\alpha} + K\right]dt$$
$$\leq HT(\alpha, x) + K\int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\,dt.$$

En définitive, on a

$$\frac{s(\alpha x)}{M(\alpha x)} \leq \frac{1}{\varphi(\alpha x)\, M(\alpha x)}\left[\Psi(x) - HT(\alpha x) + K\int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\,dt + M(\alpha x)\int_{0}^{\alpha} F(t)\,dt\right].$$

Si l'on suppose que $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t, ceci entraînera

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\ \frac{s(\alpha x)}{M(\alpha x)} \leq \frac{\displaystyle\int_{0}^{\alpha} F(t)\,dt}{K(\alpha)}.$$

On voit donc que, si $M(t)$ tendait vers $+\infty$ avec t, les hypothèses du théorème entraîneraient que, pour tout α positif au plus égal à α_0,

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{s(t)}{M(t)} \leq \frac{\int_0^\alpha F(t)\,dt}{k(\alpha)}.$$

En faisant tendre α vers zéro, ceci donnerait

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{s(t)}{M(t)} = 0.$$

3.9. Nous allons établir maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 9. — *Supposons que la fonction $\psi(t, x)$ soit réelle positive ou nulle, que, pour chaque x fixé supérieur à a, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait*

$$\int_1^{+\infty} x\psi(xt, x)\log t\,dt = O[1] \qquad \textit{pour } x \textit{ tendant vers } +\infty.$$

Alors, si $s(t)$ est réelle et satisfait à $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, et si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$ est convergente pour $x > a$ et reste bornée quand x tend vers $+\infty$, on a

$$s(t) = O[1] \qquad \textit{pour } t \textit{ tendant vers } -\infty.$$

Le principe de notre démonstration sera le suivant :

Nous poserons

$$s^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s(t) \geq 0, \\ -s(t) & \text{si } s(t) < 0, \end{cases}$$

puis

$$M^*(t) = \operatorname*{Sup}_{t' \leq t} s^*(t').$$

$M^*(t)$ est évidemment non décroissante et par suite ne peut que tendre vers $+\infty$ ou rester bornée quand t tend vers $+\infty$. D'autre part, on a évidemment

$$s(t) \geq -s^*(t) \geq -M^*(t).$$

Nous verrons par ailleurs que, quel que soit η positif, il existe un nombre positif $A(\eta)$ tel que l'on ait, pour tout t positif,

$$s(t) \leq A(\eta) + \eta M^*(t).$$

Par suite, si nous montrons que $M^*(t)$ reste bornée pour t infini, il en résultera qu'il en est de même de $s(t)$.

Or, nous montrerons que l'on ne peut supposer que $M^*(t)$ tend vers $+\infty$ avec t sans aboutir à une contradiction.

a. Montrons d'abord que, quel que soit $\eta > 0$, il existe un nombre positif $A(\eta)$ tel que, quel que soit $t > 0$,

$$s(t) \leq A(\eta) + \eta M^*(t). \tag{58}$$

Le nombre positif η étant donné, choisissons d'abord un nombre positif m inférieur à 1, puis un nombre positif α tel que

$$K(\alpha) > m \qquad \text{et} \qquad \int_0^\alpha F(t)\,dt \leq m\eta.$$

En tenant compte de (19) et de ce que $x\psi(xt, x) \geq 0$ et $s(t) \geq -M^*(t)$, on a

$$\int_0^\alpha x\psi(xt, x)\, s(xt)\,dt \geq -\int_0^\alpha F(t) M^*(xt)\,dt \geq -m\eta M^*(\alpha x).$$

D'autre part, comme $s(t)$ satisfait à (13) pour $0 < t < t'$, on a

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{+\infty} x\psi(xt, x)\,[s(xt) - s(\alpha x)]\,dt &\geq -\int_\alpha^{+\infty} x\psi(xt, x)\left[H \log \frac{t}{\alpha} + K\right] dt \\ &\geq -HT(\alpha, x) - K\int_\alpha^{+\infty} F(t)\,dt,\end{aligned}$$

$T(\alpha, x)$ ayant la même signification qu'au paragraphe 3.8 et satisfaisant encore à $T(\alpha, x) = O[1]$ pour x tendant vers $+\infty$.

Si l'on pose encore

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\,dt,$$

l'égalité (57) donne

$$\Psi(x) \geq -m\eta M^*(\alpha x) + \varphi(\alpha x, x)\, s(\alpha x) - HT(\alpha, x) - K\int_\alpha^{+\infty} F(t)\,dt. \tag{59}$$

Comme, quand x tend vers $+\infty$, $\varphi(\alpha x, x)$ tend vers $K(\alpha)$ tandis que $\Psi(x)$ et $T(\alpha, x)$ restent bornés, on peut trouver deux nombres positifs M et N et un nombre réel x_0 supérieur à a tels que l'on ait pour $x \geq x_0$

$$\Psi(x) \leq M, \qquad T(\alpha, x) \leq N \qquad \text{et} \qquad \varphi(\alpha x, x) \geq m.$$

L'inégalité (59) montre que pour $x \geq x_0$

$$s(\alpha x) \leq \frac{1}{m}\left[M + HN + K\int_\alpha^{+\infty} F(t)\,dt\right] + \eta M^*(\alpha x);$$

autrement dit, pour $t \geq \alpha x_0$,

$$s(t) \leq \frac{1}{m}\left[M + HN + K\int_\alpha^{+\infty} F(t)\,dt\right] + \eta M^*(t).$$

Il suffit de prendre $A(\eta)$ égal au plus grand des deux nombres

$$\frac{1}{m}\left[M + HN + K\int_{\alpha}^{+\infty} F(t)\,dt\right] \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{t\leq \alpha x_0} s(t)$$

pour que l'on ait (58) pour tout $t > 0$.

b. De ce que $s(t)$ satisfait à (13), il résulte que pour $0 < t < t'$

$$M^*(t') - M^*(t) \leq H \log \frac{t'}{t} + K. \tag{60}$$

En effet, t et t' étant fixés, on a pour $0 \leq t'' \leq t$

$$s(t'') \geq -M^*(t'') \geq -M^*(t),$$

et pour $t < t'' \leq t'$

$$s(t'') - s(t) \geq -H \log \frac{t''}{t} - K \geq -H \log \frac{t'}{t} - K,$$

d'où

$$s(t'') \geq s(t) - H \log \frac{t'}{t} - K \geq -M^*(t) - H \log \frac{t'}{t} - K.$$

On a donc pour $0 \leq t'' \leq t'$

$$s(t'') \geq -M^*(t) - H \log \frac{t'}{t} - K,$$

d'où

$$s^*(t'') \leq M^*(t) + H \log \frac{t'}{t} + K.$$

Par suite,

$$M^*(t') \leq M^*(t) + H \log \frac{t'}{t} + K.$$

Remarquons que (60) entraîne que, pour t infini, $M^*(t) = O[\log t]$, d'où résulte que $x\psi(xt, x)M^*(xt)$ est sommable sur $(0, +\infty)$.

c. Choisissons deux nombres positifs β et γ tels que $\beta < \gamma$ et $K(\beta) - K(\gamma) > 0$, ce qui est possible puisque $K(t)$ tend vers 1 quand t tend vers zéro et vers zéro quand t tend vers $+\infty$. Nous supposerons maintenant β et γ fixés.

Nous pouvons écrire

$$\Psi(x) = \int_0^{\beta} x\psi(xt, x)\,s(xt)\,dt + \int_{\beta}^{\gamma} x\psi(xt, x)\,s(xt)\,dt + \int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt, x)\,s(xt)\,dt. \tag{61}$$

η étant un nombre positif quelconque, on a pour $0 < t < \beta$

$$s(xt) \leq A(\eta) + \eta M^*(xt) \leq A(\eta) + \eta M^*(\gamma x).$$

Par suite,

$$\int_0^{\beta} x\psi(xt, x)\, s(xt)\, dt \leqq [A(\eta) + \eta M^*(\gamma x)]\,[1 - \varphi(\beta x, x)]. \tag{62}$$

De même, (58) donne

$$\int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt, x)\, s(xt)\, dt \leqq A(\eta)\,\varphi(\gamma x, x) + \eta \int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt, x) M^*(xt)\, dt,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt, x)\, s(xt)\, dt \leqq [A(\eta) + \eta M^*(\gamma x)]\,\varphi(\gamma x, x) + \eta \int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt, x)\,[M^*(xt) - M^*(\gamma x)]\, dt,$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de (60),

$$\int_{\gamma}^{+\infty} x\psi(xt, x)\, s(xt)\, dt \leqq [A(\eta) + \eta M^*(\gamma x) + \eta K]\,\varphi(\gamma x, x) + \eta HT(\gamma x). \tag{63}$$

Enfin, $s(t)$ satisfaisant à (13), on a pour $\beta \leqq t \leqq \gamma$

$$s(\gamma x) - s(xt) \geqq -H \log \frac{\gamma}{t} - K \geqq -H \log \frac{\gamma}{\beta} - K,$$

d'où

$$s(xt) \leqq s(\gamma x) + H \log \frac{\gamma}{\beta} + K,$$

et l'on voit que

$$\int_{\beta}^{\gamma} x\psi(xt, x)\, s(xt)\, dt \leqq [\varphi(\beta x, x) - \varphi(\gamma x, x)]\left[s(\gamma x) + H \log \frac{\gamma}{\beta} + K\right]. \tag{64}$$

En définitive, en tenant compte de (62), (63) et (64), l'égalité (61) donne une égalité de la forme

$$\Psi(x) \leqq [\varphi(\beta x, x) - \varphi(\gamma x, x)]\, s(\gamma x) + \eta[1 - \varphi(\beta x, x) + \varphi(\gamma x, x)]\, M^*(\gamma x) + \Theta(\eta, x), \tag{65}$$

où $\Theta(\eta, x)$ est une fonction qui, pour η fixé, reste bornée quand x tend vers $+\infty$.

Comme, quand x tend vers $+\infty$, $\varphi(\beta x, x) - \varphi(\gamma x, x)$ tend vers $K(\beta) - K(\gamma)$, que nous avons supposé positif, on aura pour x assez grand

$$\varphi(\beta x, x) - \varphi(\gamma x, x) > 0,$$

et (65) donnera alors

$$\frac{s(\gamma x)}{M^*(\gamma x)} \geqq -\eta \frac{1 - \varphi(\beta x, x) + \varphi(\gamma x, x)}{\varphi(\beta x, x) - \varphi(\gamma x, x)} + \frac{\Psi(x) - \Theta(\eta, x)}{[\varphi(\beta x, x) - \varphi(\gamma x, x)]\, M^*(\gamma x)}.$$

Si l'on suppose que $M(t)$ tend vers $+\infty$ avec t, ceci entraînera que

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}}\frac{s(t)}{M^*(t)}=\overline{\lim_{x\to-\infty}}\frac{s(\gamma x)}{M^*(\gamma x)}\geq-\eta\,\frac{1-K(\beta)+K(\gamma)}{K(\beta)-K(\gamma)}.$$

Comme η est un nombre positif arbitraire, on voit que l'hypothèse que $M^*(t)$ tend vers $+\infty$ avec t entraînerait

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{s(t)}{M^*(t)}\geq 0.$$

Or, en utilisant la définition de $M^*(t)$, la même hypothèse entraînerait, par un raisonnement analogue à celui fait au paragraphe 3.8, 1°,

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{s(t)}{M^*(t)}=-1,$$

d'où contradiction.

$M^*(t)$ reste donc bornée pour t infini, et il en est de même de $s(t)$ puisque, avec η positif quelconque,

$$-M^*(t)\leq s(t)\leq\Lambda(\eta)+\eta M^*(t)\quad(^{20}).$$

3.10 En combinant les théorèmes 7 et 8, on obtient le suivant :

THÉORÈME 10. — *Supposons que $\psi(t,x)$ soit réelle, que, pour chaque x fixé supérieur à a, la fonction $x\psi(xt,x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1,+\infty)$, et que l'on ait*

$$\int_1^{+\infty}\left|x\psi(xt,x)\right|\log t\,dt=O[1]\qquad(x\to+\infty).$$

Si $s(t)$ est réelle et si l'on a

$$\omega_s(\lambda)<+\infty,\qquad\varpi_s(\lambda)=0,\qquad\text{et}\qquad\int_0^{+\infty}\psi(t,x)s(t)\,dt=O[1]\qquad(x\to+\infty),$$

alors, avec les notations du théorème 7, on a (45) et (46).

Dans le cas particulier où $0\leq K(t)\leq 1$, on a (47).

3.11. En combinant les théorèmes 7 et 9, on obtient le suivant :

THÉORÈME 11. — *Supposons que la fonction $\psi(t,x)$ soit réelle positive ou nulle,*

---

(20) Cette démonstration est inspirée de Ramaswami [13] (th. I, 1, p. 410).

Dans le cas où $\psi(t,x)=\frac{1}{x}N\left(\frac{t}{x}\right)$, on pourrait utiliser le théorème 11 de notre second Mémoire et le théorème 8 ci-dessus. L'hypothèse faite ici sur $\psi(t,x)$ [en plus de celle que $\psi(t,x)$ est réelle ≥ 0] se traduit dans ce cas par le fait que $N(t)\log t$ est sommable sur $(1,+\infty)$. Mais si $N(t)\log t$ est sommable sur $(0,+\infty)$, on obtient une simplification notable en utilisant les théorèmes indiqués, du fait que le théorème 8 est alors immédiat [*Cf.* note (19), p. 150].

que, pour chaque x fixé supérieur à a, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait

$$\int_1^{+\infty} \psi(xt, x)\log t\, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty).$$

Alors, si $s(t)$ est réelle et si l'on a

$$\varpi_s(\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty),$$

on a

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}}\, s(t) = \underline{\lim_{x\to+\infty}} \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, s(t) = \overline{\lim_{x\to+\infty}} \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt \quad (21).$$

3.12. Les théorèmes 10 et 11 donnent comme cas particuliers les théorèmes inverses suivants :

THÉORÈME 10*a*. — *Avec les hypothèses du théorème* 10 *sur $\psi(t, x)$, si $s(t)$ est réelle et satisfait à $\varpi_s(\lambda) < +\infty$ et $\varpi_s(\lambda) = 0$, et si $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ tend vers une limite finie* S *quand x tend vers $+\infty$, alors $s(t)$ tend vers* S *quand t tend vers $+\infty$.*

THÉORÈME 11*a*. — *Avec les hypothèses du théorème* 11 *sur $\psi(t, x)$, si $s(t)$ est réelle et satisfait à $\varpi_s(\lambda) = 0$, et si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$ et tend vers une limite finie* S *quand x tend vers $+\infty$, alors $s(t)$ tend vers* S *quand t tend vers $+\infty$.*

3.13. Remarquons que, *dans tous les énoncés des théorèmes de ce chapitre où figure l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$, on pourrait remplacer celle-ci par $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$, en ajoutant l'hypothèse que $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$.*

En effet, dans les théorèmes 1 à 3 et le théorème 5 figure l'hypothèse que $F(t)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$ et celle que $\varpi_s(\lambda) < +\infty$ [ou celle que $\hat{c}_s(t) = O[1]$ quand $t \to +\infty$, qui lui est équivalente].

---

(21) Dans le cas particulier où $\psi(t, x) = \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)$, ce théorème est contenu dans un théorème de Ramaswami [13] (th. 1, 2, p. 414). (Un cas particulier de ce dernier théorème se trouve déjà dans [12]).

Au contraire, nos théorèmes 7 et 10, où $\psi(t, x)$ n'est pas supposé ≥ 0, sont entièrement nouveaux.

Or, d'après ce qui a été dit au paragraphe 3.2*c*, on sait que, lorsque $F(t)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, si $\omega_3(\lambda) < +\infty$ et si $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, non seulement l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$ est convergente pour $x > a$, mais l'intégrale $\int_0^{-\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ l'est aussi et lui est égale ([22]).

Comme ceci résulte de ce que la sommabilité de $F(t)\log t$ sur $(0, +\infty)$ entraîne celle de $\psi(t, x)\log t$ et que la sommabilité de $\psi(t, x)\log t$ sur $(1, +\infty)$ entraîne elle-même que $\varphi(t, x)\log t$ tend vers zéro pour t infini, on voit qu'il en est de même lorsque l'on suppose simplement que $\psi(xt, x)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

Dans les théorèmes 8, 10 et 10*a*, nous avons précisément les hypothèses que $x\psi(xt, x)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$ et $\omega_3(\lambda) < +\infty$.

Dans le théorème 7, on suppose que $s(t)$ est bornée. D'après ce qui a été dit au paragraphe 3.1.2, si $s(t)$ est en outre à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, l'intégrale $\int_0^{-\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ est convergente pour $x > a$, comme $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$, et est égale à celle-ci.

Enfin, dans les théorèmes 9, 11 et 11*a* figure l'hypothèse que $\psi(t, x) \geq 0$. D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.1.2, si $\psi(t, x) \geq 0$, si $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, et si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ est convergente, $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$ l'est aussi et lui est égale.

Bibliographie.

[1] R. P. Agnew, *Abel transforms and partial sums of tauberian series* (*Annals of Math.*, vol. 50, 1949, p. 110-117).

[2] H. Delange, *Théorèmes taubériens généraux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 28-31).

[3] H. Delange, *Quelques théorèmes taubériens* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1787-1790).

[4] H. Hadwiger, *Die Retardierungserscheinung bei Potenzreihen und Ermittlung zweier Konstanten Tauberscher Art* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 20, 1947, p. 319-332).

[5] Ph. Hartman, *Tauber's theorem and absolute constants* (*Amer. J. of Math.*, vol. 69, 1947, p. 599-606).

[6] J. Karamata, *Über einige Inversionsätze der Limitierungsverfahren* (*Publ. Math. Univ. de Belgrade*, t. 3, 1934, p. 153-160).

[7] J. Karamata, *Über einen Konvergenzsatz des Herrn Knopp* (*Math. Z.*, t. 40, 1935, p. 124-125).

[8] J. Karamata, *Über einige reihentheoretische Sätze* (*Math. Z.*, t. 41, 1936, p. 67-74).

([22]) Nous avons d'ailleurs déjà utilisé ce fait aux paragraphes 3.5.1 et 3.6.1.

[9] J. KARAMATA, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité* (*Act. Scient. et indust.*, n° 450, Hermann, Paris 1937).

[10] H. R. PITT, *General tauberian theorems* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 44, 1938, p. 243-288].

[11] H. R. PITT, *General tauberian theorems II* (*J. London Math. Soc.*, t. 15, 1940, p. 97-112).

[12] RAMASWAMI, *Some tauberian theorems on oscillation* (*J. London Math. Soc.*, t. 10, 1935, p. 294-308).

[13] RAMASWAMI, *The generalized Abel-Tauber theorem* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 41, 1936, p. 408-417].

[14] M. RIESZ, *Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen* (*Acta Mathem.*, t. 40, 1936, p. 349-361).

[15] A. WINTNER, *On Tauber's theorem*, (*Comm. Math. Helv.*, vol. 20, 1947, p. 216-222).

CLASSES DE SATURATION DES PROCÉDÉS DE SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER

ET

APPLICATIONS AUX SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

PAR M. MARC ZAMANSKY.

INTRODUCTION.

Dans un Mémoire antérieur [5] (1), nous avons indiqué les classes de saturation pour quelques procédés de sommation des séries de Fourier des fonctions continues. L'objet du présent travail est de donner une réponse plus générale à ce problème en considérant les procédés de sommation définis par une fonction sommatoire $g(u)$ telle que $g(0)=1$, $g(1)=0$ et qui consistent à étudier l'approximation fournie d'une fonction continue

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{p=1}^{\infty}(a_p\cos px+b_p\sin px),$$

par les polynômes

$$P_n(g,f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{p=1}^{n-1}g\left(\frac{p}{n}\right)(a_p\cos px+b_p\sin px).$$

Le premier résultat concernait le procédé défini par $g(u)=1-u$

(1) Ces chiffres renvoient à la bibliographie p. 198.

[procédé (C, 1)]. Nous avons montré que la condition nécessaire et suffisante pour que f fût approchée à $O\left(\frac{1}{n}\right)$ près par ses sommes de Fejer, était que la fonction conjuguée f' de f satisfît à une condition de Lipschitz d'ordre 1 et nous indiquions que cette condition était équivalente à

$$\int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}\,dt = O(1),$$

uniformément en ε et x.

Pour des procédés non réguliers, c'est-à-dire qui ne sont pas définis *a priori* par une fonction sommatoire, nous montrions que l'étude était possible en utilisant les propriétés des dérivées de polynômes trigonométriques $P_n(x)$ convergeant uniformément vers $f(x)$ [procédés (C, k) pour k entier >0, procédés de Jackson-de la Vallée-Poussin, procédés construits à partir des différences successives de f]. Les procédés non réguliers ne seront pas envisagés ici.

Moyennant des conditions de dérivabilité assez larges imposées à $g(u)$, le résultat général relatif aux procédés définis par $g(u)$ de type p entier que nous définirons, est le suivant :

La classe de saturation est définie pour p impair par $f^{(p-1)} \in \mathrm{Lip}\,1$, pour p pair par $f^{(p-1)} \in \mathrm{Lip}\,1$.

Au cours de ce travail, nous étudions l'approximation de $f(x)$ par des polynômes provenant d'un procédé de type p lorsque $f(x)$ appartient à la classe des fonctions dont la meilleure approximation trigonométrique d'ordre n est $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(0<r<p)$, complétant ainsi les résultats de M. de Nagy [3] et nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour que $f^{(p)}$ ou $f'^{(p)}$ satisfasse à une condition de Lipschitz d'ordre α $(0<\alpha\leq 1)$, exprimée au moyen de f.

A la fin de la première Partie, nous abordons le problème de la saturation des procédés non nécessairement convergents, tels ceux qui sont définis par $1+u^p$.

La seconde Partie est réservée à des applications et à des précisions supplémentaires. Nous donnons la relation existant en un point x entre l'approximation de f et f' par leurs sommes de Fourier S_n et S'_n, lorsque f est continue. Une étude précise de l'approximation de f' par ses sommes de Fejer σ'_n lorsque la meilleure approximation $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$ nous a permis d'obtenir une condition exprimée au moyen de $f(x)$ et non au moyen de $f'(x)$, ce qui faisait l'objet d'un théorème antérieur. L'égalité obtenue donne des résultats concernant les séries trigonométriques. En particulier nous généralisons un théorème de Fatou et indiquons des critères de convergence concernant des séries de la

forme $\sum a_{n_p}\cos n_p x + b_{n_p}\sin n_p x$ avec la condition $\sum_1^p n_k = O(n_p)$, plus générale que $\frac{n_{p+1}}{n_p} > q > 1$ et qui n'est pas incompatible avec la condition $\lim_{p\infty}\frac{n_{p+1}}{n_p} = 1$.

RAPPEL DE RÉSULTATS ANTÉRIEURS ET NOTATIONS.

1. Soit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_p \cos px + b_p \sin px$$

une fonction sommable de période 2π et sa série de Fourier. Nous écrirons

$$(N.1) \qquad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_p \cos px + b_p \sin px$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{\sin t}\sin(2n+1)t\,dt,$$

$$(N.2) \quad S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)}{\sin t}\sin(2n+1)t\,dt.$$

La fonction conjuguée de $f(x)$ sera désignée par $f^*(x)$ et lorsqu'elle existe

$$(N.3) \qquad f^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\,dt.$$

La série conjuguée sera

$$\sum_1^\infty (b_p \cos px - a_p \sin px),$$

$$(N.4) \qquad S_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{\sin t}[\cos t - \cos(2n+1)t]\,dt.$$

Nous posons

$$(N.5) \qquad \sigma_n(x) = \frac{S_0 + \ldots + S_{n-1}}{n},$$

et lorsque l'égalité suivante a un sens

$$(N.6) \qquad f - \sigma_n^* = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t^2}\sin nt\,dt.$$

2. Soient

$$(N.7)\qquad \begin{cases} \Delta_1(t) = \Delta_1(f, x, t) = f(x+t) - f(x-t), & \dots, \\ \Delta_{2p+1}(t) = \Delta_{2p-1}(t) - 2^{2p-1}\Delta_{2p-1}\left(\frac{t}{2}\right), \end{cases}$$

$$(N.8)\qquad \begin{cases} \Delta_2(t) = \Delta_2(f, x, t) = f(x-t) - 2f(x) + f(x+t), & \dots. \\ \Delta_{2p}(t) = \Delta_{2p-2}(t) - 2^{2p-2}\Delta_{2p-2}\left(\frac{t}{2}\right). \end{cases}$$

Soit $E_n(f)$ la meilleure approximation trigonométrique de $f(x)$ d'ordre n. Nous rappelons que si $f^{(p)} \in \text{Lip}\alpha (0 < \alpha \leq 1)$, $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right)$.

Réciproquement si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+\alpha}}\right)$ $(0 < \alpha < 1)$, $f^{(p)}$ existe et $\in \text{Lip}\alpha$.

Si dans les hypothèses on remplace $\text{Lip}\alpha$ par $\text{lip}\alpha$ ou O par o on peut dans les conclusions remplacer O par o ou $\text{Lip}\alpha$ par $\text{lip}\alpha$, lorsque $0 < \alpha < 1$.

$$(N.9)\quad \text{Si}\quad E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)\quad \text{ou}\quad o\left(\frac{1}{n}\right),\qquad \text{alors}\qquad E_n(f') = O\left(\frac{1}{n}\right)\quad \text{ou}\quad o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

$$(N.10)\qquad \frac{\Delta_2(t)}{t} = O(1), \qquad \text{uniformément borné en } x \text{ et } t,$$

ou

$$(N.11)\qquad \frac{\Delta_2(t)}{t} = o(1), \qquad \text{tend vers zéro avec } t \text{ uniformément en } x.$$

3. Si l'on pose

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + n\sigma_n}{1 + 2 + \dots + n},$$

on a

$$(N.12)\qquad \sigma_n^{2\prime} = (n+1)(\sigma_n^2 - \sigma_n) \qquad \text{et} \qquad \sigma_n' = (n+1)(\sigma_n - \sigma_n^2).$$

4. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue, positive, non croissante. Si une suite de polynômes trigonométriques $P_n(x)$ est telle que

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{\varphi(n)}{n^{k-1}},$$

où k est entier positif, alors

$$(N.13)\qquad P_n^{(k)}(x) = O(n\varphi(n)) + O(1)\int_1^n \varphi(t)\,dt + O(1)$$

uniformément en x.

En particulier si $|P_n - f| = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a

$$P_n''(x) = O(n) \quad \text{ou} \quad o(n).$$

Lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{\Delta_2(t)}{t^2}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{N.14}$$

$$n(\sigma_n^2 - f) = 2n(\sigma_n - f) - O(1) \quad \text{ou} \quad o(1). \tag{N.15}$$

Si $f'(x)$ est continue pour $0 \leq x \leq 2\pi$:

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{f'(x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{N.16}$$

CHAPITRE I.

CLASSES DE SATURATION

Nous établissons quelques lemmes préliminaires.

LEMME I. — *Pour que* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(r > 0)$, *il faut et il suffit que* $\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^r} = O(1)$ *ou* $o(1)$ *pour* $2p > r$.

LEMME II. — *Si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sigma_n'' = O(n)$ *ou* $o(n)$.

LEMME III. — *Soit* $\{\rho_n\}$ *une suite de nombres positifs, tendant vers zéro pour* $n \infty$. *S'il existe une suite de polynômes trigonométriques* $P_n(x)$ *d'ordre* n, *tels que* $P_n - f = O(\rho_n)$ *et que* $P_n^{(2p)}(x) = O(n^{2p}\rho_n)$, p *étant entier* > 0, *alors*, q *étant un entier* > 1 :

$$\frac{1}{n^{q-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q} \sin nt\,dt = O(\rho_n), \qquad \frac{1}{n^{q-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{-\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q} \cos nt\,dt = O(\rho_n).$$

Si dans les hypothèses on peut remplacer O *par* o, *on peut aussi dans les conclusions remplacer* O *par* o.

Démonstrations. — *Lemme* I. — Nous avons précédemment utilisé les expressions

$$u_n^{(p)} = \frac{\lambda_{p-1}}{n^{2p-1}}\int_0^{\pi} \frac{\Delta_{2p}(2t)}{t^{2p-2}} \sin^{2p-2} nt\,dt,$$

différences entre une somme trigonométrique d'ordre $2^p pn$ et $f(x)$ [5].

Si $\Delta_{2p}(t) = O(|t|^r)$, $u_n^{(p)} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^r} \to 0$ avec t, uniformément en x, posons $\left|\frac{\Delta_{2p}(t)}{t^r}\right| = \varepsilon(t)$ pour $0 \ldots t \ldots \pi$.

On a

$$u_n^p = \frac{\Delta_{p+1}}{n^{2p+1}}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} + \int_{\pi}^{+\infty}\right]$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{2p+1}}\right)\int_0^{\frac{1}{n}} \varepsilon(t)\, t^r n^{2p+2}\, dt + O\left(\frac{1}{n^r}\right)\int_1^{n\pi} \frac{\varepsilon\left(\frac{t}{n}\right)t^r}{t^{2p+2}} \sin^{2p+2} t\, dt + O\left(\frac{1}{n^{2p+1}}\right)$$

$$= o\left(\frac{1}{n^r}\right) + O\left(\frac{1}{n^r}\right)\int_1^{n\pi},$$

car $2p > r$,

Si l'on écrit la dernière intégrale $\int_1^{\pi\sqrt{n}} + \int_{\pi\sqrt{n}}^{\pi n}$ on trouve, d'après la première formule de la moyenne,

$$\int_1^{\pi\sqrt{n}} = o(1), \qquad \int_{\pi\sqrt{n}}^{\pi n} = O(1)\int_{\pi\sqrt{n}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2p+2}} = o(1).$$

Réciproquement si $P_n - f = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, d'après (N. 13) on a

$$P_n^{(2p)}(x) = O(n^{2p-r}) \quad \text{ou} \quad o(n^{2p-r}) \qquad (2p > r).$$

Écrivons

$$f(x) = \sum_1^{\infty} (P_{2k+1} - P_{2k}).$$

D'où, lorsque $E_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$:

$$(1) \qquad \Delta_{2p}(f, x, t) = \sum_1^{\infty} \Delta_{2p}(P_{2k+1} - P_{2k}, x, t) = \sum_1^{N} + \sum_{N+1}^{\infty}.$$

Or $\Delta_{2p}(P_n, x, t) = |t|^{2p} O\left(\max_x |P_n^{(2p)}|\right)$. Donc

$$\Delta_{2p}(f, x, t) = O(|t|^{2p}) \sum_{k=1}^{N} 2^{k(2p-r)} + \sum_{k=N+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{2^{kr}}\right) = O(|t|^r),$$

en choisissant N de façon que

$$\frac{1}{2^{N+1}} \leq |t| < \frac{1}{2^N}.$$

Si $E_n = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, on écrira $|P_n^{(2p)}(x)| < \varepsilon_n n^{2p-r}$ $\left(\lim_{n\infty} \varepsilon_n = 0\right)$ et l'on obtient

$$\Delta_{2p}(f, x, t) = O(|t|^{2p}) \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k 2^{k(2p-r)} + o\left(\frac{1}{2^{Nr}}\right).$$

Or les hypothèses $c_k > 0$, $\varepsilon_k = o(1)$ et $\sum c_k$ diverge, entraînent

$$\sum_1^N \varepsilon_k c_k = o\left(\sum_1^N c_k\right).$$

Donc

$$\Delta_{2p}(f, x, t) = O(|t|^{2p})\, o(2^{N.2p-r)}) + o\left(\frac{1}{2^{Nr}}\right) = o(|t|^r),$$

en choisissant N comme précédemment.

Lemme II. — Dans un travail antérieur ([5], th. 20), nous avons prouvé que si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sigma_n'' = O(n)$. Dans le cas où $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, il suffit de reprendre la démonstration en remplaçant l'hypothèse $\Delta_2(t) = O(t)$ par $\Delta_2(t) = o(t)$.

Lemme III. — Nous avons vu ([5], p. 53) que si f possède une dérivée d'ordre $2p$ bornée, alors pour $k \leq 2p$:

$$\Delta_{2p}(t) = |t|^{2p} O\left(\max_x |f^{(2p)}(x)|\right), \ldots,$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\Delta_{2p}(t) = |t|^{2p-k} O\left(\max_x |f^{(2p)}(x)|\right).$$

Considérons par exemple

$$u_n = \frac{1}{n^{q-1}} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_{2p}(t)}{t^q} \sin nt\, dt.$$

Si l'on remplace f par un polynôme P_n, tel que $f - P_n = O(\rho_n)$, on commet une erreur qui est $O(\rho_n)$. Désignons par $\Delta_{2p}''(t)$ ce qui devient $\Delta_{2p}(t)$ quand on a remplacé f par P_n et intégrons par parties. Il vient

$$u_n = \left[-\frac{1}{n^q}\frac{\Delta_{2p}^n(t)}{t^q}\right]_{t=\frac{1}{n}}^{+\infty} + \frac{1}{n^q}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\left[\frac{1}{t^q}\left(\frac{d}{dx}\Delta_{2p}^n\right) - \frac{q\,\Delta_{2p}^n}{t^{q+1}}\right]\cos nt\, dt.$$

Or

$$\Delta_{2p}^n\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\left(\max_x |P_n^{(2p)}(x)|\right) = O(\rho_n).$$

Donc

$$u_n = O(\rho_n) + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\left(\frac{d}{dx}\Delta_{2p}^n\right)\frac{\cos nt}{t^q}\,dt - \frac{q}{n^q}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2p}^n}{t^{q+1}}\cos nt\, dt.$$

On intègre à nouveau par parties et l'on remarque que

$$\left[\frac{d}{dx}\Delta_{2p}^n(t)\right]_{t=\frac{1}{n}} = O\left(\frac{1}{n^{2p-1}}\right)\max_x |P_n^{(2p)}| = O\left(\frac{\rho_n}{n}\right),$$

$$\left[\frac{1}{n^{q-1}}\left(\frac{d}{dx}\Delta_{2p}^n\right)\frac{1}{t^q}\right]_{t=\frac{1}{n}} = O(\rho_n),$$

$$\frac{1}{n^{q-1}}\frac{\Delta_{2p}^n\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{q+1}} = O(\rho_n).$$

Après $2p$ opérations, on aboutit à des termes tels que

$$\frac{1}{n^{q-1-2p}}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left(\frac{d^{2p}}{dx^{2p}}\Delta_{2p}^{q}\right)\frac{\sin nt}{t^{q}}\,dt, \qquad \frac{1}{n^{q-1-2p}}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{\Delta_{2p}^{q}(t)}{t^{q-2p}}\sin nt\,dt.$$

La première quantité vaut

$$\frac{1}{n^{q-1-2p}}O(\max\ P_n^{2p})\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{dt}{t^{q}}=O(\varepsilon_n).$$

La seconde vaut

$$\frac{1}{n^{q-1-2p}}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{t^{2p}O(n^{2p}\varepsilon_n)}{t^{q-2p}}\,dt=O(\varepsilon_n).$$

On constate :

1° que si l'on peut dans les hypothèses remplacer O par o, cette démonstration reste valable et dans la conclusion on peut remplacer O par o:

2° que si l'on suppose pour un entier $k>0$, $P_n^{k}(x)=O(n^k\varepsilon_n)$ ou $o(n^k\varepsilon_n)$, le résultat précédent est valable, parce qu'en vertu du théorème de Bernstein,

$$P_n^{2p}(x)=O(n^k\varepsilon_n)n^{2p-k}=O(n^{2p}\varepsilon_n)\quad\text{ou}\quad o(n^{2p}\varepsilon_n);$$

3° que, d'après (X.13), les hypothèses du lemme III sont satisfaites, lorsque $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ [ce qui entraîne $E_n(f')=O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$].

Corollaire du lemme III. — *Si* $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, *alors*

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt=O\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad ou\quad o\left(\frac{1}{n^r}\right)\qquad (o<r\leq 1);$$

$$\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt=O\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad ou\quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).\qquad (r>1).$$

La première Partie résulte du lemme I.

Pour démontrer la seconde Partie, supposons d'abord que $1<r<2$ et soit

$$u_n=\frac{1}{2n\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 2nt=\frac{1}{2n\pi}\int_{0}^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2n\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}.$$

D'après le lemme I, la première de ces deux dernières intégrales vaut $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$; d'après le lemme III, la seconde vaut aussi $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $2\leq r<4$, on a

$$2u_{2n}-u_n-2\sigma_{2n}+\sigma_n=f=O\left(\frac{1}{n^r}\right)\quad ou\quad o\left(\frac{1}{n^r}\right)\qquad [4].$$

En changeant t en $\frac{t}{2}$, on obtient

$$u_{2n} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 4nt\,dt = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_2(t)}{t^2}\cos 2nt\,dt,$$

et d'après (N.8) :

$$u_n - 2^2 u_{2n} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_3(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt.$$

La même démonstration que nous avons utilisée dans le cas où $1 < r < 2$, prouve que cette dernière intégrale vaut $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

On a donc

(2) $$u_n - 2^2 u_{2n} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

(3) $$u_n - 2u_{2n} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

On en conclut que $u_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $4 \leq r < 6$, on forme

$$u_{2n} - 2^2 u_{4n} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_3(t)}{t^2}\cos 2nt\,dt.$$

D'où

(4) $$u_n - 4u_{2n} - 2^4[u_{2n} - 4u_{4n}] = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_6(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

A partir de (2), on obtient

(5) $$u_{2n} - 2^2 u_{4n} = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

De (3), (4), (5), on conclut que $u_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Ce procédé de démonstration est évidemment valable quel que soit r.

De ce corollaire, on déduit le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(r > 1)$, *alors*

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{f'(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad ou \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

En effet

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\,dt - \frac{1}{2n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\cos 2nt\,dt.$$

Or on a vu ([5], p. 73), que

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\,dt.$$

Le corollaire du lemme III appliqué à $\sigma_n - f - \frac{f''(x)}{n}$, achève la démonstration.

On remarquera que les mêmes hypothèses entraînent que

$$f(x) - \sigma_n(x) = \frac{f'(x)}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

I. — Procédés définis par $g(u) = 1 - u^p$, p entier ≥ 1.

Rappelons en quoi consiste le phénomène et le problème de la saturation. Soit (γ) un procédé de sommation de la série de Fourier de f continue, c'est-à-dire une suite de constantes γ_k^n $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ et les polynômes trigonométriques

$$T_n(\gamma, f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

S'il existe une fonction $\varphi_\gamma(n)$ croissante, telle que quel que soit n, $\max[\varphi_\gamma(n) | T_n - f|] > a$, où a est une constante positive qui dépend de f, et si de plus il existe des fonctions f pour lesquelles $\max \varphi_\gamma(n) | T_n - f | < b$, où b est une autre constante dépendant de f, on dira que le procédé (γ) se sature. La classe de saturation attachée à (γ) est l'ensemble des fonctions continues non constantes telles que

$$T_n(\gamma, f, x) - f(x) = O\left(\frac{1}{\varphi_\gamma(n)}\right).$$

Considérons le procédé (g) défini par la fonction sommatoire $g(u) = 1 - u^p$ $\left(\gamma_k^n = g\left(\frac{k}{n}\right)\right)$. Désignons par T_n^p le polynôme $T_n(g, f, x)$.

Théorème 2. — *Le procédé (g) défini par $1 - u^p$ est saturé; l'ordre de l'approximation de saturation est $\varphi_\gamma(n) = \frac{1}{n^p}$; pour que $T_n^p - f = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ il faut et il suffit que*

$$f^{(p-1)} \in \mathrm{Lip}\, 1 \quad \text{si} \quad p = 2m+1,$$
$$f^{(p-1)} \in \mathrm{Lip}\, 1 \quad \text{si} \quad p = 2m.$$

Démonstration. — Un calcul facile montre que

$$(6) \qquad T_n^{2m} = S_n + (-1)^{m-1} \frac{S_n^{(2m)}}{n^{2m}} = \sigma_n - \frac{\sigma_n'}{n} - \frac{\sigma_n''}{n^2} + \ldots + (-1)^m \frac{\sigma^{(2m-1)}}{n^{2m-1}},$$

$$(7) \qquad T_n^{2m+1} = S_n + (-1)^m \frac{S_n^{(2m+1)}}{n^{2m+1}} = \sigma_n - \frac{\sigma_n'}{n} - \frac{\sigma_n''}{n^2} + \ldots + (-1)^m \frac{\sigma_n^{(2m)}}{n^{2m}}.$$

Si l'on suppose que pour une infinité de valeurs de n, soient n_p,

$$T_{n_p}^{2m} - f = o\left(\frac{1}{n_p^{2m}}\right),$$

on aurait

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\mathrm{T}_{n_p}^{2m}-f)\cos kx\,dx=\frac{(-1)^{m-1}}{n_p^{2m}}k^{2m}a_k=o\left(\frac{1}{n_p^{2m}}\right)\qquad(k<n_p),$$

donc $a_k=0$ et de même $b_k=0$. Ce résultat serait aussi obtenu si l'on supposait que pour une infinité de n on avait

$$\mathrm{T}_{n_p}^{2m+1}-f=o\left(\frac{1}{n_p^{2m+1}}\right).$$

Le procédé (g) est donc saturé, $\varphi(n)=\frac{1}{n^p}$ et la classe de saturation est à chercher dans la classe des fonctions telles que $\mathrm{E}_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Nous supposons donc que $\mathrm{E}_n(f)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^p}\right)$ et nous cherchons l'approximation en un point x que fournissent de f les polynômes T_n^p.

Soit $p=2$. Alors d'après (6) :

$$\mathrm{T}_n^2-f=\sigma_n-f-\frac{\sigma_n'}{n}.$$

D'après le théorème 1 :

$$\mathrm{T}_n^2-f=\frac{f'(x)}{n}-\frac{\sigma_n'(x)}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et comme $\mathrm{E}_n(f')=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, on peut utiliser le résultat relatif à la classe de saturation attachée au procédé $1-u$, à savoir $f'-\sigma_n'=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, si et seulement si $f'\in\mathrm{Lip}\,1$ ([5], p. 35).

Si $p=3$, f', f'', f''', $f^{\cdot\cdot\cdot}$ existent et $\mathrm{E}_n(f')=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\mathrm{E}_n(f'')=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ lorsqu'on suppose que $\mathrm{E}_n(f)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_n^3-f&=\sigma_n-f-\frac{\sigma_n'}{n}-\frac{\sigma_n''}{n},\\&=\frac{f'}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)-\frac{\sigma_n'}{n}-\frac{\sigma_n''}{n^2},\\&=\frac{f'-\sigma_n'}{n}-\frac{\sigma_n''}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),\\&=\frac{f''}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)-\frac{\sigma_n''}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right),\\&=\frac{f''-\sigma_n''}{n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right).\end{aligned}$$

$f''-\sigma_n''=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ si et seulement si $f'''\in\mathrm{Lip}\,1$.

Le théorème 2 s'établit de proche en proche par ce raisonnement.

THÉORÈME 3. — *Si* $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(r > 0)$,

$$T_n(1 - u^p, f, x) - f(x) = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \text{ ou } o\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{pour} \quad r < p.$$

Lorsque $0 < r < 1$, l'hypothèse $E_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ entraîne $\sigma_n - f = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Ce résultat classique résulte du lemme I.

Si $1 \leq r < 2$, soit $T_n^p = \sigma_n - \frac{\sigma_n'}{n} - \frac{\sigma_n''}{n^2} + \dots$.

Pour $r = 1$, on a obtenu ([5], p. 82) :

$$\sigma_n' = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(2t)}{t^2}\, dt + O(1) \quad \text{ou} \quad o(1),$$

$$= n(\sigma_n - f) + O(1) \quad \text{ou} \quad o(1).$$

D'après le lemme II, $\sigma_n'' = O(n)$, $\sigma_n''' = O(n)$ ou $o(n)$, donc $\sigma_n^{(m)} = O(n^{m-1})$ ou $o(n^{m-1})$ et $\sigma_n^{(m)} = O(n^{m-1})$ ou $o(n^{m-1})$ pour tout entier $m \geq 2$. Par conséquent

$$T_n^p - f = \sigma_n - f - \frac{\sigma_n'}{n} - \frac{\sigma_n''}{n^2} + \dots = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $1 < r < 2$, f', f'' existent, sont continues et leur meilleure approximation d'ordre n est $O\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$ et d'après (N. 13) :

$$\sigma_n''' = O(n^{2-r}) \quad \text{ou} \quad o(n^{2-r}), \qquad \sigma_n'' = O(n^{2-r}) \quad \text{ou} \quad o(n^{2-r}), \qquad \dots$$

Le théorème 1 montre que

$$\sigma_n - f = \frac{f''}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Donc

$$T_n^p - f = \frac{f'' - \sigma_n'}{n} + O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

$$= O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Cette méthode utilisée un nombre de fois suffisant démontre le théorème 3.

Remarque. — C étant une constante indépendante de x et de n, et r étant > 0, si l'on suppose que

$$|T_n(g, f) - f| < \frac{C}{n^{1-r}},$$

on a aussi

$$|T_n'(g, f) - f'| < \frac{C'}{n^r}.$$

En effet $T_n(g, f) = T_n(g, f')$ et d'après le théorème de Bernstein, $|T_n - T'_{2n}| < \frac{C'}{n^r}$. D'où

$$T'_{2^p} - T'_{2^{p-1}} < \frac{C'}{2^{pr}}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |T'_{2^{p-k}} - T'_{2^{p-k-1}}| = O\left(\frac{1}{2^{pr}}\right), \qquad |T'_{2^{p-1}} - f'| = O\left(\frac{1}{2^{p-1}r}\right).$$

n étant un entier positif quelconque et p tel que $2^{p-1} \leq n < 2^p$, on a $T'_{2^p} - T'_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, donc $T'_n - f' = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. De même si $T_n(g, f) - f = o\left(\frac{1}{n^{1-r}}\right)$, $T'_n(g, f) - f' = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

II. — **Procédés définis par une fonction sommatoire $g(u)$ de type entier p.**

Soit $g(u)$ une fonction définie pour $u \geq 0$, continue, nulle pour $u > 1$.

Définition. — *On dira que le procédé (g) est de type p au moins, si $g(u)$ satisfait aux conditions suivantes : $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, $g', g'', \ldots, g^{(p+1)}$ existent, sont bornées pour $0 \leq u \leq 1$, $g^{(p-1)}$ est à variation bornée,*

$$g'(0) = g''(0) = \ldots = g^{(p-1)}(0) = 0.$$

Si de plus $g^{(p)}(0) \neq 0$, on dira que le procédé (g) est de type p.

Théorème 4. — *Si le procédé (g) est de type p au moins et si $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, $(0 < r < p)$, alors $T_n(g, f) - f = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.*

Ce théorème généralise le théorème 3. Nous le démontrons en usant du théorème 3, des différences $\Delta_{2p}(f, x, t)$ et des expressions de $T_n(g, f) - f$ utilisées par M. B. de Nagy [3].

Soient

$$u_n^0 = T_n(g, f) - f = \int_0^{+\infty} \Delta_2\left(\frac{t}{n}\right) C(t)\, dt,$$

$$C(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 g(u) \cos ut\, du.$$

Nous supposons $E_n = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Comme la démonstration est fondée sur l'emploi des lemmes I, II, III et de l'inégalité (N. 13), elle sera valable si l'on remplace partout O par o.

Par une transformation déjà employée, on obtient

$$u_n^1 = u_n^0 - 2^2 u_{2n}^0 = \int_0^{+\infty} \Delta_4\left(\frac{t}{n}\right) C(t)\, dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_n^{k+1} = u_n^{k-2} - 2^{2k-2} u_{2n}^{k-2} = \int_0^{+\infty} \Delta_{2k}\left(\frac{t}{n}\right) C(t)\, dt = n \int_0^{+\infty} \Delta_{2k}(t)\, C(nt)\, dt.$$

Si $u_n^0 = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, $u_n^{k-1} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ aussi. Réciproquement, K étant une constante indépendante de x et de n, si $|u_n^{k-1}| < \frac{K}{n^r}$, alors $u_n^{k-2} = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \dots, u_n^0 = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, *lorsque* $r > 2k-2$.

En effet, par hypothèse $u_n^{k-1} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. La série dont le terme général est

$$v_p = 2^{(2k-2)p-1}\left[u_{2^{p-1}n}^{k-2} - 2^{(2k-2)}u_{2^p n}^{k-2}\right]$$

est absolument et uniformément convergente lorsque $r > 2k-2$, car

$$|v_p| < \frac{K\,2^{p(2k-2)}}{2^{pr}n^r} = \frac{K}{n^r}\left(\frac{1}{2^{r-2k+2}}\right)^p.$$

Donc, si l'on écrit

$$|u_n^{k-2} - 2^{2k-2}u_{2n}^{k-2}| < \frac{K}{n^r},$$
$$|u_{2n}^{k-2} - 2^{2k-2}u_{2^2n}^{k-2}| < \frac{K}{2^r n^r},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$|u_{2^{p-1}n}^{k-2} - 2^{2k-2}u_{2^p n}^{k-2}| < \frac{K}{2^{pr}n^r},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

en multipliant successivement par $1, 2^{2k-2}, \dots, 2^{p(2k-2)}, \dots$, on obtient

$$|u_n^{k-2}| < \sum_1^\infty v_p = O\left(\frac{1}{n^r}\right)\sum_{p=1}^\infty\left(\frac{1}{2^{r-2k+2}}\right)^p.$$

Nous distinguons alors deux cas.

1° (g) est de type $2m$ au moins. En intégrant par parties, on trouve

$$\pi C(nt) = \frac{g'(1)\cos nt}{n^2t^2} - \frac{g''(1)\sin nt}{n^3t^3} + \dots + \frac{(-1)^m}{n^{2m+2}t^{2m+2}}g^{(2m+1)}\cos nt - \frac{g^{(2m+1)}(0)}{n^{2m+2}t^{2m+2}} + \frac{(-1)^{m+1}}{n^{2m+2}t^{2m+2}}\int_0^1 \cos nut\, dg^{(2m+1)}. \tag{8}$$

Soit k un entier tel que $2k-2 < r < 2k \leq 2m$.
D'après le lemme I,

$$n\int_0^{\frac{1}{n}} \Delta_{2k}(t)C(nt)\,dt = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

D'après le lemme III, tous les termes de $n\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\Delta_{2k}(t)C(nt)\,dt$, où l'on a remplacé $C(nt)$ par son développement obtenu en (8), valent $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Le dernier terme est $\frac{1}{n^{2m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2k}(t)}{t^{2m+2}}\left[\int_0^1\right]dt$. Si l'on y remplace f par P_n,

on commet une erreur $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ et d'après (N. 13) le terme obtenu vaut $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ parce que $2k \leq 2m$.

Si $r = 2k-2$, on remarque que pour une primitive de $f - \frac{a_0}{2}$, soit F, on a $E_n(F) = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)$ et comme $2k-2 < r+1 < 2k$,

$$T_n(g, F) - F = O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right),$$

d'où

$$T_n(g, f) - f = O\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad \text{(th. 3, remarque)}.$$

2° (g) est de type $2m+1$ au moins.

Si $2k-2 \leq r < 2k \leq 2m$, les raisonnements faits au 1° restent valables.

Si $2m < r < 2m+1$, il suffit d'utiliser Δ_{2m+2}.

Si $r = 2m$, on a encore $u_n^m = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$, mais on ne peut pas par les raisonnements précédents, en déduire que $u_n^0 = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Posons alors

$$g(u) = \frac{g^{(p)}(0)}{p!}(u^p - 1) + \left[1 + \frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right] g_1(u). \tag{9}$$

Comme $g(1) = 0$ et $g(0) = 0$, on a aussi $g_1(1) = 0$ et $g_1(0) = 1$.

On a encore

$$g^{(k)}(u) = \frac{g^{(p)}(0)}{k!} u^{(p-k+1)} + \left[1 + \frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right] g_1^{(k)}(u).$$

Donc $g_1^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots, p$. (g_1) est donc un procédé de type $(p+1)$ au moins. D'après le 1° et le théorème 3, on a encore $T_n(g, f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ pour $r = 2m$ et un procédé (g) de type $2m+1$ au moins.

Théorème 5. — *Classes de saturation : Pour que le procédé (g) de type p donne de f l'approximation $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, il faut et il suffit que*

$$f^{(p-1)} \in \text{Lip } 1 \quad si \quad p = 2m+1,$$
$$f^{(p-1)} \in \text{Lip } 1 \quad si \quad p = 2m.$$

Écrivons d'après (9)

$$T_n(g, f) - f = -\frac{g^{(p)}(0)}{p!}[T_n(1-u^p, f) - f] + \left[1 + \frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right][T_n(g_1, f) - f]. \tag{10}$$

Si l'on avait $T_n(g, f) - f = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, on aurait $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$, donc $T_n(g, f) - f = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ d'après le théorème 4. Mais $T_n(1-u^p, f) - f = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$. Donc (g) est saturé et l'approximation de saturation est $O\left(\frac{1}{n^p}\right)$. (10) prouve

alors que, si l'on cherche la classe de saturation dans la classe des fonctions f telles que $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n^p}\right)$, on a

$$T_n(g,f)=O\left(\frac{1}{n^p}\right)-\frac{g^{p}(0)}{p!}[T_n(1-u^p,f)-f],$$

ce qui prouve le théorème 5.

Remarque. — On pourrait démontrer le même résultat, en imposant à $g(u)$ des conditions un peu moins restrictives, telles celles qu'a considérées M. B. de Nagy [3].

III. — Procédés définis par une fonction sommatoire de type non entier.

Nous nous bornerons à étudier le cas de $g(u)=1-u^\alpha(0<\alpha<1)$, lorsque $0\leq u\leq 1$ et $g(u)=0$ lorsque $u>1$.

On a ici

$$\begin{aligned}T_n(g,f)-f&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\Delta_2\left(\frac{t}{n}\right)\left[\int_0^1(1-u^\alpha)\cos ut\,du\right]dt,\\&=\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2\left(\frac{t}{n}\right)}{t}\left[\int_0^1 u^{\alpha-1}\sin ut\,du\right]dt,\\&=\frac{\alpha}{\pi n^\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^{1+\alpha}}\left[\int_0^{nt}\frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}d\theta\right]dt.\end{aligned}$$

Si $E_n=O\left(\frac{1}{n^r}\right)(r<\alpha)$, la même méthode que nous avons utilisée, prouve que $T_n(g,f)-f=O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $E_n=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, on aura encore

$$T_n(g,f)-f=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)+\frac{\alpha}{\pi n^\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^{1+\alpha}}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}d\theta-\int_{nt}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}d\theta\right]dt,$$

$$\begin{aligned}(11)\qquad T_n(g,f)-f&=O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)+\left[\frac{\alpha}{\pi n^\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}d\theta\right]\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^{1+\alpha}}dt\\&\quad-\frac{\alpha}{\pi n^\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^{1-\alpha}}\left[\int_{nt}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}d\theta\right]dt.\end{aligned}$$

Or

$$\left|\int_a^{+\infty}\frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}d\theta\right|<\left|\int_a^{a+\pi}\left[\frac{1}{\theta^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\theta+\pi)^{1-\alpha}}+\dots\right]d\theta\right|<(a+\pi)^\alpha-a^\alpha.$$

Le dernier terme de (11) est donc en valeur absolue moindre que

$$\int_1^{+\infty}\frac{\left|\Delta_2\left(\frac{t}{n}\right)\right|}{t^{1-\alpha}}[(t+\pi)^\alpha-t^\alpha]\,dt,$$

et comme

$$\int_1^{+\infty} \frac{(t+\pi)^\alpha - t^\alpha}{t}\,dt = O(1),$$

l'hypothèse $\Delta_2(t) = O(t^\alpha)$ entraîne que

$$\int_1^{\infty} \frac{\left|\Delta_2\left(\frac{t}{n}\right)\right|}{t^{1-\alpha}}\,[(t+\pi)^\alpha - t^\alpha]\,dt = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Donc

Lorsque $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$,

$$T_n(1-u^\alpha, f) - f = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + \left(\frac{\alpha}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta^{1-\alpha}}\,d\theta\right)\frac{1}{n^\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \frac{\Delta_2(t)}{t^{1+\alpha}}\,dt.$$

On peut généraliser à un procédé de la forme $g(u) = 1 - u^\alpha h(u)$, où $h(u)$ est continue et possède une dérivée première à variation bornée.

Remarque. — Il est facile de construire des sommes trigonométriques constituant un procédé d'approximation saturé et dont la classe de saturation est par exemple Lip 1. Ainsi les sommes $T_n^p(f, x) + \frac{\sigma_n'(x)}{n}$ répondent à la question. Mais un tel procédé n'est pas défini par une fonction sommatoire $g(u)$ jouissant des propriétés précédemment admises.

IV. — Condition pour que $f^{(p)}$ et $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$.

Théorème 6. — 1° *Pour que* $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$, *il faut et il suffit que* $\frac{\Delta_{p+1}(f, x, t)}{t^{p+1}}$ *soit borné uniformément en* x *et* t.

2° *Pour que* $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$, *il faut et il suffit que* $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\Delta_{p+2}(f, x, t)}{t^{p+2}}\,dt$, *soit uniformément borné en* x *et* ε.

1° Si $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\,1$, $\Delta_{p+1}(f, x, t) = O(t^{p+1})$. Réciproquement, supposons que $\Delta_{p+1}(f, x, t) = O(t^{p+1})$. Si $p = 2m+1$, en utilisant par exemple les sommes trigonométriques déjà considérées ([5], p. 38), on voit que l'hypothèse $\Delta_{2m+2}(f, x, t) = O(t^{2m+2})$ entraîne $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{2m+2}}\right)$. Si $p = 2m$, comme on peut supposer f à valeur moyenne nulle ($a_0 = 0$) et comme

$$\frac{d}{dt}\Delta_{2m+2}(f) = \Delta_{2m+1}(f', x, t).$$

F étant une primitive de f, on a

$$\frac{d}{dt}\Delta_{2m+2}(F, x, t) = \Delta_{2m+1}(f, x, t).$$

D'où

$$\Delta_{2m+2}(F, x, t) = \int_0^t \Delta_{2m+1}(f, x, t) = O(t^{2m+2}),$$

et par suite $E_n(F) = O\left(\frac{1}{n^{2m+2}}\right)$, donc $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right)$.

Donc quel que soit p entier l'hypothèse $\Delta_{p+1}(f, x, t) = O(t^{p+1})$ entraîne $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$. Dans l'égalité $n^{p+1}\Delta_{p+1}\left(f, x, \frac{1}{n}\right) = O(1)$, remplaçons f par P_n tel que $f - P_n = O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$. L'erreur commise est $O(1)$. Or

$$n^{p+1}\Delta_{p+1}\left(P_n, x, \frac{1}{n}\right) = n^{p+1}\frac{1}{n^{p+1}}P_n^{(p+1)}(\xi), \qquad x - \xi = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc $P_n^{(p+1)}(\xi) = O(1)$. Mais

$$\left|P_n^{(p+1)}(\xi) - P_n^{(p+1)}(x)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)\max_x \left|P_n^{(p+2)}(x)\right|.$$

D'après (N. 13) : $P_n^{(p+2)}(x) = O(n)$, donc $P_n^{(p+1)}(x) = O(1)$, ce qui entraîne que $f^{(p)} \in \text{Lip } 1$.

2° Si l'on cherche la condition pour que $f^{(p)} \in \text{Lip } 1$, il est nécessaire de supposer que $E_n(f^{(p)}) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, donc que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$.

On peut encore supposer f à valeur moyenne nulle.

Soit $p = 2m$ et soit $\int_\varepsilon^\infty \frac{\Delta_{2m+2}(t)}{t^{2m+2}}\,dt$.

Prenons un procédé de type $(2m+1)$, par exemple $1 - u^{2m+1}$. La formule (8) donne dans l'hypothèse $E_p = O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right)$,

$$T_n(1 - u^{2m+1}, f) - f = \pm\frac{g^{(2m+1)}(0)}{n^{2m+1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_{2m+2}(t)}{t^{2m+2}}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right).$$

Or la condition pour que $T_n(1 - u^{2m+1}, f) - f = O\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right)$ est que $f^{(2m)} \in \text{Lip } 1$ (th. 3). C'est aussi $\int_\varepsilon^\infty \frac{\Delta_{2m+2}(t)}{t^{2m+2}}\,dt = O(1)$. D'où résulte le résultat énoncé.

Soit $p = 2m+1$; alors F étant une primitive de f, $E_n(F) = O\left(\frac{1}{n^{2m+3}}\right)$. Or

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{-\infty}\frac{\Delta_{2m+3}(f, x, t)}{t^{2m+3}}\,dt &= \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\Delta_{2m+4}(F, t)\right)\frac{dt}{t^{2m+3}} \\ &= \left[\frac{\Delta_{2m+4}(F, t)}{t^{2m+3}}\right]_\varepsilon^{+\infty} + (2m+3)\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\Delta_{2m+4}(F, t)\,dt}{t^{2m+4}} \\ &= O(1) + (2m+3)\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\Delta_{2m+4}(F, t)\,dt}{t^{2m+4}}\end{aligned}$$

en vertu du lemme I.

Or la condition $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2m+2}(F, t)}{t^{2m+3}}\,dt = O(1)$ est équivalente, d'après le résultat qui vient d'être obtenu pour $p = 2m$, à $F^{(2m+2)} \in \text{Lip } 1$. Comme $F^{(2m+2)} = f^{(2m+1)}$, la condition $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\Delta_{2m+2}(t)}{t^{2m+3}}\,dt = O(1)$ est équivalente à $f^{(2m+1)} \in \text{Lip } 1$.

V. — Saturation de procédés non nécessairement convergents.

La démonstration qui suit est donnée pour le procédé $g(u) = 1 + u$, mais s'applique aux procédés définis par $1 + u^p$ (p entier > 0).

Soit

$$T_n(1 + u, f, x) = S_n(x) - \frac{S_n'(x)}{n}. \tag{12}$$

Si f est une fonction continue quelconque, ces polynômes ne convergeront pas nécessairement. Par contre, on voit encore que ce procédé se sature dans la classe des fonctions dont la meilleure approximation est $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Si l'on cherche la condition pour que $T_n(1 + u, f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$, on supposera donc que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Une condition nécessaire pour que

$$T_n(1 + u, f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

est, d'après (N. 13), que $T_n'' = O(n)$, c'est-à-dire que $S_n''(x) - \frac{S_n'''(x)}{n} = O(n)$.

Or si $E_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sigma_n'' = O(n)$ et comme $\sigma_n'' = S_n'' + \frac{S_n'''}{n}$, on en déduit que nécessairement $S_n''(x) = O(n)$ et par suite que $S_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ [5]. En résumé, si $T_n(1 + u, f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $S_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et d'après (12), $S_n'(x) = O(1)$.

Réciproquement si $S_n'(x) = O(1)$, on a $S_n'' = O(n)$, $S_n'' = O(n)$, $S_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ [5], donc $T_n(1 + u, f) - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ce résultat est général.

La condition nécessaire et suffisante pour que $T_n(1 + u^p, f) - f = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ *est que*

$$S_n^{(2m+1)} = O(1), \quad \text{si } p = 2m + 1,$$
$$S_n^{(2m)} = O(1), \quad \text{si } p = 2m.$$

Il semble intéressant de noter, que cette condition est équivalente, dans le cas $p = 1$ par exemple, à $S_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *et* $\sigma_n - f = O\left(\frac{1}{n}\right)$ *simultanément*, et que pour les procédés tels que $1 - u^p$ la classe de saturation pouvait également être définie par $\sigma_n^{(2m+1)} = O(1)$ ou $\sigma_n^{(2m)} = O(1)$.

Voici une autre différence entre les classes de saturation attachées aux procédés $1-u$ et $1+u$.

Soit $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ et écrivons

$$f=\sum(\sigma_{n-1}-\sigma_n)=\sum(\sigma_{n-1}^2-\sigma_n^2).$$

D'après (N.12) $\sigma_n^{2'}=(\sigma_n^2-\sigma_n)(n+1)$; comme

$$\sigma_n=\frac{1}{2}[(n+1)\sigma_n^2-(n-1)\sigma_{n-1}^2]. \qquad \text{on a} \quad \sigma_{n-1}^2-\sigma_n^2=\frac{2\sigma_n^{2'}}{n^2-1}.$$

Donc la classe de saturation attachée au procédé $1-u$ est obtenue quand $\sigma_{n-1}^2-\sigma_n^2=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, tandis que $\sigma_{n+1}-\sigma_n=-\frac{S_n'}{n(n-1)}$, prouve que la classe de saturation attachée au procédé $1+u$ est obtenue quand $\sigma_{n-1}-\sigma_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

CHAPITRE II.

Applications.

I. — Convergence de la série de Fourier et de la série conjuguée.

Le théorème suivant, qui fait intervenir le module de continuité $\omega(h)$ de $f(x)$, est une variante du théorème 4.

Théorème 7. — *Si* $g(0)=1$, $g(1)=0$ *et si* $g''(u)$ *est à variation bornée, alors :*

Si $g'(0)\neq 0$, $T_n(g,f)-f=-g'(0)(\sigma_n-f)+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$;

Si $g'(0)=0$, $T_n(g,f)-f=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

Soit

$$T_n(g,f,x)-f(x)=n\int_0^{+\infty}\Delta_2(f,x,t)C(nt)\,dt, \qquad C(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 g(u)\cos ut\,du.$$

On a

$$n\int_0^{\frac{1}{n}}\Delta_2(t)C(nt)\,dt=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Donc

$$T_n(g,f)-f=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]-\frac{g'(0)}{\pi n}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^2}\,dt$$

$$-\frac{1}{n^2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(t)}{t^2}\left[-\frac{g''(1)\sin nt}{t}+\frac{g''(0)}{t}+\frac{1}{t}\int_0^1\sin nut\,g''\right]dt.$$

Or

$$\frac{1}{n^2}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\Delta_2(t)}{t^2}\,dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad [5].$$

D'où, d'après (N. 14),

$$T_n(g, f, x) - f(x) = -g'(0)[\sigma_n(x) - f(x)] + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

THÉORÈME 8. — *Soient* $f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\,dt$ et $\omega(h)$ *le module de continuité de* $f(x)$ *continue. On a les égalités suivantes à* $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ *près :*

$$S_n(x) - f_n(x) = \frac{S'_n(x)}{n}, \tag{13}$$

$$= -\frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right), \tag{14}$$

$$= -\frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n, x + \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right), \tag{15}$$

$$= S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x). \tag{16}$$

$$= -\left[S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right]. \tag{17}$$

Considérons le procédé défini par $g(u) = \cos^2\frac{\pi u}{2}$.

On a

$$\cos k(x+\alpha) + \cos k(x-\alpha) + 2\cos kx = 4\cos kx\cos^2\frac{k\alpha}{2},$$

$$\sin k(x+\alpha) + \sin k(x-\alpha) + 2\sin kx = 4\sin kx\cos^2\frac{k\alpha}{2}.$$

Donc

$$T_n\left(\cos^2\frac{\pi u}{2}, f\right) = \frac{1}{4}\left[S_n\left(x + \frac{\pi}{n}\right) - S_n\left(x - \frac{\pi}{n}\right) + 2S_n(x)\right].$$

Lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ $(0 < r < 2)$,

$$S_n(x) - f(x) = O(E_n) - \frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right). \tag{18}$$

Si l'on utilise $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, on a

$$S_n(x) - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] - \frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right). \tag{19}$$

Nous allons établir une égalité analogue pour $S_n(x) - f_n(x)$. De (N. 1) on tire

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{\pi}{n}\right) + \Delta_2\left(f, x-2t, \frac{\pi}{n}\right)}{\sin t} \sin(2n+1)t\, dt$$

$$= O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{\pi}{n}\right)}{t} \sin 2nt\, dt,$$

car

$$\sin(2n+1)t = \sin t \cos 2nt + \cos t \sin 2nt, \qquad \operatorname{cotg} t - \frac{1}{t} = O(t),$$

$$\Delta_2\left(f, x \pm 2t, \frac{\pi}{n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Soient A et B deux constantes absolues, finies, et ε_n, ε'_n tels que

$$\frac{A}{n} < \varepsilon_n, \varepsilon'_n < \frac{B}{n},$$

$$\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_2}{t} \sin 2nt\, dt = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon_n} = O\left[\frac{1}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'où

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varepsilon_n} + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon'_n}^{\frac{\pi}{2}} + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Prenons $\varepsilon'_n > \frac{\pi}{4n}$ et changeons t en $t + \frac{\pi}{4n}$. On obtient alors

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}}^{-\varepsilon_n-\frac{\pi}{4n}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t+\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right)}{\left(t+\frac{\pi}{4n}\right)} \cos 2nt\, dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon'_n-\frac{\pi}{4n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t+\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right)}{\left(t+\frac{4\pi}{n}\right)} \cos 2nt\, dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

On peut à nouveau remplacer les bornes de ces intégrales par $-\frac{\pi}{2}$, $-\varepsilon_n$, ε'_n, $\frac{\pi}{2}$ et comme

$$\frac{1}{t+\frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{t} = -\frac{\pi}{4n}\frac{1}{t\left(t+\frac{\pi}{4n}\right)},$$

un calcul déjà fait maintes fois [5] donne

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varepsilon_n} \frac{\Delta_2}{t} \cos 2nt\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon'_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2}{t} \cos 2nt\, dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Enfin on remplace $\frac{1}{t}$ par $\frac{1}{\sin t}$ et l'on prend $\varepsilon_n = \varepsilon'_n$. Il vient

$$(20)\quad \Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2\left(f, x+\frac{\pi}{2n}+2t, \frac{\pi}{n}\right) - \Delta_2\left(f, x+\frac{\pi}{2n}-2t, \frac{\pi}{n}\right)}{\sin t} \cos 2nt\, dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

(N.4) donne

$$(21)\quad \begin{cases} S_n(x) - f_n(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] - z_n(x), \\ z_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{\sin t}\cos(2n+1)t\, dt. \end{cases}$$

D'où

$$(21a)\quad \Delta_2\left(z_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varepsilon_n} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{\pi}{n}\right)}{\sin t}\cos 2nt\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Donc, d'après (20),

$$\Delta_2\left(z_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \Delta_2\left(S_n, x-\frac{2n}{\pi}, \frac{\pi}{n}\right).$$

Remarquons maintenant que

$$\Delta_2\left(f_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En effet

$$\Delta_2\left(f_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta_2\left(f, x+2t, \frac{\pi}{n}\right) - \Delta_2\left(f, x-2t, \frac{\pi}{n}\right)}{\sin t}\cos t\, dt.$$

Sous le signe $\int$, le numérateur vaut $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. On peut alors remplacer $\cot g t$ par $\frac{1}{t}$ et l'on obtient à $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ près,

$$\Delta_2\left(f_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x+2t+\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x-2t-\frac{\pi}{n}\right)}{t} dt + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x+2t-\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x-2t+\frac{\pi}{n}\right)}{t} dt - \frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t)-f(x-2t)}{t} dt.$$

Choisissons $\varepsilon_n > \frac{\pi}{4n}$, remplaçons dans la première intégrale t par $t - \frac{\pi}{2n}$, dans la seconde t par $t + \frac{\pi}{2n}$; un calcul facile donne

$$\Delta_2\left(f_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} [f(x-2t) - f(x-2t)]\,\Delta_2\left(\frac{1}{t}, t, \frac{\pi}{2n}\right) dt,$$

$$= O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \frac{\pi}{2n^2}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} [f(x-2t) - f(x-2t)]\,\frac{dt}{t\left(t^2 - \frac{\pi^2}{4n^2}\right)}$$

$$= O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En définitive, à partir de (21) on obtient à $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ près,

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = -\Delta_2\left(z_n(x), x, \frac{\pi}{n}\right) = -\Delta_2\left(S_n, x - \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right). \tag{22}$$

Mais en utilisant le procédé $\cos\frac{\pi u}{2}$, on obtient aussi

$$\frac{1}{2}\left[S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right)\right] - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - f(x) = -\left[S_n\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right] + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

En comparant à (19) et (22), il vient

$$S_n\left(x - \frac{\pi}{2n}\right) - f(x) = -\frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n, x - \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right) - O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$\Delta_2\left(S_n, x, \frac{\pi}{n}\right) = \Delta_2\left(S_n, x - \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{n}\right) + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Il reste à prouver que

$$f_n - S_n = z_n(x) = -\frac{1}{4}\Delta_2\left(z_n, x, \frac{\pi}{n}\right),$$

à $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ près, ou, ce qui revient au même,

$$z_n(x) = -\frac{1}{4}\Delta_2\left(z_n, x, \frac{2\pi}{2n+1}\right).$$

Posons

$$\zeta_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) - f(x-2t)}{\sin t}\cos nt\,dt.$$

Changeons t en $t - \frac{\pi}{n}$; comme ci-dessus, on obtient

$$\zeta_n(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] - \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x+2t-\frac{2\pi}{n}\right) - f\left(x-2t+\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin\left(t - \frac{\pi}{n}\right)}\cos nt\,dt.$$

Dans cette dernière intégrale, on remplace $\sin\left(t-\frac{\pi}{n}\right)$ par $\sin t$, on change t en $t+\frac{\pi}{n}$, puis t en $t-\frac{\pi}{n}$ et par combinaison linéaire, il vient

$$z_n(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta_2\left(f,x+2t,\frac{2\pi}{n}\right)-\Delta_2\left(f,x-2t,\frac{2\pi}{n}\right)}{\sin t}\cos nt\,dt+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'où

$$z_n(x)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\varepsilon_n}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Delta_2\left(f,x+2t,\frac{2\pi}{2n+1}\right)-\Delta_2\left(f,x-2t,\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\sin t}\cos(2n+1)t\,dt$$
$$+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'après (21 *a*)

$$z_n(x)=\frac{1}{4}\Delta_2\left(S_n',x,\frac{\pi}{4}\right)+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{1}{4}\Delta_2\left(z_n,x,\frac{\pi}{n}\right)+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Ce dernier résultat achève de démontrer les égalités (14), (15,) (16), (17). L'égalité (13) a été obtenue dans un travail antérieur ([5], p. 78).

Conséquences. — 1. De 13), on conclut que $\sigma_n'-f_n=O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$; cette égalité précise la convergence de σ_n' quand f est continue.

2. Théorème 9. — *Si pour* $\alpha\leq x\leq\beta$, $\frac{S_n'(x)}{n}\to 0$ *uniformément en* x *pour* $n\infty$, *la série de Fourier de* f *continue, converge uniformément sur tout segment intérieur à* (α,β). *Réciproquement, si la série de Fourier de* f *continue, converge uniformément sur* (α,β), $\frac{S_n'(x)}{n}\to 0$ *uniformément sur tout segment intérieur à* (α,β).

En comparant (13) et (16), on voit que si pour $\alpha\leq x\leq\beta$, $\frac{S_n'(x)}{n}\to 0$ uniformément en x pour $n\infty$, $S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)-f(x)\to 0$, uniformément en x. Mais

$$S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)-S_n(x)=\frac{\pi}{2}S_n'\left(x+\frac{\theta\pi}{2n}\right)\qquad(0<\theta<1).$$

Donc $S_n(x)-f(x)\to 0$ uniformément en x sur tout segment intérieur à (α,β).

Réciproquement si $S_n(x)$ converge uniformément vers f, sur (α,β), le procédé $1-u^2$ donne

$$S_n-f=-\frac{S_n''}{n^2}+O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

et prouve que $\frac{S_n''(x)}{n^2}\to 0$ uniformément pour $\alpha\leq x\leq\beta$.

On a alors

$$\begin{aligned} S_n(x)-f(x) &= \frac{S'_n(x)}{n} - \left[S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right) - S_n(x)\right] \\ &= \left(1-\frac{\pi}{2}\right)\frac{S'_n(x)}{n} + \frac{\pi}{2n}\left[S'_n(x) - S'_n\left(x+\frac{0\pi}{2n}\right)\right] \\ &= \left(1-\frac{\pi}{2}\right)\frac{S'_n(x)}{n} - \frac{0\pi^2}{4n^2} S''_n\left(x+\frac{00'\pi}{2n}\right) \qquad (0<0,\ 0'<1). \end{aligned}$$

D'où l'on conclut que sur tout segment intérieur à (α, β), $\frac{S'_n(x)}{n} \to 0$ uniformément.

3. Théorème 10. — *$f(x)$ étant continue, tout segment de longueur $\frac{2\pi}{n}$ contient au moins un point x tel que $|S_n(x)-f(x)| < A\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, A étant une constante absolue et $\omega(h)$ le module de continuité de $f(x)$.*

En effet

$$\begin{aligned} S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right) - f(x) &= \frac{S'_n(x)}{n}, \\ -S_n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right) + f(x) &= \frac{S'_n(x)}{n}, \\ S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right) - S_n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right) &= \frac{2S'_n(x)}{n}, \end{aligned}$$

à $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ près. D'après (13) et (15)

$$S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right) - S_n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right) = -\frac{1}{2}\left[S_n\left(x+\frac{3\pi}{2n}\right) + S_n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right) - 2S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\right],$$

$$S_n\left(x+\frac{3\pi}{2n}\right) - S_n\left(x-\frac{\pi}{2n}\right) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

D'où

$$\frac{\pi}{n} S'_n(x+\xi_n) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad -\frac{\pi}{2n} < \xi_n < \frac{3\pi}{2n}$$

et

$$S_n\left(x+\frac{\pi}{2n}+\xi_n\right) - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

ou

$$S_n(x+\alpha_n) - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right], \qquad \frac{\pi}{n} < \alpha_n < \frac{3\pi}{n}.$$

Ce résultat qui concerne les fonctions continues périodiques est à rapprocher des théorèmes de Rogosinski [6]. Ceux-ci, pour une fonction continue, sont presque triviaux. Le théorème 10 montre qu'à tout point x on peut associer une suite $\{\alpha_n\}$, $\frac{\pi}{n} < \alpha_n < \frac{3\pi}{n}$, telle que $S_n(x+\alpha_n) \to f(x)$ en fournissant de f une approximation de l'ordre de $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$.

II. — Étude de l'approximation de f par σ_n.

Nous décomposons ce paragraphe en deux parties. Dans la première nous utilisons $\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, dans la seconde nous supposons que $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. On vient de voir que $f_n - \sigma_n = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Or en tout point x où f existe, on a

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x+2t) - f(x) - 2t)]\operatorname{cotg} t\, dt.$$

Donc

$$f - \sigma_n = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} [f(x+2t) - f(x-2t)]\operatorname{cotg} t\, dt.$$

Dans la dernière intégrale on peut remplacer $\operatorname{cotg} t$ par $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{n}$ par $\frac{1}{2n}$ et ne commettre qu'une erreur $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. D'où

$$f - \sigma_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt + O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{23}$$

Dans cette égalité, $\omega(h)$ *est le module de continuité de* $f(x)$.

Ce résultat contient des résultats connus : théorème de Privaloff (si $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, $f \in \operatorname{Lip}\alpha$ aussi), théorème d'Alexits $\left[\text{si } f \in \operatorname{Lip} 1,\ f - \sigma_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Nous en donnerons une application nouvelle. En termes volontairement imprécis, on peut dire que l'égalité (23) permet de construire des fonctions « peu continues » et dont la série de Fourier converge uniformément.

Soit $f(x)$ une fonction continue, nulle pour $x = 0$, impaire, qui au voisinage de O est égale à $\omega(x) = \dfrac{1}{\log\frac{1}{x}\log_2\frac{1}{n}\cdots\left(\log_p\frac{1}{x}\right)^{1+\alpha}}$ (p entier fixe, $\alpha > 0$) et qui ailleurs possède par exemple une dérivée bornée. Un calcul facile montre que

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+t) - f(x-t}{t}\, dt = \frac{1}{(\log_p n)^{\alpha}}.$$

Donc

$$f - \sigma_n = \frac{1}{\pi(\log_p n)^{\alpha}} + o\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

La série de Fourier de f converge uniformément et f' est continue.

De l'identité

$$\sigma'_n = S'_n - \frac{S_n}{n}$$

on conclut que, $\frac{S_n}{n}$ tendant uniformément vers zéro parce que S_n converge uniformément vers f (th. 9).

On peut aussi remarquer que

$$f' - 2\sigma'_{2n} + \sigma'_n = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2n}} \frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt.$$

Comme $\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt = O\left|\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right|$,

$$f' - 2\sigma'_{2n} + \sigma'_n = O\left|\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right| + \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt.$$

Or on sait [4] que

$$E_{2n}(f') \leq \max\left|f' - 2\sigma'_{2n} + \sigma'_n\right| \leq 4E_n(f').$$

On peut donc pour de telles fonctions obtenir l'ordre de grandeur de la meilleure approximation à partir de $f(x)$. Nous énoncerons :

THÉORÈME II. — *$f(x)$ étant continue, nulle pour $x = 0$, impaire, égale au voisinage de 0, à* $\frac{1}{\log\frac{1}{x}\log_2\frac{1}{x}\cdots\left(\log_p\frac{1}{x}\right)^{1+\alpha}}$ *(p entier > 0, $\alpha > 0$), admettant ailleurs un module de continuité $\omega(h)$ tel que $\omega\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\log n}\right)$, la série conjuguée de f converge uniformément et l'ordre de grandeur de la meilleure approximation $E_n(f')$ est* $\max\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt$.

2. Dans la première partie de ce paragraphe nous avons donc donné l'approximation de f' par σ'_n en fonction de $f(x)$ alors que les résultats précédents la donnaient en fonction de f'. Cependant le module de continuité de $f(x)$ est trop imprécis dans les cas où l'on suppose seulement $E_n(f') = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$. C'est l'étude que nous nous proposons de faire maintenant par une méthode qui ne s'écarte pas sensiblement de celle dont nous avons déjà usé. Un résultat plus général peut être obtenu en supposant qu'il existe une suite $\{\rho_n\}$ de nombres positifs tendant vers zéro, tels que $P_n - f = O(\rho_n)$ et $P''_n = O(n^2\rho_n)$, mais le cas où $\rho_n = \frac{1}{n}$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$ est le plus intéressant.

THÉORÈME 12. — *Si* $E_n(f)=O\left(\frac{1}{n}\right)$ *ou* $o\left(\frac{1}{n}\right)$:

a. $$\int_0^h \frac{f(x-t)-f(x)}{t}\,dt = f(x+h)-f(x)+O(h) \quad ou \quad o(h);$$

b. $$\frac{h}{\pi}\int_h^{+\infty} \frac{f'(x+t)+f'(x-t)-2f'(x)}{t^2}\,dt + f(x+h)-f(x) = O(h) \quad ou \quad o(h);$$

c. $$f'(x)-\sigma_n'(x) = f(x+h)-f(x)+O(h) \quad ou \quad o(h),$$

où $n=\left[\frac{1}{h}\right]$ $\left(\textit{partie entière de } \frac{1}{h} > 0.\right)$

Soit

$$f'-\sigma_n' = \frac{1}{n\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_1(t)}{t^2}\sin nt\,dt$$

et soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite de nombres positifs tels que $\frac{A}{n} < \varepsilon_n < \frac{B}{n}$, où A, B sont des constantes absolues, positives, finies.

Si $E_n = E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a $E_n(f') = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{\Delta_2(f,x,t)}{t} = O(1)$ ou $o(1)$ uniformément en x. Soit P_n un polynôme trigonométrique d'ordre n tel que $P_n - f = O(E_n)$. Alors $P_n'' = O(n^2 E_n)$. Écrivons

$$f'-\sigma_n' = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\varepsilon_n} + \frac{1}{n\pi}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \frac{\Delta_1(t)}{t^2}\sin nt\,dt.$$

Or

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t^2}\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t}\left[\frac{\sin nt}{nt}-1+1\right]dt.$$

Comme $\frac{\sin nt}{nt}-1 = t^2 O(n^2)$, si dans $\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t}\left[\frac{\sin nt}{nt}-1\right]dt$ on remplace f par P_n, l'erreur commise est

$$O(E_n)\int_0^{\varepsilon_n} t\,O(n^2)\,dt = O(E_n).$$

D'ailleurs

$$P_n(x+t)-P_n(x-t) = 2t\,P_n'(x) + t^2 O(n^2 E_n).$$

D'où

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t}\left[\frac{\sin nt}{nt}-1\right]dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{2t\,P_n'(x)}{t}\left[\frac{\sin nt}{nt}-1\right]dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{t^2 O(n^2 E_n)}{t}\,t^2 O(n^2)\,dt$$
$$= \frac{2P_n'(x)}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\left[\frac{\sin nt}{nt}-1\right]dt + O(E_n).$$

On a donc

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t^2}\sin nt\,dt = O(E_n) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n} \frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt + \frac{2P_n'(x)}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\left[\frac{\sin nt}{nt}-1\right]dt.$$

Étudions maintenant

$$u_n = \frac{1}{n\pi}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \frac{\Delta_1(t)}{t^2}\sin nt\,dt.$$

Si l'on remplace f par P_n, l'erreur commise est $O(E_n)$.
Intégrons par parties

$$u_n = O(E_n) + [P_n(x+\varepsilon_n) - P_n(x-\varepsilon_n)]\frac{\cos n\varepsilon_n}{\pi n^2 \varepsilon_n^2} + \frac{1}{\pi n^2}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \frac{P'_n(x+t) - P'_n(x-t)}{t^2}\cos nt\,dt - \frac{2}{\pi n^2}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty} \frac{P_n(x+t) - P_n(x-t)}{t^3}\cos nt\,dt.$$

En intégrant par parties une fois de plus, on obtient pour u_n la somme des termes suivants :

$$(\alpha) \qquad [P_n(x+\varepsilon_n) - P_n(x-\varepsilon_n)]\frac{\cos n\varepsilon_n}{\pi n^2 \varepsilon_n^2},$$

$$(\beta) \qquad -[P'_n(x+\varepsilon_n) + P'_n(x-\varepsilon_n)]\frac{\sin n\varepsilon_n}{\pi n^3 \varepsilon_n^3},$$

$$(\gamma) \qquad 2[P_n(x+\varepsilon_n) - P_n(x-\varepsilon_n)]\frac{\sin n\varepsilon_n}{\pi n^3 \varepsilon_n^3},$$

$$(\delta) \qquad \frac{1}{n^3\pi}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty}\left\{\frac{4}{t^3}[P'_n(x+t) + P'_n(x-t)] - \frac{6}{t^4}[P_n(x+t) - P_n(x-t)]\right\}\sin nt\,dt,$$

$$(\eta) \qquad -\frac{1}{n^3\pi}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty}\left[\frac{P''_n(x+t) - P''_n(x-t)}{t^2}\right]\sin nt\,dt.$$

Comme $P''_n = O(n^2 E_n)$, le terme (η) vaut $O(E_n)$.
Puisque

$$P'_n(x+\varepsilon_n) + P'_n(x-\varepsilon_n) = 2P'_n(x) + O(n^2 E_n \varepsilon_n),$$

(β) vaut

$$-\frac{2P'_n(x)\sin n\varepsilon_n}{\pi n^3 \varepsilon_n^2} + O(E_n).$$

Dans les termes (α), (γ) on peut à nouveau remplacer P_n par f et ne commettre qu'une erreur $O(E_n)$.
Enfin le terme δ, où l'on écrit $P_n(x+t) - P_n(x-t) = 2tP'_n(x) + t^2 O(n^2 E_n)$, vaut

$$\frac{1}{\pi n^3}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty}\left\{\frac{4}{t^3}[P'_n(x+t) + P'_n(x-t) - 2P'_n(x)] - \frac{4}{t^3}P'_n(x) + \frac{1}{t^2}O(n^2 E_n)\right\}\sin nt\,dt;$$

et comme $\Delta_2(P'_n, x, t) = O(tn^2 E_n)$, ce terme se réduit à

$$O(E_n) - \frac{4P'_n(x)}{\pi n^3}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt.$$

On obtient donc

$$f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}=O(E_n)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt$$
$$+\frac{2P'_n(x)}{\pi n}\left\{n\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\sin nt}{nt}\,dt-n\varepsilon_n-\frac{\sin n\varepsilon_n}{n^2\varepsilon_n^2}-\frac{2}{n^2}\int_{\varepsilon_n}^{+\infty}\frac{\sin nt}{t^2}\,dt\right\}$$
$$+\Delta_1(\varepsilon_n)\left[\cos n\varepsilon_n+\frac{2\sin n\varepsilon_n}{n\varepsilon_n}\right]\frac{1}{\pi n^2\varepsilon^2},$$

$$(24)\qquad f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}=O(E_n)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt$$
$$+\frac{\Delta_1(\varepsilon_n)}{\pi^2n^2\varepsilon_n^2}\left[\cos n\varepsilon_n+\frac{2\sin n\varepsilon_n}{n\varepsilon_n}\right]$$
$$+\frac{2P'_n(x)}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}-n\varepsilon_n-\frac{\cos n\varepsilon_n}{n\varepsilon_n}-\frac{2\sin n\varepsilon_n}{n^2\varepsilon_n^2}\right].$$

Dans le troisième terme de (24) remplaçons f par P_n; l'erreur commise est $O(E_n)$ et $P_n(x+\varepsilon_n)-P_n(x-\varepsilon_n)=2\varepsilon_nP'_n(x)+O(n^2\varepsilon_n^2E_n)$. Ce terme vaut donc

$$\frac{2P'_n(x)}{\pi n^2\varepsilon_n}+O(E_n).$$

D'où deux autres formes

$$(25)\quad f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}=O(E_n)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt+\frac{\Delta_1(\varepsilon_n)}{\pi n^2\varepsilon_n^2}\cos n\varepsilon_n+\frac{2P'_n(x)}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}-n\varepsilon_n-\frac{\cos n\varepsilon_n}{n\varepsilon_n}\right],$$

$$(26)\quad f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot}=O(E_n)+\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt+\frac{2P'_n(x)}{n\pi}\left[\frac{\pi}{2}-n\varepsilon_n\right].$$

Or $2(\sigma_{2n}-f)-(\sigma_n-f)=O(E_n)$, donc

$$P_n-2\sigma_{2n}+\sigma_n=O(E_n\qquad\text{et}\qquad P'_n-2\sigma'_{2n}+\sigma'_n=O(nE_n).$$

Or (N.12) et (N.15) donnent $\sigma'_n=n(f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot})+O(nE_n)$. Donc

$$2\sigma'_{2n}-\sigma'_n=4n(f^{\cdot}-\sigma_{2n}^{\cdot})-n(f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot})+O(nE_n)$$
$$=n[2(f^{\cdot}-2\sigma_{2n}^{\cdot}+\sigma_n^{\cdot})]+n(f^{\cdot}-\sigma_n^{\cdot})+O(nE_n).$$

Il en résulte que

$$P'_n(x)=n[f^{\cdot}(x)-\sigma_n^{\cdot}(x)]+O(nE_n),$$

(26) donne alors

$$f^{\cdot}(x)-\sigma_n^{\cdot}(x)=\frac{1}{2n\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt+O(E_n).$$

Et en vertu de $\Delta_1(t)+\Delta_1(-t)=O(t)$ ou $o(t)$

$$(26\,a)\qquad f^{\cdot}(x)-\sigma_n^{\cdot}(x)=\frac{1}{n\varepsilon_n}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\,dt+O(E_n).$$

Si dans (24) on considère des termes en $\cos n\varepsilon_n$ et si l'on remplace $\Delta_1(\varepsilon_n)$

par $2\varepsilon_n P'_n(x)$, ces termes disparaissent et comme $P'_n = n(f' - \sigma'_n) + O(E_n)$, il vient

$$(27)\qquad \frac{2}{\pi}(f' - \sigma'_n)\left(n\varepsilon_n + \frac{2\sin n\varepsilon_n}{n^2\varepsilon_n^2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt + \frac{\Delta_1(\varepsilon_n)}{\pi n^2\varepsilon_n^2}\left(\frac{2\sin n\varepsilon_n}{n\varepsilon_n}\right) + O(E_n).$$

De même en groupant les termes en $\sin n\varepsilon_n$

$$(28)\qquad \frac{2}{\pi}(f' - \sigma'_n)\left(n\varepsilon_n + \frac{\cos n\varepsilon_n}{n\varepsilon_n}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon_n}\frac{\Delta_1(t)}{t}\,dt + \frac{\Delta_1(\varepsilon_n)}{\pi n^2\varepsilon_n^2}\cos n\varepsilon_n.$$

Si dans (27) on prend $\varepsilon_n = \frac{\pi}{2n}$, on trouve

$$(f' - \sigma'_n)\left(1 - \frac{16}{\pi^3}\right) = O(E_n) + \frac{32}{\pi^3}\left[f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right] + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\,dt.$$

Et d'après (26 *a*)

$$f' - \sigma'_n = \frac{2}{\pi}\left[f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right] + O(E_n).$$

Enfin (N. 4) donne

$$\sigma'_n - f' = \frac{1}{n\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{+\infty}\frac{\Delta_2(f', x, t)}{t^2}\,dt + O(E_n).$$

Dans le théorème 12, on obtient a et b en remarquant que le module de continuité de f et f' est $O\left(h\log\frac{1}{h}\right)$ et en considérant pour h donné, l'entier n tel que $\frac{\pi}{2n+2} \leq h < \frac{\pi}{2n}$.

Enfin lorsque $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda} - [f(x+h) - f(x)] = O(h) \quad \text{ou} \quad o(h) \qquad ([5], \text{p. 53, th. 4}).$$

On a donc avec $\lambda = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{2}{\pi}\left[f\left(x + \frac{\pi}{2n}\right) - f(x)\right] = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et parce que $\omega(h) = O\left(h\log\frac{1}{h}\right)$, on peut remplacer $\frac{1}{n}$ par h, ce qui achève de prouver c.

Conséquences. — Démontrons d'abord les théorèmes suivants :

Théorème 13. — *r étant* > 0, *si* $S_n - f = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, *on a aussi* $S'_n - f' = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ *et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que* $S_n^{(k)}(x) = o(n^{k-r})$ *pour au moins un entier* $k > r$.

Nous avons prouvé ce résultat avec O au lieu de o ([5], p. 81, 84). La

démonstration est tout à fait semblable. Si $r>1$ et si $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, $E_n(f')=o\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$. Il suffit donc encore d'étudier le cas $0<r\leq 1$.

Si l'on cherche la condition pour que $S_n-f=o\left(\frac{1}{n}\right)$, il est nécessaire de supposer que $E_n(f)=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $0<r<1$, en vertu de $\sigma_n=S_n+\frac{S_n'}{n}$, $S_n-f=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$ si et seulement si $S_n'=o(n^{1-r})$. D'après le théorème 4, $S_n-f+\frac{S_n''}{n^2}=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, donc $S_n-f=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$, si et seulement si, $S_n''=o(n)$. Or $S_n''=o(n^{1-r})$ entraîne $S_n''=o(n^{2-r})$, donc $S_n'-f'=o\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Si $r=1$, on a $S_n-f+\frac{S_n''}{n^r},=o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $S_n-f=o\left(\frac{1}{n}\right)$, si et seulement si $S_n''=o(n)$. Or $\sigma_n''=S_n''-\frac{S_n''}{n}$; donc $\sigma_n''-S_n''=o(1)$ et $\sigma_n'''-S_n''=o(n)$. Comme $\sigma_n'''=o(n)$ (lemme II), $S_n'''=o(n)$, donc $S_n'-f'=o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour prouver que $S_n''=o(n^{2-r})$ équivaut à $S_n^{(k)}=o(n^{k-r})$ $(k>2)$, il suffit de considérer le procédé $1-u^k$ et de remarquer que $S_n^{(k)}=-(S_n')^{(k)}$.

THÉORÈME 14. — *Soit u_p le terme de rang p d'une série telle que*

$$\sum_1^n p u_p = O(n^\alpha) \qquad (\alpha>0).$$

Si $\beta>\alpha-1$, la série $\sum\frac{u_p}{p^\beta}$ converge.

Posons $\lambda_n=\sum_1^n pu_p$, $u_n=\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{n}$. On a

$$\sum_m^n \frac{u_p}{p^\beta}=\frac{\lambda_n}{n^{\beta+1}}-\frac{\lambda_{m-1}}{m^{\beta+1}}+\sum_m^n \lambda_p\left(\frac{1}{p^{1+\beta}}-\frac{1}{(p+1)^{1+\beta}}\right)$$
$$=O(m^{\alpha-\beta-1})+O(n^{\alpha-\beta-1})+\sum_m^n p^\alpha O\left(\frac{1}{p^{2+\beta}}\right)=o(1).$$

Si u_p est une fonction continue de x et si $\frac{1}{n^\alpha}\sum_1^n pu_p(x)\to 0$ pour $n\infty$, uniformément en x pour $a\leq x\leq b$, $\sum\frac{u_p}{p^\beta}$ converge uniformément pour $a\leq x\leq b$.

En particulier soit

$$(T) \qquad \sum_1^\infty A_p(x), \qquad A_p(x)=a_p\cos px+b_p\sin px,$$

une série trigonométrique et soit $S_n(x)=\sum_1^n A_p(x)$.

Si $\lim_{n=\infty} \frac{S'_n(x)}{n} = 0$, $\sum_1^\infty \frac{A'_p(x)}{p}$ converge au point x.

Si sur un ensemble $\mathcal{E}$ de mesure positive, $\frac{S'_n(x)}{n} \to 0$, $\sum_1^\infty \frac{A'_p(x)}{p}$ converge sur $\mathcal{E}$ et d'après le théorème de Cantor-Lebesgue : $a_p = o(p)$, $b_p = o(p)$.

Si $\frac{S'_n(x)}{n} \to 0$ uniformément en x, $\sum_1^\infty \frac{A'_p(x)}{p}$ converge uniformément.

Nous passons maintenant à quelques applications.

Théorème 15. — *Soit* (T) *une série trigonométrique*

$$\sum_1^\infty a_p \cos px + b_p \sin px, \qquad S_n(x) = \sum_1^n a_p \cos px + b_p \sin px.$$

a. Si $\frac{S'_n(x)}{n} = O(1)$ *ou* $o(1)$ *uniformément en* x *(en particulier si* $\sum_1^n p(|a_p| + |b_p| = O(n)$ *ou* $o(n)$*),*

$$S_n(x) - \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = O(1) \quad ou \quad o(h),$$

uniformément en x : $n = \left[\frac{1}{h}\right]$, $F(x) = C - \sum_1^\infty \frac{A'_p(x)}{p}$.

Si $\frac{S'_n(x)}{n} = o(1)$, F' *existe un ensemble* $\mathcal{E}$ *partout dense et sur* $\mathcal{E}$, S_n *converge vers* F'.

b. Si (T) *est la série de Fourier de* f *sommable et si* $\frac{S'_n}{n} = o(1)$ *uniformément en* x, (T) *converge vers* f *en tout point où* f *est la dérivée de son intégrale* (1).

En effet si $\frac{S'(x)}{n} = o(1)$ par exemple, $C - \sum_1^\infty \frac{A'_p}{p}$ converge uniformément, définit F et d'après le théorème 13,

$$\left| C - \sum_1^n \frac{A'_p}{p} - F \right| = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

---

(1) D'après le théorème 13, on peut remplacer la condition $\frac{S'_n(x)}{n} = O(1)$ où $o(1)$ par $\frac{S_n^{(k)}(x)}{n^k} = O(1)$ ou $o(1)$, ce qui donne alors comme condition particulière $\sum_1^n p^m(|a_p| + |b_p|) = O(n^m)$ ou $o(n^m)$ et pour le théorème 16 : $\sum_1^p n_k^m = O(n_p^m)$.

Donc d'après le théorème 12 *c* où l'on écrit $\sigma_n^{\cdot} = S_n^{\cdot} - \frac{S'_n}{n}$ et où S'_n est à remplacer par $\sum_1^n A_p(x)$, on a

$$S_n(x) - \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = o(1).$$

Si $S'_n(x) = O(n)$, $S'_n(x) = O(n^{1+\varepsilon})$ aussi; d'après le théorème 14, $\sum \frac{A_p}{p}$ converge uniformément et d'après le théorème 13

$$C - \sum_1^n \frac{A_p^{\cdot}}{p} - F = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Enfin, on sait [7] que si $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, la dérivée de f existe sur un ensemble partout dense. Ce qui achève de prouver *a*. Quant à *b*, il suffit de remarquer que la série de Fourier de l'intégrale de f, s'obtient en intégrant terme à terme celle de f.

Ce théorème généralise le théorème de Fatou et celui de M. Zygmund [7]. On remarquera que l'hypothèse $\frac{S'_n(x)}{n} \to 0$ uniformément, entraîne que $E_n(F) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc que les coefficients de Fourier de F, qui sont $\frac{a_n}{n}$ et $\frac{b}{n}$, valent $o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc a_n et b_n coefficients de (T) tendent vers zéro pour $n \infty$.

THÉORÈME 16. — *a. Soit* $\sum_1^{\infty} (a_{n_p} \cos n_p x + b_{n_p} \sin n_p x)$, *où* a_{n_p} *et* b_{n_p} *tendent vers zéro pour* $p \infty$. *Si* $\sum_1^p n_k = O(n_p)$, *cette série trigonométrique converge sur un ensemble partout dense.*

b. Si $f \sim \sum_1^{\infty} (a_{n_p} \cos n_p x + b_{n_p} \sin n_p x)$ *et si* $\sum_1^p n_i = O(n_p)$, *la série de Fourier de f converge vers f en tout point où f est la dérivée de son intégrale.*

Démonstration. — *a.* Si $\sum_1^p n_k = O(n_p)$, $\sum_1^p o(n_k) = o(n_p)$; donc pour $\sum_1^{\infty} (a_{n_p} \cos n_p x + b_{n_p} \sin n_p x)$, $\frac{S'_n}{n} \to 0$ uniformément en x. Il suffit alors de se reporter au théorème 15.

b. La seconde partie découle du théorème 15 *b*.

On remarquera que la condition $\sum_{1}^{p} n_k = O(n_p)$ est plus générale que la condition $\frac{n_{p+1}}{n_k} > q > 1$; alors $n_{q-1} < \frac{n_p}{q}$, $n_{p-2} < \frac{n_{p-1}}{q} < \frac{n_p}{q^2}$, $\cdots$; donc

$$\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}{n_p} = 1 + \frac{\frac{n_p}{q^{p-1}} + \ldots + \frac{n_p}{q}}{n_p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{q^k} = O(1).$$

Cette condition $\sum_{1}^{p} n_k = O(n_p)$ permet de construire des séries lacunaires, qui convergeront sur un ensemble partout dense et où l'on aura cependant $\lim \frac{n_{p-1}}{n_p} = 1$.

THÉORÈME 17. — *Dans la classe des fonctions continues définies par* $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ $\left[ou\ \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2} = o(1)\ uniformément\ en\ x\right]$, *l'existence en un point d'une dérivée seconde généralisée entraîne l'existence de la dérivée seconde ordinaire et les deux dérivées sont égales.*

En effet si $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $E_n(f') = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et d'après le théorème 12 *a* et $\Delta_2(f', x, t) = o(t)$, on a

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \frac{1}{2h} \int_0^h \frac{f'(x+t) - f'(x-t)}{t}\, dt + o(1).$$

Or

$$f'(x+t) - f'(x-t) = \frac{d}{dt}(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)).$$

D'où en intégrant par parties

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta_2(f, x, h)}{h} + \frac{1}{h}\int_0^h \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2}\, dt\right] + o(1).$$

Donc si $\frac{\Delta_2(f, x, h)}{h^2} \to l$ quand $h \to 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ a une limite et cette limite est l.

THÉORÈME 18. — *a. Pour qu'une fonction* $f(x)$ *admette une dérivée continue sur* (α, β), *il faut et il suffit que* $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x+k) - f(x)}{k}$ *tende vers zéro, uniformément en* x, *quand* h *et* k *tendent vers zéro de façon quelconque.*

b. Pour que $f'(x)$ *admette une dérivée continue, il faut et il suffit que* $\int_0^t \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2}\, dt$ *tende vers zéro, uniformément en* x, *quand* h *et* k *tendent vers zéro de façon quelconque.*

a. Il faut supposer d'abord que $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et la condition nécessaire et suffisante pour que f' existe et soit continue, est que $\sigma'_m - \sigma'_n$ tende vers zéro uniformément en x quand m et n deviennent infinis. Mais, lorsque $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$, $\sigma'_n = n(f - \sigma_n) + o(1)$ et le théorème 12*c* donne

$$\sigma'_m - \sigma'_n = \frac{f(x-h) - f(x)}{h} - \frac{f(x-k) - f(x)}{k} + o(1),$$

où $m = \left\lfloor \frac{1}{h} \right\rfloor$, $n = \left\lfloor \frac{1}{k} \right\rfloor$.

On peut aussi écrire $\sigma'_m - \sigma'_n = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f(x+k) - f(x-k)}{2k} + o(1)$, parce que $\Delta_2(f, x, t) = o(t)$.

b. On a

$$\sigma''_n = n(\sigma_n - f) + o(1) = \frac{1}{\pi} \int_h^{\pi} \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2}\, dt - o(1),$$

où $n = \left\lfloor \frac{1}{h} \right\rfloor$, lorsque $E_n(f') = o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc aussi $E_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'où

$$\sigma''_m - \sigma''_n = \frac{1}{\pi} \int_k^h \frac{\Delta_2(f, x, t)}{t^2}\, dt - o(1).$$

On peut rattacher ce résultat à la question suivante : étant donnée une série de Fourier, construite à partir d'une fonction sommable $\varphi(x)$, reconnaître si cette série de Fourier est aussi la série de Fourier d'une fonction continue $\varphi(x)$. Il faut et il suffit évidemment que $F(x) = \int \varphi(t)\, dt$ (en supposant éventuellement φ à valeur moyenne nulle), ait une dérivée continue.

Le théorème 18 montre qu'il suffit de vérifier que

$$\frac{1}{h} \int_0^h \Delta_2(\varphi, x, t)\, dt - \frac{1}{k} \int_0^k \Delta_2(\varphi, x, t)\, dt$$

tende uniformément vers zéro en x, quand h et k tendent vers zéro.

On peut aussi poser le problème précédent du point de vue des coefficients a_n, b_n, c'est-à-dire chercher à quelle condition doivent satisfaire les coefficients a_n, b_n pour que la série de Fourier donnée soit celle d'une fonction continue. A ce sujet nous ferons les remarques suivantes.

On a vu (th. 15*b*), que la condition $\sum p(|a_p| + |b_p|) = o(n)$ entraîne que la série de Fourier de f converge presque partout vers f.

Si au lieu de la condition $\sum_{1}^{n} p(|a_p|+|b_p|)=o(n)$, on impose aux coefficients la condition

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{1}^{n} p(|a_p|+|b_p|)\right)<+\infty, \tag{29}$$

alors la série trigonométrique $\sum_{1}^{\infty} a_p\cos px+b_p\sin px$, est uniformément sommable (C, 1), car

$$\sigma_{n+1}-\sigma_n=\frac{S_n'}{n(n+1)} \qquad \text{et} \qquad |S_n'|\leq\sum_{1}^{n} p(|a_p|+|b_p|).$$

La condition (29) n'entraîne pas que $\sum_{1}^{n} p(|a_p|+|b_p|)=o(n)$, mais seulement que $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} p(|a_p|+|b_p|)$ tend approximativement vers zéro, c'est-à-dire que ε étant donné, l'inégalité $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} p(|a_p|+|b_p|)<\varepsilon$ est réalisée pour une suite d'entiers n_k de fréquence 1 (*Cf.* Denjoy, *Calcul des coefficients*, I^re^ Partie, p. 51).

Supposons alors la condition (29) réalisée. $\sum_{1}^{\infty} a_p\cos px+b_p\sin px$ est alors la série de Fourier d'une fonction continue $f(x)$ et comme $\sigma_n=S_n+\frac{S_n'}{n}$, à tout $\varepsilon>0$ correspond une suite d'entiers de fréquence 1 tels que

$$|S_{n_k}-f|<\varepsilon+\varepsilon_{n_k},$$

où ε_{n_k} tend vers zéro pour $k\infty$. On peut dire que *la série de Fourier converge approximativement, de façon uniforme vers* $f(x)$.

Bibliographie.

[1] Favard, *Sur les meilleurs procédés d'approximation* (*Bull. Sc. math.*, 2^e^ série, t. 61, 1937).

[2] Hardy et Rogosinski, *Fourier Series* (*Cambridge Tracts in mathematics*, n° 38, 1944).

[3] de Sz Nagy, *Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier* (*Hungarica Acta mathematica*, vol. 1, n° 3, 1948).

[4] de La Vallée Poussin, *Leçons sur l'approximation*, Gauthier-Villars, Paris, 1919.

[5] Zamansky, *Classes de saturation de certains procédés d'approximation* (*Thèse*, *Ann. Ec. Norm.*, t. 66, fasc. 1, 1949, p. 19-93).

[6] Zygmund, *Trigonometrical series* (*Monographie mathématique*, Varsovie, 1935).

[7] Zygmund, *Smooth functions* (*Duke mathematical Journal*, 1945, p. 47).

SUR LES

THÉORÈMES INVERSES DES PROCÉDÉS DE SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES

(DEUXIÈME MÉMOIRE).

PAR M. HUBERT DELANGE.

Introduction.

Ce Mémoire fait suite à notre Mémoire de même titre paru dans les *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, tome 67.

Dans ce dernier Mémoire, nous avons étudié les théorèmes inverses que nous avons appelés *de type élémentaire*, dans un cas spécial. Dans celui-ci, nous étudierons d'abord, au Chapitre I, les théorèmes de type non élémentaire, dans le cas spécial correspondant au précédent; puis, au Chapitre II, nous indiquerons comment on peut, à partir de chacun des énoncés de notre premier Mémoire et du Chapitre I de celui-ci, former un énoncé plus général.

Le lecteur devra avoir présent à l'esprit ce qui a été dit dans les préliminaires de notre premier Mémoire, en particulier les remarques des paragraphes 1.1.2 et 1.2 et les définitions des différentes fonctions associées, au Chapitre II, à une fonction $s(t)$ définie pour $t \geqq 0$ et bornée sur tout intervalle fini.

Rappelons en outre le théorème suivant énoncé par Karamata et qui résulte des travaux de Wiener :

$N(t)$ étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *On a* $\int_0^{+\infty} N(t)\, t^{iu}\, dt \neq 0$ *pour tout u réel.*

(2) *L'ensemble des fonctions de la forme* $\sum_1^n \alpha_j N(\beta_j t)$, *où les α_j sont des constantes réelles ou complexes et les β_j des constantes réelles positives, est partout dense dans l'espace* $L_1(0, +\infty)$.

(3) *Toute fonction $f(t)$ mesurable et bornée sur $(0, +\infty)$ et satisfaisant à*

$$\int_0^{+\infty} N(xt) f(t)\, dt = 0 \qquad \textit{pour tout } x \textit{ positif}$$

est nécessairement nulle presque partout (1).

Notons que la propriété (3) est manifestement équivalente à

(3') *Si $f(t)$ est mesurable, s'il existe un nombre positif* M *tel que l'on ait presque partout sur $(0, +\infty)$ $|f(t)| \leq M$, et si*

$$\int_0^{+\infty} N(xt) f(t)\, dt = 0 \qquad \textit{pour tout } x \textit{ positif},$$

$f(t)$ est nécessairement nulle presque partout sur $(0, +\infty)$.

[Car on peut changer la valeur de $f(t)$ sur un ensemble de mesure nulle sans changer l'intégrale.]

I. — Théorèmes de type non élémentaire, dans le cas canonique.

1.1. Il est entendu une fois pour toutes que dans tout ce Chapitre nous faisons encore les hypothèses indiquées au pargraphe 3.1 de notre premier Mémoire, à savoir :

(1) *Pour chaque valeur de x réelle et supérieure à un certain nombre a positif ou nul, $\psi(t, x)$, qui est réelle ou complexe, est une fonction de t sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$, et l'on a*

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, dt = 1.$$

(2) *$\varphi(t, x)$ est la fonction définie pour $x > a$ et $t \geq 0$ par*

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du.$$

---

(1) Cet énoncé se trouve dans Karamata [6], p. 62 (les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article).

La démonstration repose sur le théorème suivant dû à N. Wiener :

$F(x)$ étant une fonction réelle ou complexe sommable sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, pour que l'ensemble des fonctions de la forme

$$\sum_1^n \lambda_j F(x + h_j),$$

où les λ_j sont des constantes complexes et les h_j des constantes réelles, soit partout dense dans l'espace $L_1(-\infty, +\infty)$, il faut et il suffit que la transformée de Fourier de $F(x)$ n'ait aucun zéro réel (voir [12], th. 11, p. 93).

(3) *Il existe une fonction positive ou nulle* $F(t)$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et telle que l'on ait, quel que soit* $x > a$ *et quel que soit* $t \geq 0$,

$$|x\psi(xt, x)| \leq F(t).$$

(4) *Quand* x *tend vers* $+\infty$, $x\psi(xt, x)$ *tend vers une fonction limite* $N(t)$.

(5) $s(t)$ *est une fonction réelle ou complexe définie pour* $t \geq 0$, *mesurable et bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$.

En outre, nous faisons l'hypothèse :

(4') *On a* $\int_0^{+\infty} N(t)\, t^{iu}\, dt \neq 0$ *pour tout* u *réel.*

Ces différentes hypothèses resteront sous-entendues dans tous nos énoncés.

1.1.1. Nous pouvons répéter les remarques suivantes faites dans notre premier Mémoire :

1° On a

$$\int_0^{+\infty} N(t)\, dt = 1.$$

2° L'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est certainement convergente pour $x > a$ si $s(t)$ est bornée. Elle l'est aussi sous la seule hypothèse que $\omega_s(\lambda) < +\infty$ si $F(t) \log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, ou simplement si $x\psi(xt, x) \log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$.

3° Dans ces deux derniers cas, si $s(t)$ non seulement satisfait à $\omega_s(\lambda) < +\infty$ mais est à variation bornée sur tout intervalle fini et nulle pour $t = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, ds(t)$ est aussi convergente et est égale à la précédente.

4° Lorsque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$, on a pour $x > \alpha a$, avec α positif quelconque,

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} \psi\left(t, \frac{x}{\alpha}\right) s(t)\, dt - s(x) = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) [s(xt) - s(x)]\, dt.$$

1.1.2. Rappelons aussi les deux résultats suivants établis dans notre premier Mémoire [et où l'hypothèse (4') n'est pas nécessaire] :

THÉORÈME A. — *Supposons que, pour chaque* $x > a$, *la fonction* $x\psi(xt, x) \log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(1, +\infty)$, *et que l'on ait*

$$\int_1^{+\infty} |x\psi(xt, x)| \log t\, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty).$$

Alors, si $w_s(\lambda) < +\infty$ *et si*

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty),$$

on a

$$s(t) = O[1] \qquad (t \to +\infty).$$

THÉORÈME B. — *Supposons que la fonction* $\psi(t, x)$ *soit réelle positive ou nulle, que, pour chaque* $x > a$, *la fonction* $x\psi(xt, x)\log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(1, +\infty)$, *et que l'on ait*

$$\int_0^{+\infty} x\psi(xt, x)\log t\, dt = O[1] \qquad (x \to +\infty).$$

Alors, si $s(t)$ *est réelle et satisfait à* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *et si l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)dt$ *est convergente pour* $x > a$ *et reste bornée quand* x *tend vers* $+\infty$, *on a*

$$s(t) = O[1] \qquad \textit{pour } t \textit{ tendant vers } +\infty.$$

1.2. Ceci étant, nous établirons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Supposons que* $s(t)$ *soit bornée et posons*

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt.$$

Si, quel que soit k *positif, on a pour* x *infini*

$$\Psi(kx) - \Psi(x) = o[1], \tag{2}$$

alors, quelle que soit la fonction $g(t)$ *sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$, *on a pour* x *infini*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt = G\Psi(x) + o[1], \qquad \textit{avec} \quad G = \int_0^{+\infty} g(t)\, dt. \tag{3}$$

Nous supposerons que $|s(t)| \leq M$ et nous poserons

$$\Psi^*(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt \qquad (x \text{ réel positif quelconque}).$$

On voit d'abord que, pour $x > a$,

$$\begin{aligned}\Psi(x) - \Psi^*(x) &= \int_0^{+\infty} \left[\psi(t, x) - \frac{1}{x} N\left(\frac{t}{x}\right)\right] s(t)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} [x\psi(xt, x) - N(t)]\, s(xt)\, dt.\end{aligned}$$

La fonction sous le signe $\int$ est de module au plus égal à $2MF(t)$ et tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Par suite $\Psi(x) - \Psi^*(x)$ tend vers zéro pour x infini.

Il en résulte que, quel que soit k positif, $\Psi^*(kx) - \Psi^*(x)$ tend vers zéro pour x infini.

Ceci étant, soit ε un nombre positif quelconque.

Il résulte de l'hypothèse (4') indiquée au paragraphe 1.1 que l'on peut trouver un système de nombres réels ou complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, et un système de nombres réels positifs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, tels que

$$\int_0^{+\infty} \left| \sum_1^n \alpha_j \mathrm{N}(\beta_j t) - g(t) \right| dt \leq \varepsilon.$$

Nous écrirons alors (en supposant $x > a$) :

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt - \mathrm{G}\Psi(x) = \left[\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt - \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} \Psi^*\left(\frac{x}{\beta_j}\right) \right] + \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} \left[\Psi^*\left(\frac{x}{\beta_j}\right) - \Psi^*(x) \right] + \left[\sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} - \mathrm{G} \right] \Psi^*(x) + \mathrm{G}\left[\Psi^*(x) - \Psi(x) \right].$$

Mais

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt = \int_0^{+\infty} g(t)\, s(xt)\, dt,$$

et

$$\Psi^*\left(\frac{x}{\beta_j}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta_j}{x} \mathrm{N}\left(\frac{\beta_j t}{x}\right) s(t)\, dt = \beta_j \int_0^{+\infty} \mathrm{N}(\beta_j t)\, s(xt)\, dt,$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt - \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} \Psi^*\left(\frac{x}{\beta_j}\right) = \int_0^{+\infty} \left[g(t) - \sum_1^n \alpha_j \mathrm{N}(\beta_j t) \right] s(xt)\, dt,$$

d'où résulte que

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g\left(\frac{t}{x}\right) s(t)\, dt - \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} \Psi^*\left(\frac{x}{\beta_j}\right) \right| \leq \varepsilon \mathrm{M}.$$

On a, d'autre part,

$$\sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} - \mathrm{G} = \int_0^{+\infty} \left[\sum_1^n \alpha_j \mathrm{N}(\beta_j t) - g(t) \right] dt, \qquad \text{d'où} \qquad \left| \sum_1^n \frac{\alpha_j}{\beta_j} - \mathrm{G} \right| < \varepsilon,$$

et

$$\Psi^*(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{N}(t)\, s(xt)\, dt, \qquad \text{d'où} \qquad |\Psi^*(x)| \leq \mathrm{M} \int_0^{+\infty} |\mathrm{N}(t)|\, dt.$$

En définitive, (4) donne

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}g\left(\frac{t}{x}\right)s(t)\,dt-\mathrm{G}\Psi(x)\right|\leq\varepsilon\mathrm{M}\left[1+\int_0^{+\infty}|\mathrm{N}(t)|\,dt\right]+\left|\sum_1^n\frac{\alpha_j}{\beta_j}\left[\Psi^*\left(\frac{x}{\beta_j}\right)-\Psi^*(x)\right]\right|+|\mathrm{G}|\,|\Psi^*(x)-\Psi(x)|.$$

Comme le deuxième et le troisième terme du second membre tendent vers zéro pour x infini, ceci donne

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}g\left(\frac{t}{x}\right)s(t)\,dt-\mathrm{G}\Psi(x)\right|\leq\varepsilon\mathrm{M}\left[1+\int_0^{+\infty}|\mathrm{N}(t)|\,dt\right].$$

Comme le second membre peut être rendu aussi petit que l'on veut en choisissant convenablement ε, on a (3).

1.3. En prenant pour $g(t)$ la fonction égale à 1 pour $0\leq t\leq 1$ et à 0 pour $t>1$, le théorème 1 donne immédiatement comme corollaire le suivant :

Théorème 2. — *Supposons que $s(t)$ soit bornée et posons*

$$\Psi(x)=\int_0^{+\infty}\psi(t,x)s(t)\,dt\qquad(x\text{ réel}>a)$$

et

$$\Sigma(x)=\frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt\qquad(x\text{ réel}>0).$$

Si, quel que soit k positif, on a pour x infini

$$\Psi(kx)-\Psi(x)=o(1),\tag{2}$$

on a aussi pour x infini

$$\Sigma(x)=\Psi(x)+o(1).\tag{5}$$

1.3.1. Bien que le théorème 2 soit, comme nous l'avons dit, un corollaire immédiat du théorème 1, nous en donnerons une démonstration indépendante, qui nous paraît intéressante en elle-même :

Posons

$$S_x(t)=\int_0^t s(x+u)\,du\qquad(x>0\text{ quelconque}).$$

Si, quel que soit $t>0$, $|s(t)|<M$, on voit que chacune des fonctions $S_x(t)$ satisfait à

$$|S_x(t)|<Mt\qquad\text{pour } t>0\text{ quelconque},$$

et

$$|S_x(t')-S_x(t)|<M|t'-t|\qquad\text{pour } t\text{ et } t'>0\text{ quelconques}.$$

Il en résulte que, de toute suite de valeurs de x, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que la suite des fonctions $S_{x_n}(t)$ converge sur l'intervalle $(0, +\infty)$ vers une fonction limite $S(t)$.

Comme, quel que soit $x > 0$, $S_x(0) = 0$, on a $S(0) = 0$.

De même, (6) entraîne $|S(t') - S(t)| \leq M|t' - t|$. Par suite, il existe une fonction $\sigma(t)$, satisfaisant à $|\sigma(t)| \leq M$, telle que

$$S(t) = \int_0^t \sigma(u)\,du \quad (^2).$$

De ce que $|s(x_n t)| \leq M$ et $\int_0^t s(x_n u)\,du$ tend, pour n infini, vers $\int_0^t \sigma(u)\,du$, il résulte, par un théorème bien connu, que, quelle que soit la fonction $g(t)$ sommable sur $(0, +\infty)$, $\int_0^{+\infty} g(t)\,s(x_n t)\,dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} g(t)\,\sigma(t)\,dt$.

Si l'on suppose que la suite de valeurs de x dont on est parti tendait vers $+\infty$, il en est de même de la suite $\{x_n\}$, et l'on voit que, quel que soit $\alpha > 0$, $\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,\sigma(t)\,dt$.

En effet,

$$\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,s(x_n t)\,dt + \int_0^{+\infty} \left[x_n\,\psi\left(x_n t, \frac{x_n}{\alpha}\right) - \alpha\,N(\alpha t)\right] s(x_n t)\,dt.$$

Pour n infini la première intégrale tend vers $\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,\sigma(t)\,dt$, d'après ce que l'on vient de dire, la seconde vers zéro parce que la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro et est de module au plus égal à $2M\alpha\,F(\alpha t)$.

De (2) il résulte que la limite de $\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)$ est indépendante de α. Soit l sa valeur.

On a, quel que soit $\alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,\sigma(t)\,dt = l = l\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)\,dt,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty} \alpha\,N(\alpha t)[\sigma(t) - l]\,dt = 0.$$

Comme la fonction $\sigma(t) - l$ est bornée, ceci entraîne, par suite de l'hypothèse (4') sur $N(t)$, que l'on a presque partout sur $(0, +\infty)$: $\sigma(t) - l = 0$, d'où résulte que $S(t) = lt$.

---

(2) On peut prendre par exemple $\sigma(t) = S'(t)$ partout où $S'(t)$ existe et zéro aux autres points.

Donc $\Sigma(x_n)$, qui est égal à $S_{x_n}(1)$, tend vers l quand n tend vers $+\infty$, et $\Psi(x_n) - \Sigma(x_n)$ tend vers zéro.

En définitive, on a établi que, de toute suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\Psi(x_n) - \Sigma(x_n)$ tende vers zéro. Il en résulte que $\Psi(x) - \Sigma(x)$ tend vers zéro pour x infini.

1.4. Établissons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Posons*

$$\Sigma(x) = \frac{1}{x}\int_0^x s(t)\,dt.$$

Si, quel que soit k positif, on a pour x infini

$$\Sigma(kx) - \Sigma(x) = o[1], \tag{7}$$

alors on a

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} |s(x) - \Sigma(x)| \leq \omega_s(1+0) \tag{8}$$

et, plus généralement, quel que soit l'ensemble de nombres réels positifs E, *supposé non borné supérieurement,*

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in E}}} |s(x) - \Sigma(x)| \leq \omega_s(E, 1+0). \tag{9}$$

Si, de plus, $s(t)$ est réelle, on a

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} |s(x) - \Sigma(x)| \leq \varpi_s(1+0), \tag{10}$$

et, quel que soit l'ensemble de nombres positifs E, *non borné supérieurement,*

$$-\varpi_s''(E, 1+0) \leq \underline{\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in E}}} [s(x) - \Sigma(x)] \leq \overline{\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\in E}}} [s(x) - \Sigma(x)] \leq \varpi_s'(E, 1+0) \quad (3). \tag{11}$$

Partons de l'égalité

$$kx\,\Sigma(kx) - x\,\Sigma(x) = \int_x^{kx} s(t)\,dt = (k-1)xs(x) + x\int_1^k [s(xt) - s(x)]\,dt.$$

On en tire

$$s(x) = \frac{k\Sigma(kx) - \Sigma(x)}{k-1} - \frac{1}{k-1}\int_1^k [s(xt) - s(x)]\,dt,$$

d'où

$$s(x) - \Sigma(x) = \frac{k}{k-1}[\Sigma(kx) - \Sigma(x)] - \frac{1}{k-1}\int_1^k [s(xt) - s(x)]\,dt. \tag{12}$$

(3) Ce théorème généralise, pour le cas où $\Lambda(t) = t$, les théorèmes III et V donnés par Karamata dans [7] (p. 28 et 36).

Si $k>1$, comme, pour $1\leq t\leq k$, $|s(xt)-s(x)|\leq W_s(x,k)$, on a

$$\left|\int_1^k [s(xt)-s(x)]\,dt\right|\leq (k-1)\,W_s(x,k).$$

(12) donne donc

$$|s(x)-\Sigma(x)|\leq \frac{k}{k-1}|\Sigma(kx)-\Sigma(x)|+W_s(x,k). \tag{13}$$

Si E est un ensemble de nombres réels positifs, non borné supérieurement, (13) donne, en tenant compte de (7),

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}}\,|s(x)-\Sigma(x)|\leq w_s(E,k). \tag{14}$$

Si l'on a $w_s(E,\lambda)<+\infty$ pour λ assez voisin de 1, en faisant tendre k vers 1 dans (14), on obtient (9).

Sinon, $w_s(E,1+0)=+\infty$ et l'on a encore (9).

(8) est simplement le cas particulier de (9) dans lequel l'ensemble E est l'ensemble de tous les nombres réels positifs.

Supposons maintenant que $s(t)$ soit réelle.

Si $k>1$, de ce que, pour $1\leq t\leq k$, $s(xt)-s(x)\geq -\Pi'_s(x,k)$, il résulte que

$$\int_1^k [s(xt)-s(x)]\,dt\geq -(k-1)\,\Pi'_s(x,k).$$

(12) donne alors

$$s(x)-\Sigma(x)\leq \frac{k}{k-1}[\Sigma(kx)-\Sigma(x)]+\Pi'_s(x,k),$$

d'où

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}}\,[s(x)-\Sigma(x)]\leq \varpi'_s(E,k). \tag{15}$$

Si l'on a $\varpi'_s(E,\lambda)<+\infty$ pour λ assez voisin de 1, en faisant tendre k vers 1 dans (15), on obtient

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}}\,[s(x)-\Sigma(x)]\leq \varpi'_s(E,1+0). \tag{16}$$

Sinon, $\varpi'_s(E,1+0)=+\infty$ et l'on a encore (16).

Si $k<1$, de ce que, pour $k\leq t\leq 1$, $s(xt)-s(x)\leq \Pi''_s\left(x,\frac{1}{k}\right)$, il résulte que

$$\int_k^1 [s(xt)-s(x)]\,dt\leq (1-k)\Pi''_s\left(x,\frac{1}{k}\right),$$

d'où

$$\frac{1}{k-1}\int_1^k [s(xt)-s(x)]\,dt=\frac{1}{1-k}\int_k^1 [s(xt)-s(x)]\leq \Pi''_s\left(x,\frac{1}{k}\right).$$

(12) donne alors

$$s(x) - \Sigma(x) \geq \frac{k}{k-1}[\Sigma(kx) - \Sigma(x)] - \Pi''_s\left(x, \frac{1}{k}\right),$$

d'où

$$\varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Sigma(x)] \geq -\varpi''_s\left(E, \frac{1}{k}\right). \tag{17}$$

Si $\varpi''_s(E, \lambda) < +\infty$ pour λ assez voisin de 1, en faisant tendre k vers 1 dans (17), on obtient

$$\varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Sigma(x)] \geq -\varpi''_s(E, 1+0). \tag{18}$$

Sinon, $\varpi''_s(E, 1+0) = +\infty$ et l'on a encore (18).

(16) et (18) donnent (11).

(10) est le cas particulier de (11) dans lequel E est l'ensemble de tous les nombres réels positifs.

1.5. En combinant les théorèmes 2 et 3, on obtient le suivant :

THÉORÈME 4. — *Si $s(t)$ est bornée, et si, quel que soit $k > 0$, on a pour x infini*

$$\Psi(kx) - \Psi(x) = o[1], \tag{2}$$

avec

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt,$$

alors on a

$$\varlimsup_{x \to +\infty} |s(x) - \Psi(x)| \leq \omega_s(1+0) \tag{19}$$

et, plus généralement, quel que soit l'ensemble E *de nombres réels supérieurs à a, supposé non borné supérieurement,*

$$\varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} |s(x) - \Psi(x)| \leq \omega_s(E, 1+0). \tag{20}$$

Si, de plus, $s(t)$ et $\psi(t, x)$ sont supposées réelles, on a

$$\varlimsup_{x \to +\infty} |s(x) - \Psi(x)| \leq \varpi_s(1+0), \tag{21}$$

et, plus généralement, E *ayant la même signification que ci-dessus,*

$$-\varpi''_s(E, 1+0) \leq \varliminf_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Psi(x)] \leq \varlimsup_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} [s(x) - \Psi(x)] \leq \varpi'_s(E, 1+0) \quad (^1). \tag{22}$$

---

(1) Il faut noter que le fait que $s(t)$ est bornée entraîne $\omega_s(\lambda) < +\infty$, de sorte que $\omega_s(1+0)$, $\varpi_s(1+0)$ et, quel que soit E, $\omega_s(E, 1+0)$, $\varpi'_s(E, 1+0)$ et $\varpi''_s(E, 1+0)$ ont des valeurs finies.

Le théorème 2 montre d'abord que l'on a pour x infini

$$\Sigma(x) = \Psi(x) + o[1]. \tag{5}$$

Mais, en tenant compte de (2), ceci entraîne (7), ce qui permet d'appliquer le théorème 3.

(5) permet de remplacer $\Sigma(x)$ par $\Psi(x)$ dans les inégalités (8) et (9), et dans (10) et (11) si $s(t)$ est réelle.

1.5.1. Quel que soit $\psi(t, x)$, il peut y avoir égalité dans (19) et dans (20) avec des seconds membres non nuls; et, si $\psi(t, x)$ est réelle, avec $s(t)$ réelle, il peut y avoir égalité dans (21) et l'on peut avoir

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} [s(x) - \Psi(x)] = -\varpi_s''(E, 1+0)$$

et

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} [s(x) - \Psi(x)] = \varpi_s'(E, 1+0),$$

avec des seconds membres non nuls.

Prenons par exemple

$$s(t) = \begin{cases} (-1)^n & \text{pour } 2^n - 1 \leq t < 2^n + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ 0 & \text{pour toutes les autres valeurs de } t. \end{cases}$$

On a $w_s(1+0) = \varpi_s(1+0) = 1$ et, pour E égal à l'ensemble des puissances de 2 supérieures à a,

$$w_s(E, 1+0) = \varpi_s'(E, 1+0) = \varpi_s''(E, 1+0) = 1.$$

Comme $|s(xt)| \leq 1$ et $\int_0^t s(xu)\,du$ tend vers zéro pour x infini, et comme

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} N(t)\, s(xt)\, dt + \int_0^{+\infty} [x\psi(xt, x) - N(t)]\, s(xt)\, dt,$$

on voit que $\Psi(x)$ tend vers zéro pour x infini.

Alors on a

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} |s(x) - \Psi(x)| = 1 = w_s(1+0)$$

et, pour E égal à l'ensemble indiqué ci-dessus,

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} |s(x) - \Psi(x)| = 1 = w_s(E, 1+0).$$

Si $\psi(t, x)$ est réelle, on a

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} |s(x) - \Psi(x)| = 1 = \varpi_s(1+0)$$

et, pour le même E,

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}}\,[s(x)-\Psi(x)]=-1=-\varpi_s''(E,1+0)$$

et

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}}\,[s(x)-\Psi(x)]=1=\varpi_s'(E,1+0).$$

Le même exemple montre que les bornes fournies par le théorème 3 pour les valeurs limites de $|s(x)-\Sigma(x)|$ ou de $s(x)-\Sigma(x)$ peuvent être atteintes sans être nulles.

1.6. En combinant les théorèmes A et 4, on obtient le suivant :

Théorème 5. — *Supposons que, pour chaque x fixé $>a$, la fonction $x\psi(xt,x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1,+\infty)$, et que l'on ait pour x infini*

$$\int_1^{+\infty}|x\psi(xt,x)|\log t\,dt=O[1].$$

Si l'on a $w_s(\lambda)<+\infty$, et si, en posant

$$\Psi(x)=\int_0^{+\infty}\psi(t,x)\,s(t)\,dt,$$

on a pour x infini

(23) $$\Psi(x)=O[1]$$

et, quel que soit $k>0$,

(2) $$\Psi[kx]-\Psi(x)=o[1],$$

alors on a (19), *et, plus généralement, pour tout ensemble* E *de nombres réels supérieurs à a, supposé non borné supérieurement, on a* (20).

Si, de plus, $\psi(t,x)$ et $s(t)$ sont réelles, on a (21) *et* (22).

Le théorème A montre d'abord que $s(t)$ est bornée, on peut alors appliquer le théorème 4.

1.7. En combinant les théorèmes B et 4, on obtient le suivant :

Théorème 6. — *Supposons que la fonction $\psi(t,x)$ soit réelle positive ou nulle, que, pour chaque x fixé $>a$, la fonction $x\psi(xt,x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1,+\infty)$, et que l'on ait pour x infini*

$$\int_1^{+\infty}x\psi(xt,x)\log t\,dt=O[1].$$

Si $s(t)$ est réelle et satisfait à $\varpi_s(\lambda)<+\infty$, si l'intégrale $\int_0^{+\infty}\psi(t,x)\,s(t)\,dt$

est convergente pour $x > a$, et si, en désignant par $\Psi(x)$ la valeur de cette intégrale, on a pour x infini

$$\Psi(x) = O[1], \tag{23}$$

et, quel que soit $k > 0$,

$$\Psi[kx] - \Psi(x) = o[1], \tag{2}$$

alors on a (19) *et* (21) *et, plus généralement, quel que soit l'ensemble* E *de nombres réels supérieurs à a, supposé non borné supérieurement, on a* (20) *et* (22).

Le théorème B montre d'abord que $s(t)$ est bornée, on applique ensuite le théorème 4.

1.8. Notons que (23) et (2) sont satisfaites en particulier si $\Psi(x)$ tend vers une limite finie S quand x tend vers $+\infty$, et qu'alors (19) et (20) deviennent

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} |s(x) - S| \leq w_s(1+0)$$

et

$$\overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} |s(x) - S| \leq w_s(E, 1+0),$$

et, s'il y a lieu, (21) et (22) deviennent

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} |s(x) - S| \leq \varpi_s(1+0)$$

et

$$S - \varpi_s''(E, 1+0) \leq \underline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} s(x) \leq \overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} s(x) \leq S + \varpi_s'(E, 1+0).$$

1.8.1. Notons aussi que, lorsque $w_s(1+0) = 0$, (19) donne

$$s(x) = \Psi(x) + o[1] \qquad (x \to +\infty).$$

(21) donne la même relation lorsque $\varpi_s(1+0) = 0$.

1.9. Comme application du théorème 5 nous donnerons l'énoncé suivant :

Théorème 7. — *Supposons que, pour chaque x fixé $> a$, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait pour x infini*

$$\int_1^{+\infty} |x\psi(xt, x)| \log t \, dt = O[1].$$

Soit, d'autre part, une suite de nombres réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ satisfaisant à

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty \quad (5).$$

(5) Noter que nous ne supposons pas ici, comme aux paragraphes 3.5.1 et 3.6.1 de notre premier Mémoire, que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ tend vers 1 pour n infini.

Quelle que soit la suite de nombres réels ou complexes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *satisfaisant à l'une des conditions suivantes :*

$$u_n = O\left[\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right] \qquad (n \to +\infty) \tag{24}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{j=n} |u_j|^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} = O[\lambda_n] \quad (n \to +\infty) \qquad \textit{pour un } p \textit{ fixé} > 1, \tag{25}$$

les séries $\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x) u_n$ *et* $\sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)] S_n$, *où* $S_n = \sum_0^n u_j$, *sont convergentes et égales pour* $x > a$.

Si leur somme tend vers une limite finie S *quand* x *tend vers* $+\infty$, *la série* $\sum_0^{+\infty} u_n$ *est convergente avec pour somme* S ([6]).

Nous définissons une fonction $s(t)$ pour $t \geq 0$ par

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0, \\ \sum\limits_{\lambda_n \leq t} u_n & \text{pour } t > 0, \end{cases}$$

étant entendu que la somme $\sum_{\lambda_n \leq t} u_n$ est prise égale à zéro s'il n'y a aucun λ_n au plus égal à t.

Le théorème sera établi quand nous aurons montré que, si l'une des conditions (24) ou (25) est satisfaite, on a $w_s(\lambda) < +\infty$ et, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, $w_s(E, 1+0) = 0$.

En effet, d'après ce qui a été rappelé au paragraphe 1.1.1, si l'on a $w_s(\lambda) < +\infty$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$ et, comme $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$ est aussi convergente et est égale à la précédente.

([6]) Le cas particulier de ce théorème correspondant à $\psi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$ a été établi :

1° pour la condition (24) par Littlewood [8], avec l'hypothèse que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ tend vers 1 pour n infini, puis par Ananda-Rau [1] sans cette hypothèse ;

2° pour la condition (25) par O. Sasz ([9] et [11]) [Hardy et Littlewood avaient traité précédemment le cas particulier où $\lambda_n = n$ ([4], § 8, p. 283)].

Alors, comme on a

$$\sum_{0}^{N}[\varphi(\lambda_n, x)-\varphi(\lambda_{n+1}, x)]\,S_n=\int_{0}^{t_N-t}\psi(t, x)\,s(t)\,dt$$

et

$$\sum_{0}^{N}\varphi(\lambda_n, x)\,u_n=\int_{0}^{t_N-}\varphi(t, x)\,ds(t),$$

il sera établi tout d'abord que, si l'une des conditions (24) ou (25) est satisfaite,

$$\sum_{0}^{+\infty}\varphi(\lambda_n, x)\,u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{0}^{-\infty}[\varphi(\lambda_n, x)-\varphi(\lambda_{n-1}, x)]\,S_n$$

sont convergentes pour $x>a$ et égales à $\int_{0}^{\infty}\psi(t, x)\,s(t)\,dt$.

Si, de plus, la somme de ces séries tend vers une limite finie S quand x tend vers $+\infty$, on pourra appliquer le théorème 5. En prenant pour E l'ensemble des λ_n supérieurs à a, (20) donnera

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,|S_n-S|\leq 0. \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n\to-\infty}S_n=S.$$

On pourrait remarquer que (24) entraîne (25), mais nous donnerons des démonstrations indépendantes pour le cas où l'on suppose que l'on a (24) et celui où l'on suppose que l'on a (25).

a. Supposons d'abord que l'on a (24).

On voit d'abord qu'il existe un nombre positif M tel que, pour $n\geq 1$,

$$|u_n|\leq M\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}.$$

Ceci entraîne

$$|u_n|\leq M \qquad \text{et} \qquad u_n\leq M\log\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

La seconde inégalité montre que, si $n_2>n_1$,

$$\sum_{n_1+1}^{n_2}u_n\leq M\log\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}.$$

On voit alors que, quels que soient t et t' satisfaisant à $\lambda_0\leq t\leq t'$, on a

$$|s(t')-s(t)|\leq M\left|1+\log\frac{t'}{t}\right|.$$

En effet, s'il n'y a aucun λ_n satisfaisant à $t<\lambda_n<t'$, on a $s(t')-s(t)=0$; s'il y en a un, soit λ_{n_1}, on a, puisque $n_1\geq 1$,

$$|s(t')-s(t)|=|u_{n_1}|\leq M;$$

et s'il y en a plusieurs, soit $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_1+1}, \ldots, \lambda_{n_2}$, on a

$$|s(t')-s(t)| \leq |u_{n_1}| + \sum_{n_1+1}^{n_2} |u_n| \leq M + M \log \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}.$$

Il résulte de là que, pour $t > \lambda_0$,

$$W_s(t, \lambda) \leq M(1 + \log \lambda),$$

donc que

$$w_s(\lambda) \leq M(1 + \log \lambda) < +\infty.$$

De même, si $t \geq \lambda_q > 0$, on a

$$|s(t) - s(\lambda_q)| \leq M \log \frac{t}{\lambda_q};$$

car, si $t < \lambda_{q+1}$, $s(t) - s(\lambda_q) = 0$; et si $\lambda_r \leq t < \lambda_{r+1}$, avec $r > q$,

$$|s(t) - s(\lambda_q)| \leq \sum_{q+1}^{r} |u_n| \leq M \log \frac{\lambda_r}{\lambda_q}.$$

Ceci montre que $W_s(\lambda_q, \lambda) \leq M \log \lambda$, d'où il résulte que, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$,

$$w_s(E, \lambda) \leq M \log \lambda,$$

et par suite $w_s(E, 1+0) = 0$.

b. Supposons maintenant que l'on ait (25).

On voit d'abord qu'il existe un nombre positif M tel que, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j|^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} \leq M^p \lambda_n.$$

Ceci entraîne en premier lieu

$$|u_n|^p \lambda_n^p (\lambda_n - \lambda_{n-1})^{1-p} \leq M^p \lambda_n, \qquad \text{d'où} \qquad |u_n| \leq M \left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq M.$$

D'autre part, en introduisant le nombre p' défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a pour $n_1 < n_2$,

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} |u_j| \leq M \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

En effet, comme, pour $j \geq 1$,

$$|u_j| = |u_j| \lambda_j (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{-\frac{1}{p'}} \frac{(\lambda_j - \lambda_{j-1})^{\frac{1}{p'}}}{\lambda_j},$$

l'inégalité de Hölder donne

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} |u_j| \leq \left\{ \sum_{n_1+1}^{n_2} |u_j|^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{n_1+1}^{n_2} \frac{\lambda_j - \lambda_{j-1}}{\lambda_j^{p'}} \right\}^{\frac{1}{p'}}.$$

Le premier terme du second membre est au plus égal à $M\lambda_{n_2}^{\frac{1}{p}}$. En remarquant que dans le second terme tous les dénominateurs sont supérieurs à $\lambda_{n_1}^{p'}$, on voit que ce second terme est au plus égal à $\frac{(\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1})^{\frac{1}{p'}}}{\lambda_{n_1}}$. En définitive, le second membre est au plus égal à

$$M\lambda_{n_2}^{\frac{1}{p}} \frac{(\lambda_{n_2} - \lambda_{n_1})^{\frac{1}{p'}}}{\lambda_{n_1}} = M\left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Ceci étant, on voit, en raisonnant comme plus haut, que, quels que soient t et t' satisfaisant à $\lambda_0 < t < t'$, on a

$$|s(t') - s(t)| \leq M\left[1 + \left(\frac{t'}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t'}{t} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}\right], \tag{26}$$

et, si $t \geq \lambda_q > 0$, on a

$$|s(t) - s(\lambda_q)| \leq M\left(\frac{t}{\lambda_q}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t}{\lambda_q} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{27}$$

(26) montre que, pour $t \geq \lambda_0$,

$$W_s(t, \lambda) \leq M\left[1 + \lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}}\right],$$

et par suite que

$$\omega_s(\lambda) \leq M\left[1 + \lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}}\right] < +\infty.$$

(27) montre que, pour $\lambda_q > 0$,

$$W_s(\lambda_q, \lambda) \leq M\lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}},$$

et par suite que, si E est l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$,

$$\omega_s(E, \lambda) \quad M\lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}},$$

de sorte que $\omega_s(E, 1 + 0) = 0$.

1. 10. Comme application du théorème 6, nous donnerons l'énoncé suivant :

THÉORÈME 8. — *Supposons que la fonction $\psi(t, x)$ soit réelle ≥ 0, que, pour chaque x fixé $> a$, la fonction $x\psi(xt, x)\log t$ soit sommable sur l'intervalle $(1, +\infty)$, et que l'on ait pour x infini*

$$\int_1^{\infty} x\psi(xt, x)\log t\, dt = o(1).$$

Soit, d'autre part, une suite de nombres réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ *satisfaisant à*

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \qquad \text{et} \qquad \lim \lambda_n = +\infty.$$

Soit encore une autre suite de nombres réels $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ *et posons*

$$\operatorname{Max}(0, -u_n) = u'_n, \qquad \sum_0^n u_j = S_n.$$

Si l'une des séries

$$\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x)\, u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_0^{+\infty} |\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)| S_n$$

est convergente pour $x > a$, *si la somme de cette série tend vers une limite finie* S *quand* x *tend vers* $+\infty$, *et si l'on a une des conditions suivantes :*

$$u'_n = O\left[\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right] \qquad (n \to +\infty), \tag{28}$$

ou

$$\sum_1^n u'^p_j \lambda'^p_j (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} = O[\lambda_n] \quad (n \to +\infty) \qquad \text{pour un } p \text{ fixé} > 1, \tag{29}$$

on a

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} S_n = S \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} S_n = S - \delta,$$

avec

$$\delta = \overline{\lim_{n \to +\infty}} u'_n \quad (^*).$$

a. La fonction $s(t)$ étant toujours définie de la même façon à partir de la suite $\{u_n\}$, nous montrerons d'abord que, si l'une ou l'autre des conditions (28) et (29) est satisfaite, on a $\varpi_s(\lambda) < +\infty$ et, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$,

$$\varpi'_s(E, 1+0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varpi''_s(E, 1-0) \leq \delta.$$

Comme pour le théorème 7, nous pourrions remarquer que (28) entraîne (29), mais nous préférons donner des démonstrations indépendantes pour le cas où l'on suppose que l'on a (28) et celui où l'on suppose que l'on a (29).

1. Supposons d'abord que l'on ait (28).

Alors il existe un nombre positif M tel que, pour $n \geq 1$,

$$u'_n \leq M \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n},$$

(*) Nous avons donné dans [3] (th. 7, p. 107) le cas particulier de ce théorème correspondant à $\varphi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$, avec la condition (28).

d'où il résulte que $u'_n \leqq M$ et que, si $n_2 > n_1$,

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} u'_n \leqq M \log \frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}.$$

En remarquant que, pour $h \leqq k$, $\sum_h^k u_n \geqq -\sum_h^k u'_n$, et raisonnant comme au paragraphe précédent, on en déduit que, quels que soient t et t' satisfaisant à $\lambda_0 < t < t'$,

$$s(t') - s(t) \geqq -M\left(1 + \log \frac{t'}{t}\right), \tag{30}$$

et que, si $t \geqq \lambda_q > 0$,

$$s(t) - s(\lambda_q) \geqq -M \log \frac{t}{\lambda_q}. \tag{31}$$

(30) entraîne que, pour $t > \lambda_0$,

$$\Pi'_s(t, \lambda) \leqq M(1 + \log\lambda),$$

et par suite que

$$\varpi_s(\lambda) \leqq M(1 + \log\lambda) < +\infty.$$

(31) entraîne que, pour $q \geqq 1$,

$$\Pi'_s(\lambda_q, \lambda) \leqq M \log\lambda,$$

et par suite que, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$

$$\varpi'_s(E, \lambda) \leqq M \log\lambda,$$

de sorte que $\varpi'_s(E, 1+0) = 0$.

On voit d'autre part que, si $\lambda_q > \lambda\lambda_0$, on a

$$\Pi''_s(\lambda_q, \lambda) \leqq u'_{q'} + M \log\lambda,$$

où q' est l'entier déterminé par $\lambda_{q'-1} \leqq \frac{\lambda_q}{\lambda} < \lambda_{q'}$.

En effet, quel que soit $t \geqq \lambda_0$, on a

$$s(t) - s(\lambda_q) = s(\lambda_r) - s(\lambda_q),$$

où r est l'entier déterminé par $\lambda_r \leqq t < \lambda_{r+1}$.

Si $\frac{\lambda_q}{\lambda} \leqq t \leqq \lambda_q$, on aura

$$t \geqq \lambda_0 \qquad \text{et} \qquad q' - 1 \leqq r \leqq q.$$

Si $r \geqq q'$, (31) donne, en y remplaçant t par λ_q et λ_q par λ_r,

$$s(\lambda_q) - s(\lambda_r) \geqq -M \log \frac{\lambda_q}{\lambda_r} \geqq -M \log\lambda,$$

d'où

$$s(t) - s(\lambda_q) \leqq M \log\lambda \leqq M \log\lambda + u'_{q'};$$

Si $r = q' - 1$, on peut écrire

$$s(\lambda_q) - s(\lambda_r) = s(\lambda_q) - s(\lambda_{q'}) + u_{q'},$$

et, en utilisant (31) et l'inégalité $u_{q'} \geq -u'_{q'}$, on a

$$s(\lambda_q) - s(\lambda_r) \geq -M \log \frac{\lambda_q}{\lambda_{q'}} - u'_{q'} \geq -M \log \lambda - u'_{q'},$$

d'où

$$s(t) - s(\lambda_q) \leq M \log \lambda + u'_{q'}.$$

Il résulte de là que, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$,

$$\varpi''_s(E, \lambda) \leq \delta + M \log \lambda,$$

et, par suite, $\varpi''_s(E, 1+0) \leq \delta$.

2. Supposons maintenant que l'on ait (29).

Alors il existe un nombre positif M tel que l'on ait, pour $n \geq 1$,

$$\sum_1^n u_j'^p \lambda_j^p (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} \leq M^p \lambda_n,$$

d'où l'on déduit, en raisonnant comme au paragraphe 1.9, que, pour $n \geq 1$, $u'_n \leq M$, et que, si $n_1 < n_2$,

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} u'_j \leq M \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\lambda_{n_2}}{\lambda_{n_1}} - 1\right)^{\frac{1}{p'}},$$

p' étant le nombre réel défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

On voit alors que, quels que soient t et t' satisfaisant à $\lambda_0 < t < t'$,

$$s(t') - s(t) \geq -M \left[1 + \left(\frac{t'}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t'}{t} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}\right], \tag{32}$$

et, que si $t > \lambda_q > 0$,

$$s(t) - s(\lambda_q) \geq -M \left[\left(\frac{t}{\lambda_q}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{t}{\lambda_q} - 1\right)^{\frac{1}{p'}}\right]. \tag{33}$$

(32) entraîne que, pour $t > \lambda_0$,

$$\Pi'_s(t, \lambda) \leq M \left[1 + \lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}}\right],$$

et, par suite, que

$$\varpi_s(\lambda) \leq M \left[1 + \lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}}\right] < +\infty.$$

(33) entraîne que, pour $q \geq 1$,

$$\Pi'_s(\lambda_q, \lambda) \leq M \lambda^{\frac{1}{p}} (\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}},$$

et, par suite, que, pour E égal à l'ensemble des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$,

$$\varpi'_s(E, \lambda) \leq M\lambda^{\frac{1}{p}}(\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}},$$

de sorte que $\varpi'_s(E, 1+0) = 0$.

On voit ensuite, en raisonnant comme plus haut, que, pour E égal à ce même ensemble,

$$\varpi''_s(E, \lambda) \leq \delta + M\lambda^{\frac{1}{p}}(\lambda - 1)^{\frac{1}{p'}}, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi''_s(E, 1+0) \leq \delta.$$

b. Pour $\lambda_N \leq L < \lambda_{N+1}$, l'intégrale $\int_0^L \psi(t, x)s(t)dt$ est comprise entre la somme des N premiers termes et la somme des $N+1$ premiers termes de la série $\sum_0^{+\infty}[\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]S_n$. Par suite, si cette série est convergente pour $x > a$ et a pour somme $S(x)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)dt$ est aussi convergente et égale à $S(x)$.

De même, comme, pour $\lambda_N \leq L < \lambda_{N+1}$,

$$\int_0^L \varphi(t, x)\, ds(t) = \sum_0^N \varphi(\lambda_n, x)u_n,$$

si la série $\sum_0^{+\infty}\varphi(\lambda_n, x)u_n$ est convergente pour $x > a$ et a pour somme $S(x)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$ est convergente et égale à $S(x)$. Alors, comme $\psi(t, x) \geq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)dt$ est aussi convergente et égale à $S(x)$.

On voit que, de toute façon, les hypothèses du théorème impliquent que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)dt$ est convergente pour $x > a$ et tend vers S quand x tend vers $+\infty$.

c. Puisque, d'après ce qui a été dit en a, $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, on peut appliquer le théorème 6.

En prenant E égal à l'ensemble des λ_n supérieurs à α, et tenant compte de ce que l'on a établi en a, (22) donne

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} S_n \leq S \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim_{n \to +\infty}} S_n \geq S - \delta. \tag{34}$$

Si $\delta = 0$, ceci entraîne bien

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} S_n = S, \qquad \underline{\lim_{n \to +\infty}} S_n = S - \delta.$$

Supposons donc $\delta > 0$. Alors il existe une suite d'entiers croissants $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ telle que u'_{n_k} tende vers δ.

Pour k assez grand, $u'_{n_k} > 0$ et $u_{n_k} = -u'_{n_k}$, de sorte que

$$S_{n_k} = S_{n_k - 1} - u'_{n_k}.$$

De là il résulte que

$$\overline{\lim_{k \to +\infty}} S_{n_k} = \overline{\lim_{k \to +\infty}} S_{n_k - 1} - \delta,$$

ce qui entraîne

$$\underline{\lim_{n \to +\infty}} S_n \leq \overline{\lim_{n \to +\infty}} S_n - \delta.$$

En combinant ceci avec (34), on obtient encore

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} S_n = S \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim_{n \to +\infty}} S_n = S - \delta.$$

1.10.1. Il est clair que, *si dans le théorème* 8 *on ajoute l'hypothèse que* $\delta = 0$, *la conclusion devient que la série* $\sum_0^{+\infty} u_n$ *est convergente et a pour somme* S.

Il en est de même si l'on ajoute l'hypothèse que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ *tend vers* 1 *pour n infini* (8), *car nous allons voir que, si l'on a* (28), *on a*

$$\delta \leq (1 - \alpha)\mu, \quad \text{avec} \quad \alpha = \underline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \quad \text{et} \quad \mu = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} u'_n,$$

et, si l'on a (29), *on a*

$$\delta \leq (1 - \alpha)^{\frac{1}{p'}} \nu^{\frac{1}{p}}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \underline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \quad \text{et} \quad \nu = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \sum_1^n u'^p_j \lambda^p_j (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p}.$$

En effet, si l'on a (28), quel que soit $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \geq \alpha - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} u'_n \leq \mu + \varepsilon,$$

d'où

$$u'_n \leq (\mu + \varepsilon)\left(1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \leq (\mu + \varepsilon)(1 - \alpha + \varepsilon),$$

et par suite on a

$$\delta \leq (\mu + \varepsilon)(1 - \alpha + \varepsilon).$$

---

(8) O. Sasz [11] a établi le théorème 8 sous cette forme particulière, avec la condition (29), dans le cas où $\psi(t, x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$. Il avait traité précédemment [10] le cas particulier où $\lambda_n = n$.

Si l'on a (29), quel que soit ε, on a pour n assez grand

$$\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \geq \alpha - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\lambda_n} \sum_{1}^{n} u_j'^{p} \lambda_j'^{p} (\lambda_j - \lambda_{j-1})^{1-p} \leq \nu + \varepsilon,$$

d'où

$$u_n'^{p} \lambda_n'^{p} (\lambda_n - \lambda_{n-1})^{1-p} \leq (\nu + \varepsilon) \lambda_n,$$

d'où

$$u_n'^{p} \leq (\nu + \varepsilon) \left(1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)^{p-1} \leq (\nu + \varepsilon)(1 - \alpha + \varepsilon)^{p-1},$$

ou

$$u_n' \leq (\nu + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} (1 - \alpha + \varepsilon)^{\frac{1}{p'}},$$

et par suite on a

$$\delta \leq (\nu + \varepsilon)^{\frac{1}{p}} (1 - \alpha + \varepsilon)^{\frac{1}{p'}}.$$

1.11. Nous avons établi le théorème 5 en combinant les théorèmes A et 4, c'est-à-dire en définitive en combinant les théorèmes A, 2 et 3 [ce qui est la méthode suivie par Karamata pour établir le théorème inverse relatif à la condition de convergence $w_{s,A}(1+0) = 0$].

Si l'on remplace dans le théorème 5 l'hypothèse que $x\psi(xt, x)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$ et que l'on a pour x infini

$$\int_1^{+\infty} x\psi(xt, x) \log t \, dt = O[1],$$

par l'hypothèse, plus restrictive, que la fonction $F(t)\log t$ est sommable sur $(0, +\infty)$, on peut donner une démonstration directe, indépendante des autres théorèmes établis ici.

1.11.1. Nous commençons par étudier la famille des fonctions $G_x(t)$ définies par

$$G_x(t) = \int_0^t g_x(u)\, du, \qquad \text{avec } g_x(t) = s(xt) - s(x).$$

a. Nous savons que l'hypothèse $w_s(\lambda) < +\infty$ entraine que $s(t)$ satisfait à $|s(t') - s(t)| \leq H \left|\log \frac{t'}{t}\right| + K$, de sorte que

$$|g_x(t)| \leq H |\log t| + K.$$

Il en résulte que, quels que soient t et t' satisfaisant à $0 < t < t'$, et quel que soit $x > 0$, on a

$$|G_x(t') - G_x(t)| \leq \int_t^{t'} [H |\log u| + K]\, du. \tag{35}$$

Ceci montre que les fonctions $G_x(t)$ sont également continues, et bornées dans leur ensemble sur tout intervalle fini $[0, L]$. *Donc, de toute suite de valeurs de x on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $G_{x_n}(t)$ tende vers une fonction limite* $G(t)$.

On a $G(0)=0$ puisque $G_x(0)=0$ quel que soit $x>0$.

De plus, $G(t)$ est absolument continue puisque (35) donne à la limite

$$|G(t')-G(t)|\leq\int_t^{t'}[H|\log u|+K]\,du.$$

Il existe donc une fonction $g(t)$, satisfaisant à $|g(t)|\leq H|\log t|+K$, telle que $G(t)=\int_0^t g(u)\,du$.

D'autre part, λ étant un nombre réel positif quelconque, nous poserons

$$H_\lambda(t)=\frac{1}{\lambda}G(\lambda t)-G(t).$$

On voit que

$$H_\lambda(t)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda t}g(u)\,du-\int_0^t g(u)\,du=\int_0^t[g(\lambda u)-g(u)]\,du.$$

b. Si l'on est parti d'une suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$, de sorte que la suite $\{x_n\}$ tend aussi vers $+\infty$, *quel que soit $\lambda\neq 1$, on a presque partout sur $(0,+\infty)$:*

$$|g(\lambda t)-g(t)|\leq\begin{cases}w_s(\lambda) & \text{si } \lambda>1,\\ w_s\left(\frac{1}{\lambda}\right) & \text{si } \lambda<1.\end{cases}\tag{36}$$

En effet, on a

$$H_\lambda(t)=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\lambda}G_{x_n}(\lambda t)-G_{x_n}(t)\right]=\lim_{n\to+\infty}\int_0^t[s(\lambda u x_n)-s(ux_n)]\,du,$$

puisque

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}G_{x_n}(\lambda t)-G_{x_n}(t)&=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda t}g_{x_n}(u)\,du-\int_0^t g_{x_n}(u)\,du\\&=\int_0^t[g_{x_n}(\lambda u)-g_{x_n}(u)]\,du\\&=\int_0^t[s(\lambda u x_n)-s(ux_n)]\,du.\end{aligned}$$

On a donc, quels que soient t et t' satisfaisant à $0<t<t'$,

$$H_\lambda(t')-H_\lambda(t)=\lim_{n\to+\infty}\int_t^{t'}[s(\lambda u x_n)-s(ux_n)]\,du.$$

Comme on a évidemment

$$\left|\int_t^{t'}[s(\lambda ux)-s(ux)]\,du\right|\leq(t'-t)\,W_s(ux,\lambda)\qquad\text{si}\quad\lambda>1,$$

$$\left|\int_t^{t'}[s(\lambda ux)-s(ux)]\,du\right|\leq(t'-t)\,W_s\left(\lambda ux,\frac{1}{\lambda}\right)\qquad\text{si}\quad\lambda<1,$$

on en déduit que

$$|H_\lambda(t')-H_\lambda(t)|\leq\begin{cases}(t'-t)\,w_s(\lambda) & \text{si}\quad\lambda>1,\\ (t'-t)\,w_s\left(\frac{1}{\lambda}\right) & \text{si}\quad\lambda<1,\end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_t^{t'}[g(\lambda u)-g(u)]\,du\right|\leq\begin{cases}(t'-t)\,w_s(\lambda) & \text{si}\quad\lambda>1,\\ (t'-t)\,w_s\left(\frac{1}{\lambda}\right) & \text{si}\quad\lambda<1.\end{cases}$$

c. Si la suite de valeurs de x dont on est parti, non seulement tend vers $+\infty$, mais est formée de nombres de l'ensemble E, *de sorte qu'il en est de même de la suite $\{x_n\}$, et si $G(t)$ possède une dérivée pour $t=1$, on voit que*

$$|G'(1)|\leq w_s(E,\,1+0),\tag{37}$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$-\varpi'_s(E,\,1+0)\leq G'(1)\leq\varpi''_s(E,\,1+0).\tag{38}$$

En effet, si $t>1$, on a

$$\left|\frac{G_x(t)-G_x(1)}{t-1}\right|=\frac{1}{t-1}\left|\int_1^t[s(xu)-s(x)]\,du\right|\leq W_s(x,\,t).$$

On en déduit

$$\left|\frac{G(t)-G(1)}{t-1}\right|\leq w_s(E,\,t),$$

et, en faisant tendre t vers 1, on obtient (37).

Si $s(t)$ est réelle, on a pour $t>1$:

$$\frac{G_x(t)-G_x(1)}{t-1}=\frac{1}{t-1}\int_1^t[s(xu)-s(x)]\,du\geq-\Pi'_s(x,\,t),$$

d'où

$$\frac{G(t)-G(1)}{t-1}\geq-\varpi'_s(E,\,t).$$

En faisant tendre t vers 1, on obtient $G'(1)\geq-\varpi'_s(E,\,1+0)$.

Pour $t<1$, on a

$$\frac{G_x(t)-G_x(1)}{t-1}=\frac{1}{1-t}\int_t^1[s(xu)-s(x)]\,du\leq\Pi''_s\left(x,\frac{1}{t}\right),$$

d'où

$$\frac{G(t)-G(1)}{t-1} \leq \varpi_s''\left(E, \frac{1}{t}\right).$$

En faisant tendre t vers 1, on obtient $G'(1) \leq \varpi_s''(E, 1+0)$.

1.11.2. Remarquons maintenant que, si x_n tend vers $+\infty$ et si $G_{x_n}(t)$ tend vers $G(t) = \int_0^t g(u)\,du$, alors, quel que soit $\alpha > 0$,

$$\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right) - s(x_n) \qquad \text{tend vers} \qquad \int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\, g(t)\, dt.$$

En effet, la formule (1) donne

$$\Psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - s(x) = \int_0^{+\infty} x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) g_x(t)\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\, g_x(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \left[x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right) - \alpha N(\alpha t)\right] g_x(t)\, dt.$$

Le dernier terme tend vers zéro pour x infini, car la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro, puisque $x\psi\left(xt, \frac{x}{\alpha}\right)$ tend vers $\alpha N(\alpha t)$ et $|g_x(t)| \leq H|\log t| + K$, et elle est de module au plus égal à $2\alpha F(\alpha t)\,[H|\log t| + K]$, fonction qui est sommable sur $(0, +\infty)$.

D'autre part, de ce que $\int_0^t g_{x_n}(u)\,du$ tend vers $\int_0^t g(u)\,du$, et que, sur l'intervalle $\left[\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}\right]$, où $0 < \varepsilon < 1$,

$$|g_{x_n}(t)| \leq H \log \frac{1}{\varepsilon} + K,$$

il résulte que

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha N(\alpha t)\, g_{x_n}(t)\, dt \qquad \text{tend vers} \qquad \int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha N(\alpha t)\, g(t)\, dt.$$

La convergence de $\int_\varepsilon^{\frac{1}{\varepsilon}} \alpha N(\alpha t) g_{x_n}(t)\, dt$ vers $\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t) g_{x_n}(t)\, dt$ quand ε tend vers zéro étant uniforme par rapport à n, du fait que

$$|\alpha N(\alpha t)\, g_{x_n}(t)| \leq \alpha F(\alpha t)\,[H|\log t| + K],$$

un théorème bien connu sur l'interversion des passages à la limite montre que

$$\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\, g_{x_n}(t)\, dt \qquad \text{tend vers} \qquad \int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\, g(t)\, dt.$$

1.11.3. Nous sommes maintenant en mesure d'établir (20), et (22) si $s(t)$ est réelle.

En prenant E égal à l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à a, (20) donnera (19) et (22) donnera (21).

D'après ce que l'on a vu, de toute suite de valeurs de x appartenant à l'ensemble E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $G_{x_n}(t)$ tende vers la fonction limite $G(t)=\int_0^t g(u)\,du$, $g(t)$ et $G(t)$ possédant les propriétés que nous avons indiquées.

De plus, quel que soit $\alpha>0$,

$$\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)-s(x_n) \qquad \text{tend vers} \quad \int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,g(t)\,dt.$$

Comme, quel que soit $k>0$, on a pour x infini

$$\Psi(kx)-\Psi(x)=o[1],$$

cette limite est indépendante de α.

Donc, quels que soient α et λ positifs, on a

$$\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,g(t)\,dt=\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{\lambda} N\left(\frac{\alpha}{\lambda}t\right) g(t)\,dt=\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)\,g(\lambda t)\,dt,$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \alpha N(\alpha t)[g(\lambda t)-g(t)]\,dt=0.$$

Supposons λ fixé $\neq 1$. La fonction $g(\lambda t)-g(t)$ étant presque partout de module au plus égal à $w_s(\lambda)$ si $\lambda>1$, ou $w_s\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ si $\lambda<1$, le fait que ceci ait lieu quel que soit $\alpha>0$ entraine que l'on ait presque partout sur $(0,+\infty)$:

$$g(\lambda t)-g(t)=0.$$

On a donc

$$\Pi_\lambda(t)=\int_0^t [g(\lambda u)-g(u)]\,du=0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\lambda}G(\lambda t)-G(t)=0.$$

Ceci vaut évidemment encore si $\lambda=1$.

En faisant $t=1$ et posant $G(1)=l$, on obtient $G(\lambda)=l\lambda$.

On voit que $G'(1)$ existe et est égale à l.

Par suite, (37) donne

$$|l|\leq w_s(E,1+0),$$

et, si $s(t)$ est réelle, (38) donne

(39) $$-w_s(E,1+0)\leq l\leq w_s(E,1+0).$$

Mais $g(t)=l$ presque partout et $\int_0^{+\infty} N(t)g(t)\,dt=l$, donc $\Psi(x_n)-s(x_n)$ tend vers l.

En définitive, on a démontré, dans le cas général, que, de toute suite de valeurs de x appartenant à E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $|\Psi(x_n)-s(x_n)|$ tende vers une limite finie $|l|$ satisfaisant à $|l|\leq w_s(E, 1+0)$. Ceci entraîne (20).

Dans le cas où $s(t)$ est réelle, on a montré que, de toute suite de valeurs de x appartenant à E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\Psi(x_n)-s(x_n)$ tende vers une limite finie l satisfaisant à (39). Ceci entraîne

$$-\varpi'_s(E, 1+0)\leq \overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}}\,[\Psi(x)-s(x)]\leq \varpi''_s(E, 1+0),$$

ce qui est équivalent à (22).

1.11.4. Il faut noter que nous n'avons pas utilisé ici l'hypothèse que $\Psi(x)=O[1]$.

1.12. En perfectionnant un peu le raisonnement précédent, on arrive au théorème suivant :

THÉORÈME 9. — *Supposons que* $F(t)\log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$. *Supposons, d'autre part, que* $w_s(\lambda)<+\infty$, *et posons*

$$\Psi(x)=\int_0^{+\infty}\psi(t, x)\,s(t)\,dt.$$

Si, quel que soit k positif, on a pour x infini :

$$\frac{\Psi(kx)}{\log kx}-\frac{\Psi(x)}{\log x}=o\left[\frac{1}{\log x}\right], \tag{40}$$

alors, en posant $C=\int_0^{+\infty} N(t)\log\frac{1}{t}\,dt$, *on a, quel que soit l'ensemble* E *de nombres réels supérieurs à a, supposé non borné supérieurement,*

$$\overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}}\left|s(x)-\Psi(x)-C\frac{\Psi(x)}{\log x}\right|\leq w_s(E, 1+0), \tag{41}$$

et, si $\psi(t, x)$ *et* $s(t)$ *sont réelles,*

$$-\varpi''_s(E, 1+0)\leq \overline{\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x\in E}}}\left[s(x)-\Psi(x)-C\frac{\Psi(x)}{\log x}\right]\leq \varpi'_s(E, 1+0). \tag{42}$$

Si l'on prend pour E *l'ensemble de tous les nombres réels supérieurs à a,* (41) *devient*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|s(x)-\Psi(x)-C\frac{\Psi(x)}{\log x}\right|\leq w_s(1+0) \tag{43}$$

et (42) *devient*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\left|s(x)-\Psi(x)-C\frac{\Psi(x)}{\log x}\right|\leq\varpi_s(1+0). \tag{44}$$

On peut répéter sans modification ce qui a été dit aux paragraphes 1.11.1 et 1.11.2.

Nous remarquons, de plus, que pour x infini $\Psi(x)=O[\log x]$, car $s(t)=O[\log t]$ et, d'autre part, $s(t)$ satisfaisant à $|s(t')-s(t)|\leq H\left|\log\frac{t'}{t}\right|+K$, la formule (1), avec $\alpha=1$, donne

$$|\Psi(x)-s(x)|\leq\int_0^{+\infty}F(t)[H|\log t|+K]\,dt.$$

Alors, de toute suite de valeurs de x appartenant à l'ensemble E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle non seulement que $G_{x_n}(t)$ tende vers une fonction limite $G(t)=\int_0^t g(u)\,du$, [où $G(t)$ et $g(u)$ possèdent les propriétés que nous avons indiquées] mais aussi que $\frac{\Psi(x_n)}{\log x_n}$ tende vers une limite finie ρ.

Quels que soient α et λ positifs,

$$\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)-s(x_n)\qquad\text{tend vers}\qquad\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\,g(t)\,dt$$

et

$$\Psi\left(\frac{\lambda x_n}{\alpha}\right)-s(x_n)\qquad\text{tend vers}\qquad\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{\lambda}N\left(\frac{\alpha}{\lambda}t\right)g(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\,g(\lambda t)\,dt.$$

Par différence, on voit que

$$\Psi\left(\frac{\lambda x_n}{\alpha}\right)-\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)\qquad\text{tend vers}\qquad\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\,[g(\lambda t)-g(t)]\,dt.$$

Mais, en tenant compte de (40), on voit que, quel que soit k positif, $\Psi(kx_n)-\Psi(x_n)$ tend vers $\rho\log k$.

En particulier $\Psi\left(\frac{\lambda x_n}{\alpha}\right)-\Psi(x_n)$ tend vers $\rho\log\frac{\lambda}{\alpha}$ et $\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)-\Psi(x_n)$ tend vers $\rho\log\frac{1}{\alpha}$, de sorte que $\Psi\left(\frac{\lambda x_n}{\alpha}\right)-\Psi\left(\frac{x_n}{\alpha}\right)$ tend vers $\rho\log\lambda$.

On a donc, quels que soient α et λ positifs,

$$\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\,[g(\lambda t)-g(t)]\,dt=\rho\log\lambda,$$

ou

$$\int_0^{+\infty}\alpha N(\alpha t)\,[g(\lambda t)-g(t)-\rho\log\lambda]\,dt=0.$$

Supposons λ fixé $\neq 1$. La fonction $g(\lambda t)-g(t)-\rho\log\lambda$ étant presque

partout de module au plus égal à un nombre fixe, le fait que cette égalité ait lieu quel que soit α positif entraîne que l'on ait presque partout sur $(0, +\infty)$:

$$g(\lambda t) - g(t) - \rho \log\lambda = 0, \qquad \text{où} \qquad g(\lambda t) - g(t) = \rho \log\lambda.$$

On a donc

$$H_\lambda(t) = \int_0^t [g(\lambda u) - g(u)]\, du = (\rho \log\lambda)\, t,$$

ou

$$\frac{1}{\lambda} G(\lambda t) - G(t) = (\rho \log\lambda)\, t.$$

Ceci vaut évidemment encore pour $\lambda = 1$.

En faisant $t = 1$ et posant $G(1) = l - \rho$, on obtient

$$G(\lambda) = (l - \rho)\lambda + \rho\lambda \log\lambda.$$

On voit que $G'(1)$ existe et est égale à l, de sorte que (37) donne

$$|l| \leq \varpi_s(E, 1 + 0)$$

et, si $s(t)$ est réelle, (38) donne

$$-\varpi'_s(E, 1 + 0) \leq l \leq \varpi''_s(E, 1 + 0). \tag{39}$$

D'autre part, on a presque partout

$$g(t) = G'(t) = l + \rho \log t,$$

et par suite

$$\int_0^{+\infty} N(t)\, g(t)\, dt = l - \rho C.$$

Donc $\Psi(x_n) - s(x_n)$ tend vers $l - \rho C$ et $\Psi(x_n) + C\frac{\Psi(x_n)}{\log x_n} - s(x_n)$ tend vers l.

En définitive, on voit que, de toute suite de valeurs de x appartenant à E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que

$$\left| \Psi(x_n) + C\frac{\Psi(x_n)}{\log x_n} - s(x_n) \right|$$

tende vers une limite finie $|l|$ au plus égale à $\varpi_s(E, 1 + 0)$, ce qui entraîne (41), et, si $\psi(t, x)$ et $s(t)$ sont réelles, on peut dire que, de toute suite de valeurs de x appartenant à E et tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{x_n\}$ telle que $\Psi(x_n) + C\frac{\Psi(x_n)}{\log x_n} - s(x_n)$ tende vers une limite finie l satisfaisant à (39), ce qui entraîne

$$-\varpi'_s(E, 1 + 0) \leq \overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} \left[\Psi(x) + C\frac{\Psi(x)}{\log x} - s(x) \right] \leq \varpi''_s(E, 1 + 0),$$

inégalités équivalentes à (42).

1.13. Nous établirons encore le théorème suivant :

THÉORÈME 10. — *Supposons que* $F(t)\log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *et que* $\psi(t, x)$ *soit réelle* ≥ 0. *Supposons d'autre part que* $s(t)$ *soit réelle, que* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *et que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ *soit convergente pour* $x > a$, *et désignons par* $\Psi(x)$ *la valeur de cette intégrale.*

Si l'on a pour x *infini*

$$\Psi(x) = O[\log x],$$

et, quel que soit k *positif,*

$$\frac{\Psi(kx)}{\log kx} - \frac{\Psi(x)}{\log x} = o\left[\frac{1}{\log x}\right], \tag{40}$$

cette dernière relation ayant lieu uniformément par rapport à k *pour* $1 \leq k \leq 1 + h$ (9), *alors on a* (44) *et, quel que soit l'ensemble* E *de nombres réels supérieurs à* a, *supposé non borné supérieurement, on a* (42).

1° Les hypothèses faites sur $\Psi(x)$ entraînent, d'une part, qu'il existe un nombre positif H et un nombre réel x_0 supérieur à a, et que l'on peut supposer supérieur à 1, tel que, pour $x \geq x_0$, $\left|\frac{\Psi(x)}{\log x}\right| \leq H$, d'autre part, qu'à tout ε positif correspond un nombre réel $X_0(\varepsilon)$, que l'on peut supposer $\geq \mathrm{Max}(x_0, 1 + h)$, tel que, pour $x \geq X_0(\varepsilon)$ et $1 \leq k \leq 1 + h$,

$$\left|\frac{\Psi(kx)}{\log kx} - \frac{\Psi(x)}{\log x}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\log x}.$$

Notons qu'en multipliant par $\log kx$, qui est > 0 puisque $x > 1$ et $k \geq 1$, cette inégalité donne

$$\left|\Psi(kx) - \Psi(x) - \Psi(x)\frac{\log k}{\log x}\right| \leq \varepsilon\left[1 - \frac{\log k}{\log x}\right] \leq 2\varepsilon,$$

d'où

$$\Psi(kx) - \Psi(x) \leq \left|\frac{\Psi(x)}{\log x}\right| \log k + 2\varepsilon \leq H \log k + 2\varepsilon.$$

2° Ceci étant, donnons-nous une suite de nombres réels croissants $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ satisfaisant à

$$t_1 > a, \qquad \lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = 1,$$

puis définissons une fonction $s_1(t)$, pour $t \geq 0$, de la façon suivante :

pour $0 \leq t < t_1$,

$$s_1(t) = 0,$$

(9) Ceci veut dire que, quand x tend vers $+\infty$, le produit du premier membre par $\log x$ tend vers zéro *uniformément*.

pour $t_n \leq t < t_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

$$s_1(t) = \Psi(t_n) + C\frac{\Psi(t_n)}{\log t_n}.$$

Il est clair que $s_1(t)$ *est mesurable et bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$.

On va voir que *l'on a pour t infini*

$$s_1(t) = \Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} + o[1]. \tag{45}$$

En effet, on a pour $t_n \leq t < t_{n+1}$:

$$\Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} - s_1(t) = \Psi(t) - \Psi(t_n) + C\left[\frac{\Psi(t)}{\log t} - \frac{\Psi(t_n)}{\log t_n}\right],$$

d'où

$$\left|\Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} - s_1(t)\right| \leq |\Psi(t) - \Psi(t_n)| + |C|\left|\frac{\Psi(t)}{\log t} - \frac{\Psi(t_n)}{\log t_n}\right|.$$

Mais, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que l'on ait pour $n \geq N(\varepsilon)$:

$$t_n \geq X_0(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \frac{t_{n+1}}{t_n} \leq \operatorname{Min}[1 + h, e^{\frac{\varepsilon}{H}}].$$

Alors on a, pour $t \geq t_{N(\varepsilon)}$,

$$\left|\Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} - s_1(t)\right| \leq \varepsilon\left[3 + \frac{|C|}{\log(1+h)}\right];$$

car, si $t \geq t_{N(\varepsilon)}$, il existe un entier $n \geq N(\varepsilon)$ tel que $t_n \leq t < t_{n+1}$, et l'on a

$$t_n \geq X_0(\varepsilon), \qquad 1 \leq \frac{t}{t_n} \leq 1 + h \qquad \text{et} \qquad \frac{t}{t_n} \leq e^{\frac{\varepsilon}{H}},$$

d'où

$$|\Psi(t) - \Psi(t_n)| \leq H \log\frac{t}{t_n} + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

et

$$\left|\frac{\Psi(t)}{\log t} - \frac{\Psi(t_n)}{\log t_n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\log t_n} \leq \frac{\varepsilon}{\log(1+h)}.$$

On a d'autre part

$$w_{s_1}(\lambda) \leq H \log \lambda.$$

Il suffit de le montrer pour $1 < \lambda \leq 1 + h$, puisque, quels que soient λ réel > 1 et p entier ≥ 1,

$$w_{s_1}(\lambda^p) \leq p\, w_{s_1}(\lambda).$$

Posons

$$s_1(t) = \Psi(t) + C\frac{\Psi(t)}{\log t} + \eta(t) \qquad (t > a).$$

Quels que soient t et $t' > a$, on a

$$|s_1(t') - s_1(t)| \leq |\Psi(t') - \Psi(t)| + |C|\left|\frac{\Psi(t')}{\log t'} - \frac{\Psi(t)}{\log t}\right| + |\eta(t')| + |\eta(t)|.$$

On voit donc que, si $t \geq t_{N(\varepsilon)}$ et $t \leq t' \leq \lambda t$,

$$s_1(t') - s_1(t) \leq [H \log\lambda + 2\varepsilon] + \frac{C\,\varepsilon}{\log(1+h)} + 2\varepsilon\left[3 + \frac{|C|}{\log(1+h)}\right].$$

Autrement dit, pour $t \geq t_{N(\varepsilon)}$,

$$W_{s_1}(t, \lambda) \leq H \log\lambda + \varepsilon\left[8 + \frac{3|C|}{\log(1+h)}\right].$$

3° Puisque $\varpi_{s_1}(\lambda) < +\infty$ et que $F(t)\log t$ est supposée sommable sur $(0, +\infty)$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s_1(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$.

On va voir que, si l'on désigne la valeur de cette intégrale par $\Psi_1(x)$, la différence $\Psi(x) - \Psi_1(x)$ tend vers zéro pour x infini.

On a d'abord

$$\Psi_1(x) - s_1(x) = \int_0^{+\infty} x\psi(xt, x)[s_1(xt) - s_1(x)]\, dt,$$

et la fonction sous le signe $\int$ est de module au plus égal à la fonction sommable $F(t)[H_1|\log t| + K_1]$, H_1 et K_1 étant deux constantes positives.

Si une suite $\{x_n\}$ tend vers $+\infty$, et si $\frac{\Psi(x_n)}{\log x_n}$ tend vers une limite finie, soit φ, (40) et (45) montrent que $s_1(x_n t) - s_1(x_n)$ tend vers $\varphi \log t$.

Alors $x_n\psi(x_n t, x_n)[s_1(x_n t) - s_1(x_n)]$ tend vers $\varphi N(t)\log t$ et $\Psi_1(x_n) - s_1(x_n)$ tend vers $-\varphi C$.

Par suite $\Psi_1(x_n) + C\frac{\Psi(x_n)}{\log x_n} - s_1(x_n)$ tend vers zéro.

Comme, de toute suite de valeurs de x tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite satisfaisant à la condition indiquée, on voit que $\Psi_1(x) + C\frac{\Psi(x)}{\log x} - s_1(x)$ tend vers zéro pour x infini. En tenant compte de (45), on en déduit que $\Psi_1(x) - \Psi(x)$ tend vers zéro.

4° Posons maintenant

$$s_2(t) = s(t) - s_1(t).$$

On voit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x) s_2(t)\, dt$ est convergente pour $x > a$ et égale à $\Psi(x) - \Psi_1(x)$. Elle tend donc vers zéro pour x infini.

On pourra lui appliquer le théorème 6, car $\varpi_{s_2}(\lambda) < +\infty$.

En effet, l'égalité

$$s_2(t') - s_2(t) = [s(t') - s(t)] - [s_1(t') - s_1(t)] \tag{46}$$

montre que, quels que soient $t > 0$ et $\lambda > 1$,

$$W_{s_2}(t, \lambda) \leq W_s(t, \lambda) + W_{s_1}(t, \lambda).$$

Il en résulte que, quel que soit l'ensemble de nombres positifs E, non borné supérieurement,

$$\varpi'_{s_2}(E, \lambda) \leq \varpi'_s(E, \lambda) + w_{s_1}(E, \lambda) \leq \varpi'_s(E, \lambda) + H \log\lambda. \tag{47}$$

En particulier, en prenant pour E l'ensemble de tous les nombres positifs, on a

$$\varpi_{s_2}(\lambda) \leq \varpi_s(\lambda) + H \log\lambda. \tag{48}$$

Le théorème 6 donne

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} |s_2(x)| \leq \varpi_{s_2}(1+o) \tag{49}$$

et, quel que soit l'ensemble E de nombres réels $> a$, supposé non borné supérieurement,

$$-\varpi''_{s_2}(E, 1+o) \leq \underline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} s_2(x) \leq \overline{\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}}} s_2(x) \leq \varpi'_{s_2}(E, 1+o). \tag{50}$$

Comme, pour x infini,

$$s_2(x) = s(x) - s_1(x) = s(x) - \Psi(x) - C\frac{\Psi(x)}{\log x} + o[1],$$

on peut remplacer dans (49) et (50) $s_2(x)$ par $s(x) - \Psi(x) - C\frac{\Psi(x)}{\log x}$.

D'autre part, (48) donne $\varpi_{s_2}(1+o) \leq \varpi_s(1+o)$, (47) donne

$$\varpi'_{s_2}(E, 1+o) \leq \varpi'_s(E, 1+o).$$

De plus (46) montre aussi que

$$\Pi''_{s_2}(t, \lambda) \leq \Pi''_s(t, \lambda) + \operatorname{Sup}_{\frac{t}{\lambda} \leq t' \leq t} W_{s_1}(t', \lambda),$$

d'où résulte

$$\varpi''_{s_2}(E, \lambda) \leq \varpi''_s(E, \lambda) + w_{s_1}(\lambda) \leq \varpi''_s(E, \lambda) + H \log\lambda,$$

et par suite

$$\varpi''_{s_2}(E, 1+o) \leq \varpi''_s(E, 1+o).$$

On peut donc remplacer aussi dans (49) et (50) $\varpi_{s_2}(1+o)$ par $\varpi_s(1+o)$, $\varpi'_{s_2}(E, 1+o)$ par $\varpi'_s(E, 1+o)$, et $\varpi''_{s_2}(E, 1+o)$ par $\varpi''_s(E, 1+o)$.

Ainsi, on obtient bien (44) et (42).

1.14. Remarquons que la relation (40) est vérifiée si, pour x infini,

$$\Psi(x) = \rho(x) \log x + \gamma + o[1], \tag{51}$$

γ étant une constante, et $\rho(x)$ une fonction définie pour x positif assez grand et satisfaisant, quel que soit $k > 0$, à

$$\rho(kx) - \rho(x) = o\left[\frac{1}{\log x}\right]. \tag{52}$$

Si, de plus (52) est satisfaite uniformément par rapport à k pour $1 \leq k \leq 1+h$, il en est de même de (40), et si $\rho(x) = O[1]$, on a $\Psi(x) = O[\log x]$.

Lorsque l'on a (51), on a pour x infini

$$\Psi(x) + C\frac{\Psi(x)}{\log x} = \rho(x)[\log x + C] + \gamma + o[1]$$

et l'on peut remplacer $\Psi(x) + C\frac{\Psi(x)}{\log x}$ par $\rho(x)[\log x + C] + \gamma$ dans (41), (42), (43) et (44).

Si, de plus, $\varpi_s(1+0) = 0$, (43) devient

$$s(x) = \rho(x)[\log x + C] + \gamma + o[1] \qquad (x \to +\infty),$$

et il en est de même de (44) si $\varpi_s(1+0) = 0$.

1.15. La démonstration du théorème 10 se simplifie dans le cas particulier où $\psi(t, x) = \frac{1}{x}N\left(\frac{t}{x}\right)$, en même temps que les hypothèses sur le comportement de $\Psi(x)$ peuvent être un peu affaiblies, grâce au théorème suivant qui permet de se ramener au théorème 9 :

THÉORÈME 11. — *Supposons que* $\psi(t, x) = \frac{1}{x}N\left(\frac{t}{x}\right)$ *et que* $N(u)$ *soit réel* ≥ 0.

Supposons, de plus, que $s(t)$ *soit réelle et satisfasse à* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *et que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ *soit convergente pour* $x > 0$, *et désignons par* $\Psi(x)$ *la valeur de cette intégrale.*

Si l'on sait qu'il existe trois nombres positifs M, h *et* x_0 *tels que, pour* $x \geq x_0$ *et* $1 \leq k \leq 1+h$,

$$\Psi(kx) - \Psi(x) \leq M,$$

on peut affirmer que $\varpi_s(\lambda) < +\infty$ ([10]).

Nous observons d'abord que $\Pi_s(t, 1+h)$ est bornée pour $t > 0$ quelconque par un nombre positif Ω, puisqu'elle est manifestement bornée pour $s \leq L$, avec $L > 0$ quelconque, et que sa plus grande limite pour t infini a une valeur finie. Alors, quels que soient t et t' satisfaisant à $0 < t \leq t' \leq (1+h)t$, on a

$$s(t') - s(t) \geq -\Omega.$$

D'autre part, on peut évidemment trouver deux nombres α et β satisfaisant à

$$0 < \alpha < \beta, \qquad \frac{\beta}{\alpha} < 1+h \qquad \text{et} \qquad \int_\alpha^\beta N(t)\, dt > 0 \qquad [\text{c'est-à-dire } K(\alpha) - K(\beta) > 0].$$

([10]) Ce théorème est, à de légères modifications près, un lemme donné par Karamata dans [5], p. 182. Notre démonstration suit exactement celle de Karamata.

Ceci étant, nous allons montrer que, si $u \geq \beta x_0$ et $u \leq u' \leq (1+h)\frac{\alpha}{\beta}u$,

$$|s(u') - s(u)| \leq \frac{M+\Omega}{K(\alpha) - K(\beta)} + \Omega = W,$$

c'est-à-dire que, pour $t \geq \beta x_0$, $W_s\left[t, \frac{\alpha}{\beta}(1+h)\right] \leq W$, d'où il résultera que

$$w_s\left[\frac{\alpha}{\beta}(1+h)\right] \leq W.$$

D'après ce que l'on vient de dire, on a

$$s(u') - s(u) \geq -\Omega;$$

il suffira donc de montrer que

$$s(u') - s(u) \leq \frac{M+\Omega}{K(\alpha) - K(\beta)} + \Omega. \tag{53}$$

En remarquant que

$$\Psi(x) = \int_0^{+\infty} N(t)\, s(xt)\, dt,$$

on peut écrire

$$\Psi\left(\frac{u'}{\alpha}\right) - \Psi\left(\frac{u}{\beta}\right) + \Omega = \int_0^{+\infty} N(t)\left[s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right) - s\left(\frac{u}{\beta}t\right) + \Omega\right] dt. \tag{54}$$

Comme $\frac{u}{\beta}t < \frac{u'}{\alpha}t \leq (1+h)\frac{u}{\beta}t$, on a

$$s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right) - s\left(\frac{u}{\beta}t\right) \geq -\Omega,$$

et par suite la fonction sous le signe $\int$ au second membre de (54) est ≥ 0. L'intégrale de 0 à $+\infty$ est donc au moins égale à l'intégrale de α à β.

D'autre part, comme

$$\frac{u}{\beta} \geq x_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{u}{\beta} < \frac{u'}{\alpha} \leq (1+h)\frac{u}{\beta},$$

on a

$$\Psi\left(\frac{u'}{\alpha}\right) - \Psi\left(\frac{u}{\beta}\right) < M.$$

On peut donc écrire

$$M + \Omega \geq \int_\alpha^\beta N(t)\left[s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right) - s\left(\frac{u}{\beta}t\right) + \Omega\right] dt. \tag{55}$$

Remarquons maintenant que, pour $\alpha \leq t \leq \beta$, l'on a

$$u' \leq \frac{u'}{\alpha}t < (1+h)u' \qquad \text{et} \qquad \frac{u}{\beta}t \leq u < (1+h)\frac{u}{\beta}t,$$

de sorte que

$$s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right) - s(u') \geqq -\Omega \qquad \text{et} \qquad s(u) - s\left(\frac{u}{\beta}t\right) \geqq -\Omega,$$

d'où

$$s\left(\frac{u'}{\alpha}t\right) - s\left(\frac{u}{\beta}t\right) + \Omega \geqq s(u') - s(u) - \Omega.$$

(55) donne alors

$$M + \Omega \geqq |K(\alpha) - K(\beta)|\,|s(u') - s(u) - \Omega|,$$

d'où l'on tire (53).

1.15.1. En combinant les théorèmes 9 et 11, on obtient l'énoncé suivant :

THÉORÈME 10*a*. — *Supposons que* $\psi(t, x) = \frac{1}{x}N\left(\frac{t}{x}\right)$, *que* $N(u)$ *soit réel* $\geqq 0$ *et que* $N(t)\log t$ *soit sommable sur l'intervalle* $(0, +\infty)$.

Supposons, d'autre part, que $s(t)$ *soit réelle et satisfasse à* $\varpi_s(\lambda) < +\infty$, *et que l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$ *soit convergente pour* $x > 0$. *Désignons par* $\Psi(x)$ *la valeur de cette intégrale.*

Si, quel que soit $k > 0$, *on a pour* x *infini*

$$\frac{\Psi(kx)}{\log kx} - \frac{\Psi(x)}{\log x} = o\left[\frac{1}{\log x}\right], \tag{40}$$

et s'il existe trois nombres positifs x_0, h *et* M *tels que, pour* $x \geqq x_0$ *et* $1 \leqq k \leqq 1 + h$, $\Psi(kx) - \Psi(x) \leqq M$, *alors on a* (44) *et, quel que soit l'ensemble de nombres positifs* E, *non borné supérieurement, on a* (42) [11].

Il faut noter que les hypothèses faites ici sur $\Psi(x)$ sont satisfaites lorsque celles faites dans le théorème 10 le sont, puisque nous avons montré que ces dernières entraînent que, pour $x \geqq X_0(\varepsilon)$ et $1 \leqq k \leqq 1 + h$,

$$|\Psi(kx) - \Psi(x)| \leqq H\log k + 2\varepsilon \leqq H\log(1 + h) + 2\varepsilon.$$

1.16. Remarquons que, *dans tous les énoncés des théorèmes de ce Chapitre où figure l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)dt$, *on pourrait remplacer cette intégrale par* $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$, *en ajoutant l'hypothèse que* $s(t)$ *est à variation bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$ *et nulle pour* $t = 0$.

---

(11) Nous avons énoncé ce théorème dans notre Note [2].

En effet, dans les théorèmes 1, 2 et 4, on suppose $s(t)$ bornée; dans le théorème 9 on suppose que $\omega_3(\lambda) < +\infty$ et que $F(t)\log t$ est sommable sur l'intervalle $(0+\infty)$; dans le théorème 5, on suppose que $\omega_3(\lambda) < +\infty$ et que $x\psi(xt, x)\log t$ est sommable sur $(1, +\infty)$. Nous savons que, dans chaque cas, si, en plus de ces hypothèses, $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ est convergente pour $x > a$, comme $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)s(t)\,dt$, et est égale à celle-ci.

Enfin, dans les théorèmes 6, 10, 11 et $10a$, on suppose $\psi(t, x) \geq 0$. On sait que, si $s(t)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ et nulle pour $t = 0$, la convergence de $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\,ds(t)$ entraine celle de $\int_0^{+\infty} x\psi(t, x)s(t)\,dt$ avec la même valeur.

II. — Théorème, des deux types, dans leur cas général.

2. 1. Nous allons indiquer maintenant comment on peut, à partir des énoncés de notre premier Mémoire et du Chapitre précédent, en obtenir de plus généraux.

Soit $\psi(t, x)$ une fonction réelle ou complexe définie pour t réel ≥ 0 et x appartenant à un certain ensemble de nombres réels $\mathfrak{E}$, et supposons que, pour x fixé, $\psi(t, x)$ soit une fonction de t sommable sur l'intervalle $(0, +\infty)$.

Soit, d'autre part, $s(t)$ une fonction réelle ou complexe définie pour t réel ≥ 0, mesurable et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$.

Soit alors $V(\tau)$ une fonction réelle définie pour τ réel ≥ 0, continue et possédant une dérivée continue pour ces valeurs, avec $V'(\tau) > 0$, et qui croît de 0 à $+\infty$ quand τ croît de 0 à $+\infty$, et soit $\Lambda(t)$ la fonction inverse de $V(\tau)$, qui possédera évidemment les mêmes propriétés.

Soit encore $\eta_i(y)$ une fonction définie pour y réel supérieur à un certain nombre a positif ou nul, prenant ses valeurs sur l'ensemble $\mathfrak{E}$ et tendant vers x_0 quand y tend vers $+\infty$.

Quel que soit $y > a$ et quel que soit $L > 0$, on a

$$\int_0^L \psi[t, \eta_i(y)]\,s(t)\,dt = \int_0^{\Lambda(L)} \psi^*(\tau, y)\,\sigma(\tau)\,d\tau,$$

avec

$$\psi^*(\tau, y) = \psi[V(\tau), \eta_i(y)]\,V'(\tau),$$

et

$$\sigma(\tau) = s[V(\tau)].$$

Donc, toutes les fois que l'une des intégrales $\int_0^{+\infty} \psi[t, \eta(y)]\, s(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} \psi^*(\tau, y)\, \sigma(\tau)\, d\tau$ est convergente, l'autre l'est aussi et lui est égale.

Ceci étant, à chacun des théorèmes donnés dans notre premier Mémoire ou dans le Chapitre précédent relativement à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$, on fera correspondre un nouvel énoncé obtenu de la façon suivante :

Outre les hypothèses mentionnées plus haut sur $\psi(t, x)$ et $s(t)$, on supposera qu'il existe deux fonctions $V(\tau)$ et $\eta(y)$, possédant les propriétés que nous avons indiquées, telles que la fonction $\psi^*(\tau, y)$ définie par (56) satisfasse aux conditions imposées à $\psi(t, x)$ dans le théorème considéré, puis, en supposant ces deux fonctions fixées, on appliquera ce théorème à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi^*(\tau, y)\, \sigma(\tau)\, d\tau$, où $\sigma(\tau)$ est donnée par (57), en traduisant les hypothèses à faire sur $\sigma(\tau)$, et éventuellement sur le comportement de cette intégrale, et la conclusion, au moyen de $s(t)$ et $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$.

2.1.1. Nous laissons au lecteur le soin de former ainsi les différents énoncés correspondant à ceux de notre premier Mémoire et du Chapitre précédent.

Bornons-nous à donner quelques indications :

Le fait que la fonction $\psi^*(\tau, y)$ définie par (56) satisfait aux hypothèses (1), (3), et (4) indiquées au paragraphe 3.1 de notre premier Mémoire et au paragraphe 1.1 de celui-ci se traduit de la façon suivante :

α. Pour chaque $y > a$,

$$\int_0^{+\infty} \psi[t, \eta(y)]\, dt = 1 \quad (12),$$

β. Il existe une fonction positive ou nulle $F(\tau)$ sommable sur $(0, +\infty)$ et telle que l'on ait quel que soit $y > a$

$$|y\psi[V(y\tau), \eta(y)]\, V'(y\tau)| \leq F(\tau),$$

γ. Quand y tend vers $+\infty$, $y\psi[V(y\tau), \eta(y)]\, V'(y\tau)$ tend vers une fonction limite $N(\tau)$.

Pour simplifier, on pourra remplacer (α) par

(12) L'hypothèse que $\psi^*(\tau, y)$ est une fonction de τ sommable sur $(0, +\infty)$ est automatiquement satisfaite du fait que $\psi(t, x)$ est une fonction de t sommable sur cet intervalle.

(α'). Pour chaque x de $\mathcal{E}$,

$$\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, dt = 1 \quad (13).$$

De même, s'il y a lieu, l'hypothèse que $\psi[t, \eta(y)]$ est réelle (ou bien réelle ≥ 0), qui exprimerait le fait que $\psi^*(\tau, y)$ est réelle (ou réelle ≥ 0), pourra être remplacée par celle que $\psi(t, x)$ est réelle (ou réelle ≥ 0).

L'hypothèse que $\sigma(\tau)$ est mesurable et bornée sur tout intervalle fini $[0, L]$ est déjà contenue dans celle qu'il en est ainsi de $s(t)$.

Lorsque l'on a à faire l'hypothèse que $\sigma(\tau)$ est réelle, elle se traduit par celle que $s(t)$ est réelle.

De même pour l'hypothèse que $\sigma(\tau)$ est bornée.

Pour traduire les autres hypothèses que l'on peut avoir à faire sur $\sigma(\tau)$, on se rappellera que l'on a

$$w_\sigma(\lambda) = w_{s,\Lambda}(\lambda)$$

et, si $s(t)$ est réelle,

$$\varpi_\sigma(\lambda) = \varpi_{s,\Lambda}(\lambda),$$

et que

$$\delta_\sigma[\Lambda(t)] = \delta_{s,\Lambda}(t),$$

de sorte que

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} |\delta_\sigma(t)| = \overline{\lim_{t \to +\infty}} |\delta_{s,\Lambda}(t)|.$$

Lorsque la conclusion du théorème appliqué à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi^*(\tau, y)\, \sigma(\tau)\, d\tau$ sera une inégalité portant sur les valeurs limites pour y tendant vers $+\infty$ d'une expression de la forme $\sigma(y) - G(y)$, on pourra remarquer que ces valeurs limites sont les mêmes que celles de $s(t) - G[\Lambda(t)]$ pour t tendant vers $+\infty$, puisque

$$s(t) - G[\Lambda(t)] = \sigma[\Lambda(t)] - G[\Lambda(t)].$$

Si l'on a une inégalité portant sur les valeurs limites de $\sigma(y) - G(y)$ pour y tendant vers $+\infty$ en restant sur un certain ensemble de nombres réels $> a$, il y aura intérêt à l'appliquer à l'ensemble $\Lambda(E)$, où E sera supposé être un ensemble donné de nombres réels supérieurs à $V(a)$, non borné supérieurement. Les valeurs limites de $\sigma(y) - G(y)$ pour y tendant vers $+\infty$ sur $\Lambda(E)$ seront les mêmes que celles de $s(t) - G[\Lambda(t)]$ pour t tendant vers $+\infty$ sur E.

On se rappellera, d'autre part, que l'on a

$$w_\sigma[\Lambda(E), \lambda] = w_{s,\Lambda}(E, \lambda)$$

---

(13) Il est clair que l'hypothèse (α') est plus restrictive que (α) si $\eta(y)$ ne prend pas pour valeurs ous les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$.

et, si $s(t)$ est réelle,

$$\varpi'_\sigma[\Lambda(E), \lambda] = \varpi'_{s,\Lambda}(E, \lambda) \qquad \text{et} \qquad \varpi''_\sigma[\Lambda(E), \lambda] = \varpi''_{s,\Lambda}(E, \lambda).$$

2.1.2. Les théorèmes transformés des théorèmes 3 et 5 de notre premier Mémoire fournissent les énoncés auxquels nous avons fait allusion dans son introduction qui donnent comme corollaire le théorème inverse relatif à la condition de convergence (1) ou (2) (14).

Les théorèmes transformés des théorèmes 5 et 9 du présent Mémoire fournissent des énoncés qui donnent comme corollaire le théorème inverse relatif à la condition de convergence (3) (15).

Les théorèmes transformés des théorèmes 6 et 10 fournissent des énoncés qui donnent comme corollaire le théorème inverse relatif à la condition de convergence (4) (16).

2.1.3. *Dans chacun des énoncés considérés ici*, de même que dans ceux considérés précédemment, *on pourrait remplacer l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ *par* $\int_0^{+\infty} \varphi(t, x)\, ds(t)$, *où* $\varphi(t, x)$ *est la fonction définie par*

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du,$$

en ajoutant l'hypothèse que $s(t)$ *est à variation bornée sur tout intervalle fini* $[0, L]$ *et nulle pour* $t = 0$.

---

(14) Les conditions de convergence (1), (2), (3), (4) mentionnées dans ce paragraphe sont celles indiquées dans l'introduction de notre premier Mémoire.

(15) En effet, les hypothèses sur $s(t)$ et sur le comportement de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(t, x)\, s(t)\, dt$ qui figurent dans ces théorèmes sont satisfaites si l'on a la condition de convergence (3) et si l'intégrale tend vers S quand x tend vers x_0, et la conclusion devient alors que $s(t)$ tend vers S quand t tend vers $+\infty$.

On peut noter, de plus, que nos hypothèses sur le noyau $\psi(t, x)$ sont un peu moins restrictives que celles données par Karamata dans [7] (th. B, p. 28), d'une part parce que nous ne supposons pas ce noyau réel ≥ 0, d'autre part parce que nous supposons

$$\int_1^{+\infty} |\psi^*(\tau, y)| \log \tau\, d\tau = O[1] \qquad (y \to +\infty),$$

tandis que Karamata suppose

$$\int_0^{+\infty} \psi^*(\tau, y) \log \tau\, d\tau = O[1].$$

[Au contraire, dans les théorèmes transformés des théorèmes 3 et 5 de notre premier Mémoire, nos hypothèses sur $\psi(t, x)$ sont un peu plus restrictives que celles de Karamata, du moins si l'on se restreint au cas où $\psi(t, x)$ est réel ≥ 0, car nous supposons $F(\tau) \log \tau$ sommable sur $(0, +\infty)$].

(16) Ici encore, nos hypothèses sur le noyau $\psi(t, x)$ sont un peu moins restrictives que celles de Karamata.

En effet, chaque fois que nous avons appliqué un théorème de notre premier Mémoire ou du Chapitre précédent à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi^*(\tau, y)\sigma(\tau)d\tau$, nous aurions pu remplacer cette intégrale par $\int_0^{+\infty} \varphi^*(\tau, y)\, d\sigma(\tau)$, avec $\varphi^*(\tau, y) = \int_\tau^{+\infty} \psi^*(u, y)\, du$, en ajoutant l'hypothèse que $\sigma(\tau)$ est à variation bornée sur tout intervalle fini et nulle pour $\tau = 0$.

Cette dernière hypothèse se traduit par la même hypothèse sur $s(t)$.

D'autre part, on voit que, si

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du,$$

on a

$$\varphi^*(\tau, y) = \varphi[V(\tau), \eta(y)],$$

de sorte que les intégrales $\int_0^{+\infty} \varphi^*(\tau, y)\, d\sigma(\tau)$ et $\int_0^{+\infty} \varphi[t, \eta(y)]\, ds(t)$ sont convergentes ou divergentes en même temps et sont égales lorsqu'elles sont convergentes.

2.2. On peut aussi faire correspondre à chacun des théorèmes 4 et 6 de notre premier Mémoire et 7 et 8 de celui-ci, où figure la série $\sum_0^{+\infty} u_n$, un nouvel énoncé obtenu de la façon suivante :

Outre les hypothèses sur $\psi(t, x)$ mentionnées au début du paragraphe 2.1, *on suppose qu'il existe deux fonctions $V(\tau)$ et $\eta(y)$ possédant les propriétés indiquées dans ce paragraphe, telles que la fonction $\psi^*(\tau, y)$ définie par* (56) *satisfasse aux conditions imposées à $\psi(t, x)$ dans le théorème considéré. Puis, ces deux fonctions étant supposées fixées, et étant entendu que $\varphi(t, x)$ est la fonction définie par*

$$\varphi(t, x) = \int_t^{+\infty} \psi(u, x)\, du,$$

on considère encore une suite de nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ satisfaisant à

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$$

et une suite de nombres réels ou complexes $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, et l'on transcrit les hypothèses du théorème considéré, autres que celles sur $\psi(t, x)$, et les conclusions de ce théorème, en y remplaçant λ_n par $\Lambda_n = \Lambda(\lambda_n)$ partout sauf dans $\varphi(\lambda_n, x)$ et $\varphi(\lambda_{n+1}, x)$, et x par $\eta(y)$ dans ces deux dernières expressions et par y partout ailleurs.

La légitimité de cette façon de faire résulte de ce que, si l'on pose, comme au paragraphe 2.1.3,

$$\varphi^*(\tau, y) = \int_{\tau}^{+\infty} \psi^*(u, y)\, du,$$

on a

$$\varphi^*(\Lambda_n, y) = \varphi[\lambda_n, \eta(y)].$$

Dans la conclusion des théorèmes correspondant ainsi aux théorèmes 4 et 6 de notre premier Mémoire, on peut évidemment remplacer

$$\overline{\lim_{y \to +\infty}} \left| S\left(\frac{y}{\alpha}\right) - \sum_{\Lambda_n \leq y} u_n \right|$$

par

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \left| S\left[\frac{\Lambda(t)}{\alpha}\right] - \sum_{\lambda_n \leq t} u_n \right| \quad (17).$$

D'autre part, dans le théorème correspondant au théorème 7 du présent Mémoire, on peut remplacer l'hypothèse que la somme commune des séries

$$\sum_0^{+\infty} \varphi[\lambda_n, \eta(y)]\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_0^{+\infty} \{\varphi[\lambda_n, \eta(y)] - \varphi[\lambda_{n+1}, \eta(y)]\}\, S_n$$

tend vers S quand y tend vers $+\infty$ par celle que la somme de l'une des séries

$$\sum_0^{+\infty} \varphi(\lambda_n, x)\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]\, S_n,$$

supposée convergente pour x appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$, tend vers S quand x tend vers x_0.

De même, dans le théorème correspondant au théorème 8, on peut remplacer l'hypothèse que l'une des séries

$$\sum_0^{+\infty} \varphi[\lambda_n, \eta(y)]\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_0^{+\infty} \{\varphi[\lambda_n, \eta(y)] - \varphi[\lambda_{n+1}, \eta(y)]\}\, S_n$$

converge pour $y > a$ et que sa somme tend vers S quand y tend vers $+\infty$ par celle que l'une des séries

$$\sum_0^{+\infty} \varphi[\lambda_n, x]\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_0^{+\infty} [\varphi(\lambda_n, x) - \varphi(\lambda_{n+1}, x)]\, S_n$$

---

(17) Il faut bien noter ici que $S(y)$ désigne la somme commune des séries

$$\sum_0^{+\infty} \varphi[\lambda_n, \eta(y)]\, u_n \quad \text{et} \quad \sum_0^{+\infty} \{\varphi[\lambda_n, \eta(y)] - \varphi[\lambda_{n+1}, \eta(y)]\}\, S_n.$$

converge pour x appartenant à $\mathcal{E}$ et que sa somme tend vers S quand x tend vers x_0.

Naturellement, les théorèmes obtenus ainsi pourraient tout aussi bien être obtenus comme corollaires des théorèmes correspondant comme il a été dit plus haut aux théorèmes 3 et 5 de notre premier Mémoire et 5 et 6 de celui-ci.

Bibliographie.

[1] Ananda-Rau, *On the converse of Abel's theorem* (*Journal London Math. Soc.*, vol. 3, n° 11, p. 200-205).

[2] H. Delange, *Théorèmes taubériens généraux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 28-31).

[3] H. Delange, *The converse of Abel's theorem on power series* (*Annals of Math.*, vol. 50, 1949, p. 94-109).

[4] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Notes on the theory of series* (IV) : *On the strong summability of Fourier series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 26, 1927, p. 273-286].

[5] J. Karamata, *Bemerkung zur Note : Über einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren* (*Publ. Math. Univ. de Belgrade*, t. 4, 1935, p. 181-184).

[6] J. Karamata, *Allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren* (*Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansichen Universität*, Bd 12, 1937, p. 48-63).

[7] J. Karamata, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité* (*Actualités scientifiques et industrielles*, t. 450, Hermann, Paris, 1937).

[8] J. E. Littlewood, *The converse of Abel's theorem on power series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. 9, 1911, p. 434-448].

[9] O. Sasz, *Über Dirichletsche Reihen an der Konvergenzgrenze* (*Atti del congresso internazionale dei mathematici*, Bologna 1928, vol. III, p. 269-276).

[10] O. Sasz, *Generalization of two theorems of Hardy and Littlewood on power series* (*Duke Math. Journal*, t. 1, 1935, p. 105-111).

[11] O. Sasz, *Converse theorems of summability for Dirichlet series* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 39, 1936, p. 117-130).

[12] N. Wiener, *Tauberian theorems* [*Annals of Math.*, (2), t. 33, 1932, p. 1-100].

SUR

LE PROBLÈME DE LA GÉNÉRATION

D'UNE

TRANSFORMATION DONNÉE D'UNE COURBE FERMÉE

PAR UNE TRANSFORMATION INFINITÉSIMALE

Par M. Arrigo FINZI (1).

CHAPITRE I.

J'ai achevé ce mémoire pendant la période que j'ai passée à Paris comme chargé de recherches auprès de M. Élie Cartan. Qu'il me soit permis d'exprimer ici au grand géomètre français mes sentiments de vive reconnaissance et de respectueuse admiration.

1. Je considère, sur une courbe fermée C, une transformation finie T, qui possède une inverse, d'équation

$$x_1 = g(x) \qquad \left(\frac{dg(x)}{dx} > 0\right), \tag{1}$$

dépourvue de points invariants, et j'étudie le problème de savoir s'il existe une transformation infinitésimale

$$Xf = \xi(x)\frac{df}{dx}, \tag{2}$$

telle que T fasse partie du groupe g_1 à un paramètre engendré par Xf.

(1) Il m'est très agréable d'exprimer mes remerciments à M. G. Ascoli, professeur à l'Université de Turin, qui, par ses conseils, m'a permis d'améliorer en plusieurs points la rédaction de ce Mémoire.

Il est facile d'indiquer une condition nécessaire pour que le problème soit possible : *Si une puissance* T'' *de* T *laisse invariant un point* P, *elle doit laisser invariant tout autre point de* C (¹). Soit, en effet, T′ une transformation arbitraire du groupe g_1 auquel appartient T; soit P′ le transformé de P par T′. Par les transformations successives T'^{-1}, T'', T′, P′ ira en P, restera en P et reviendra enfin à sa position originaire. Mais T'' et T′ sont échangeables entre elles, on a donc

$$T'T''T'^{-1} = T'';$$

on voit que P′ aussi est invariant par T''.

On peut concevoir trois cas :

1. *Il existe une puissance* T'', *qui laisse invariants tous les points de* C. T *est cyclique.*

2. *Il existe une puissance* T'', *qui laisse invariants quelques-uns seulement des points de* C.

3. *Il n'y a pas de points de* C *invariants pour une puissance quelconque de* T.

Nous dirons que les transformations 1 et 3 sont *régulières*, et que les transformations 2, qui ne satisfont pas à la condition nécessaire donnée, sont *irrégulières*.

On peut attacher à une transformation T un invariant k, le *module* : considérons T comme engendrée par un mouvement continu, qui porte tout point P en son transformé; on pourra considérer, pour une puissance T'', le rapport $\frac{m}{n}$ du nombre m de tours complets de C, que ce point accomplit par T'' à l'exposant n. On définit le module comme la limite de ce rapport quand n croît. Nous verrons au paragraphe 6 que cette limite existe toujours et qu'elle est indépendante du point P considéré. Le module des transformations 1 et 2 est toujours rationnel, celui des transformations 3 est irrationnel.

Nous avons déjà vu que les transformations 2 ne sont engendrées par aucune transformation infinitésimale; on peut facilement démontrer que, au contraire, une *transformation* 1 *admet une infinité* (dépendant du choix arbitraire d'une fonction dans un intervalle) *de transformations infinitésimales qui l'engendrent, dans la seule hypothèse que* $g(x)$ *possède une dérivée continue.*

L'étude des transformations 3 régulières, de module irrationnel, n'a pas le même caractère élémentaire; on peut toutefois démontrer facilement qu'*une transformation* 3 *admet au plus une transformation infinitésimale, qui l'engendre.*

(¹) A. Finzi, *Su una questione posta da S. Lie* (*Rendiconti dell Acc. Naz. dei Lincei*, 1947, 8ᵉ série, vol. 3, p. 185).

Représentons maintenant par

$$\frac{m_\alpha}{n_\alpha} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots - \cfrac{1}{a_{\alpha-1}}}}$$

la $\alpha^{\text{ième}}$ réduite du développement du module d'une transformation T du type 3; on démontre le théorème A : *il y a toujours une transformation infinitésimale, qui engendre une transformation* T *du type* 3 *si la fonction* $g(x)$ *possède une dérivée seconde satisfaisant à la condition de Lipschitz, et si l'on peut choisir un exposant positif* $\lambda < 1$, *de façon que*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_\alpha}{n_\alpha^{\lambda}} = 0. \tag{3}$$

La démonstration est fondée sur la considération des transformations itérées de T.

Il est vraisemblable que la condition (3) concernant le module soit la moins restrictive que l'on puisse donner (1). De toute façon, si l'on ne fait aucune hypothèse concernant la croissance des entiers a_α, on ne peut pas affirmer *a priori* l'existence d'une transformation infinitésimale, qui engendre T; en effet, *pour des valeurs convenables du module, on peut construire des transformations* 3, *représentées par des fonctions admettant des dérivées d'ordre aussi élevé qu'on veut* (*ou même par des fonctions analytiques*), *et auxquelles ne correspond aucune transformation infinitésimale.*

D'ailleurs, pour une transformation T ayant un tel module, même lorsque la transformation infinitésimale correspondante existe, il ne semble pas possible de le reconnaître par un procédé fini et général (2). C'est que, dans le problème de la construction de la fonction $\xi(x)$ à partir de la fonction $g(x)$, il n'y a pas de continuité d'ordre fini, dans le sens du calcul fonctionnel. Mais *la continuité s'introduit lorsqu'on se borne à la considération de transformations ayant un module donné, satisfaisant à la condition* (3).

Un autre point à signaler est le suivant : si, à partir d'une transformation infinitésimale, qui est caractérisée par une fonction $\xi(x)$ ne possédant pas une dérivée première, on remonte par une intégration à une transformation finie T du groupe g_1 qu'elle engendre, on trouve, *en général*, que la fonction $g(x)$, qui caractérise T, ne possède pas une dérivée seconde. Dans le cas du théorème A,

(1) Il serait toutefois bien désirable de le démontrer; on reviendra sur ce point dans le dernier paragraphe de ce Mémoire. De toute façon on démontrera (§ 33) que les nombres irrationnels compris entre 0 et 1, qui ne satisfont pas à la condition (3), constituent un ensemble de mesure nulle.

(2) On est toutefois assuré que T admet une transformation infinitésimale qui l'engendre, lorsqu'on sait qu'elle appartient à une famille ∞^1 de transformations régulières, satisfaisant à certaines conditions.

au contraire, on part d'une fonction $g(x)$, qui possède une dérivée seconde et l'on arrive à une fonction $\xi(x)$, dont nous n'avons pas démontré qu'elle possède une dérivée première. *La question se poserait alors de savoir si cette dérivée première existe* en réalité; je ne sais pas toutefois si à cette question on doit répondre par l'affirmative.

On pourrait peut-être tâcher de démontrer le théorème A sous des conditions moins restrictives concernant la fonction $g(x)$. Cela ne semble toutefois guère facile; de toute façon la méthode employée ici devrait être complètement abandonnée.

Il serait aussi intéressant de savoir si, en admettant l'existence de dérivées d'ordre supérieur pour $g(x)$, il s'ensuit l'existence de dérivées pour $\xi(x)$.

On peut enfin considérer une transformation T *arbitraire*, qui soit représentée par une fonction $g(x)$, dont la dérivée seconde satisfait à la condition de Lipschitz, et poser le problème de savoir si cette transformation appartient au type 1 ou 2 ou bien si elle a un module irrationnel et admet une transformation infinitésimale, qui l'engendre (type 3'), ou enfin si elle a un module irrationnel, mais n'est engendrée par aucune transformation infinitésimale (type 3''). On peut répondre que, *les transformations* 1 *et* 3'' *étant exceptionnelles, une transformation arbitraire peut appartenir ou bien au type* 2 *ou bien au type* 3'.

D'une façon plus précise, soit

$$x_1 = g(x, \theta),$$

une famille de transformations dépendant d'un paramètre θ et choisie de façon arbitraire, à part quelques conditions qu'il est inutile de préciser ici; on démontre le théorème B :

L'ensemble des valeurs de θ, *qui correspond à des transformations* 1, *est vide; l'ensemble qui correspond à des transformations* 3'' *a une mesure nulle; les deux ensembles, qui correspondent aux transformations* 2 *et* 3', *ont une mesure différente de zéro.*

La démonstration du théorème B utilise le théorème A.

Le travail actuel n'est pas sans relation avec la belle théorie des transformations d'une courbe, due à Poincaré et à Denjoy (1). La notion de module avait été implicitement introduite par Poincaré; on doit à M. Denjoy un résultat

(1) H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, (*Œuvres complètes*, t. I, p. 137-158); A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore* (*J. Math. pures et appliquées*, t. 11, 1932, p. 333). On pourra aussi consulter à propos des questions traitées dans ce Mémoire, et pour des informations bibliographiques, une Note de M. Hadamard, *Two works on iteration and related questions.* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 50, 1944, p. 67).

que nous utiliserons pour démontrer le théorème A. On ne fera pas ici un exposé complet de cette théorie, mais on donnera, au Chapitre II, une démonstration du résultat de M. Denjoy.

Il n'est pas peut-être sans intérêt de remarquer que le problème traité dans les Mémoires de Poincaré et de M. Denjoy est au fond celui de l'équivalence d'une transformation T à une translation,

$$x_1 = x + k,$$

par rapport au groupe des transformations biunivoques de C, qui sont représentées par une fonction continue; le problème traité ici est celui de l'équivalence par rapport au groupe plus restreint des transformations biunivoques représentées par une fonction continue et douée d'une dérivée continue et positive.

Notre Mémoire est divisé en quatre Chapitres : les deux premiers servent d'introduction; au Chapitre III on donne la démonstration du théorème A; au Chapitre IV on construit des transformations $\mathfrak{Z}''$ et l'on démontre le théorème B.

2. x étant l'abscisse sur la courbe C, nous admettons qu'à un tour complet de la courbe correspond l'intervalle unitaire de l'abscisse : alors aux deux valeurs x et $x+1$ de l'abscisse correspondra le même point géométrique de C.

La fonction $g(x)$, qui décrit la transformation T sur la courbe C, satisfait évidemment la relation

$$g(x-1) = g(x) - 1.$$

Nous supposerons que $g(x)$ possède les dérivées continues jusqu'à un certain ordre, qui sera précisé; nous indiquerons ces dérivées de la façon suivante

$$\frac{d^h g(x)}{dx^h} \equiv g^h(x).$$

Nous convenons de dire que, lorsque l'abscisse x croît, le point x se déplace vers la droite; si nous supposons que le point x_1, transformé de x par T, est à la droite de x, nous aurons donc

$$g(x) > x.$$

Nous poserons (1)

$$x_2 = g(g(x)) = g_2(x),$$

$$x_3 = g(g(g(x))) = g_3(x),$$

et nous indiquerons par $g_0(x) \equiv x$ la fonction, qui décrit la transformation identique; nous aurons aussi à considérer les fonctions d'index negatif, qui

(1) On indiquera parfois, plus en général, par $x_2, x_3, \ldots$ des nombres congrus (mod 1) à $g_2(x)$, $g_3(x)$ ..., qui représentent donc les mêmes points géométriques de C.

décrivent les puissances négatives de T. Enfin nous indiquerons par $g_n^{(h)}(x)$ la dérivée $h^{\text{ième}}$ de la fonction $g_n(x)$.

Nous dirons que le point d'abscisse $x_n \equiv g_n(n)$, transformé de x par T^n, est le $n^{\text{ième}}$ *conséquent* de x, et que $x_{-n} \equiv g_{-n}(x)$ est le $n^{\text{ième}}$ *antécédent* de x.

Si les points x, x', x'' se suivent dans un certain ordre, leurs $n^{\text{ièmes}}$ conséquents (antécédents) se suivent dans le même ordre.

3. Supposons maintenant que la transformation infinitésimale

$$\xi(x)\frac{df}{dx} \tag{2}$$

engendre T. La fonction $\xi(x)$ sera supposée continue, positive, et de période 1.

On sait que l'équation du groupe g_t engendré par (2) est

$$\int_x^{x_t} \frac{dx}{\xi(x)} = t,$$

t étant le paramètre du groupe, x un point de C et x_t son transformé. Si l'on suppose donc qu'on obtient T en donnant au paramètre t la valeur particulière 1, on doit avoir

$$\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = 1. \tag{4}$$

Soit k le module de T, introduisons une nouvelle abscisse y définie par l'équation

$$dy = \frac{k\,dx}{\xi(x)},$$

la transformation infinitésimale (2) s'écrit, dans y,

$$k\frac{df}{dy},$$

et l'équation de T devient donc

$$y_1 = y + k.$$

Le module k, qui est invariant par un changement de la variable, est donné, dans le cas actuel d'une translation, par le rapport de l'ampleur k de cette translation à l'intervalle de la variable y, qui correspond à un tour complet de C : on voit donc que cet intervalle est encore égal à 1.

4. Nous allons étudier, dans ce paragraphe, les transformations I (cycliques). On démontre facilement qu'*à une transformation cyclique correspond une infinité fonctionnelle de transformations infinitésimales, qui l'engendrent.*

Supposons, en effet, que pour T^m tout point de C revienne, pour la première fois, après m tours de la courbe, à sa position originaire. On aura donc

$$T^m = I.$$

Un point déterminé $\bar{x}$ de C possède $n-1$ homologues $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-1}$ par rapport au groupe cyclique engendré par T. Il y aura $m-1$ de ces points qui tombent entre $\bar{x}$ et $\bar{x}_1$; soit $\bar{x}_s$ le premier homologue à la droite de $\bar{x}$.

La démonstration se fait en construisant la fonction continue, positive et périodique $\xi(x)$, qui paraît dans l'expression de la transformation infinitésimale, de façon que l'équation (4) soit satisfaite. Nous définissons d'abord $\xi(x)$ dans l'intervalle $(\bar{x}, \bar{x}_s)$ en lui imposant la seule condition

$$\int_{\bar{x}}^{\bar{x}_s} \frac{dx}{\xi(x)} = \frac{1}{m}.$$

Soit maintenant x un point extérieur à l'intervalle $(\bar{x}, \bar{x}_s)$, et soit T^r la puissance de T, qui porte en x le point x_{-r}, homologue de x et intérieur à l'intervalle $(\bar{x}, \bar{x}_s)$. Nous définissons $\xi(x)$ par l'équation

$$\frac{\xi(x)}{g_r'(x_{-r})} \equiv \frac{\xi[g_r(x_{-r})]}{g_r'(x_{-r})} = \xi(x_{-r}). \tag{5}$$

La fonction $\xi(x)$ est de cette façon définie partout sur la courbe; elle est continue sauf dans les n points $\bar{x}, x_1, \ldots, x_{n-1}$. On peut éliminer facilement ces discontinuités en imposant à la fonction définie dans l'intervalle (x, x_s) la relation

$$\frac{\xi(\bar{x}_s)}{g_s'(\bar{x})} = \xi(\bar{x}).$$

Si l'on veut aussi que les dérivées de $\xi(x)$ soient continues, il faudra imposer d'autres relations.

Nous allons maintenant montrer que la fonction $\xi(x)$, que nous venons de définir, répond au problème posé. Il faut pour cela qu'on ait, quel que soit x,

$$\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = 1.$$

Supposons d'abord que x ne coïncide avec aucun des points x_i; entre x et $g(x)$ il y aura alors m de ces points; soit, dans l'ordre,

$$x_i, \quad x_j, \quad \ldots, \quad x_l.$$

Évaluons l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_j} \frac{dx}{\xi(x)};$$

T^i porte $(\bar{x}, x_s)$ en $(\bar{x}_i, x_j)$. Si nous prenons la nouvelle variable d'intégration x_{-i} définie par

$$x_{-i} = g^{-i}(x),$$

nous aurons, en vertu de (5),

$$\int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_j} \frac{dx}{\xi(x)} = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}_s} \frac{dx_{-t}}{\xi(x_{-t})} = \frac{1}{m}.$$

L'intégrale étendue de $\bar{x}_i$ à $\bar{x}_l$ sera donc égale à $\frac{m-1}{m}$. Il faut encore calculer les deux intégrales de x à $\bar{x}_i$ et de $\bar{x}_l$ à $g(x)$. On voit tout de suite que ces deux intégrales ont la valeur globale $\frac{1}{m}$, en remarquant que x et $g(x)$ possèdent un même homologue x_0 intérieur à $(\bar{x}, \bar{x}_s)$ et que, par exemple, l'intégrale de x à $\bar{x}_i$ est égale, en vertu de la relation (5), à l'intégrale de x_{-r} à $\bar{x}_s$.

Si x coïncide avec un des points $\bar{x}$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... la démonstration est encore plus simple.

5. Nous allons voir qu'à la différence des transformations cycliques, *les transformations de module irrationnel sont engendrées par une transformation infinitésimale au plus*. Soit en effet T une transformation de module irrationnel k, qui admet deux transformations infinitésimales

$$Xf = \xi(x)\frac{df}{dx}, \qquad Zf = \eta(x)\frac{df}{dx};$$

si l'on l'introduit l'abscisse y définie par l'équation

$$dy = \frac{k\,dx}{\xi(x)},$$

Xf se transforme (§ 3) en $k\frac{df}{dy}$ et T se transforme dans la translation d'ampleur k; enfin Zf se transforme en

$$Z'f = k\frac{\eta(x(y))}{\xi(x(y))}\frac{df}{dy}.$$

Il y a des multiples de k qui diffèrent d'un entier aussi peu qu'on veut; il y a donc, parmi les puissances de la translation d'ampleur k, des translations qui déplacent les points de C aussi peu qu'on veut. Il est impossible que toutes ces translations soient engendrées par $Z'f$; en effet les transformations engendrées par $Z'f$ et très proches de l'identité sont de la forme

$$Y = y + k\frac{\eta(x(y))}{\xi(x(y))}dt + \ldots; \tag{6}$$

$\frac{\eta(x(y))}{\xi(x(y))}$ n'est pas une constante et les transformations (6) ne sont donc pas des translations.

CHAPITRE II.

6. Revenons, pour mieux la préciser, sur la notion de *module*.

Si T est du type 1 ou 2 et si pour T^n les points de C (ou une partie de ces points) reviennent à leur position originaire après m tours de la courbe, il est évident que le module est égal au nombre rationnel $\frac{m}{n}$.

Considérons maintenant une transformation du type 3. Nous devons montrer que le rapport $\frac{m}{n}$ du nombre m de tours que x accomplit par T^n à l'exposant n tend à une limite.

Supposons que x accomplisse m' tours par la transformation $T^{n'}$ et m'' tours par $T^{n''}$. Puisque x accomplit m' tours par $T^{n'}$, il accomplira, par $(T^{n'})^{n''}$, un nombre de tours compris entre $m'n''$ et $(m'+1)n''$, mais on voit, d'une façon analogue, que le nombre de tours en question doit être compris entre $m''n'$ et $(m''+1)n'$.

La différence entre $m''n'$ et $m'n''$ ne peut donc dépasser le plus grand entre les deux entiers n' et n''. Par conséquent

$$\left|\frac{m'}{n'}-\frac{m''}{n''}\right|=\left|\frac{m'n''-m''n'}{n'n''}\right|<\left|\frac{n'+n''}{n'n''}\right|,$$

cela montre bien que $\frac{m}{n}$ tend vers une limite k pour $n\to\infty$.

Il nous reste à montrer que, dans le cas actuel, le module k est irrationnel. Soit T^{n_1} la plus grande puissance de T par laquelle un point x n'arrive pas à accomplir un tour complet de C; le point x_{n_1} sera à la gauche de x. Les points

$$x_1,\quad x_{n_1+1},\quad x_{2n_1+1},\quad x_{3n_1+1},\quad \ldots$$

se suivent donc de droite à gauche; soit

$$x_{\alpha_1 n_1+1}=x_{n_2}$$

le dernier parmi ces points qui se trouve, ainsi que ceux qui le précèdent, à la droite de x. Par T^{n_1}, x accomplit a_1 tours de C.

Considérons maintenant les points

$$x_{n_1},\quad x_{n_2+n_1},\quad x_{2n_2+n_1},\quad x_{3n_2+n_1},\quad \ldots;$$

ils se suivent de gauche à droite, soit

$$x_{\alpha_2 n_2+n_1}=x_{n_3}$$

le dernier d'entre eux, qui se trouve, ainsi que ceux qui le précèdent, à la gauche de x. Par T^{n_2}, x accomplit *presque complètement* a_1a_2+1 tours de C.

On peut poursuivre de la sorte; si l'on indique par

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = a_2, \qquad m_3 = a_2 a_1 + 1, \qquad \dots$$

le nombre des tours accomplis (ou *presque complètement* accomplis) par le point x lorsqu'il est transformé par T^{n_1}, T^{n_2}, T^{n_3}, ... respectivement, et si l'on pose $m_0 = 0$, $n_0 = 1$, on comprend que la succession

$$\frac{m_0}{n_0}, \quad \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_2}{n_2}, \quad \frac{m_3}{n_3}, \quad \dots$$

tend vers le module k de la transformation T. Mais on a, d'une façon générale,

$$m_{\alpha+2} = a_{\alpha+1} m_{\alpha+1} + m_\alpha,$$
$$n_{\alpha+2} = a_{\alpha+1} n_{\alpha+1} + n_\alpha,$$

ce qui montre que la succession des fractions représente le système des réduites du développement de k en fraction continue illimitée; k est donc irrationnel. Le module de T^n est évidemment nk, il peut être plus grand que 1, et l'on devra attribuer des modules négatifs aux puissances négatives de T. D'ailleurs, si l'on considère une transformation au point de vue *géométrique*, le module n'est défini, au fond, qu'à un entier près.

Considérons en particulier les transformations T^{n_1}, T^{n_2}, T^{n_3}, ..., T^{n_α}, ...; leurs modules sont donnés par $n_1 k$, $n_2 k$, $n_3 k$, ..., $n_\alpha k$. Posons

$$x_{n_\alpha} = g_{n_\alpha}(x) = x + m_\alpha + \gamma_\alpha(x);$$

la transformation

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x)$$

coïncide, au point de vue géométrique, avec T^{n_α}; son module est donné par

$$n_\alpha k - m_\alpha \equiv k_\alpha;$$

les fonctions $\gamma_\alpha(x)$ sont alternativement positives et négatives.

De même, les nombres k_α sont alternativement positifs et négatifs; de

$$\left| k - \frac{m_\alpha}{n_\alpha} \right| < \frac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}},$$

on déduit

$$|k_\alpha| = |n_\alpha k - m_\alpha| < \frac{1}{n_{\alpha+1}}.$$

Les nombres k_α sont donc de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n_{\alpha+1}}$, ils satisfont au même système d'équations récurrentes que les nombres m_α et n_α,

$$k_{\alpha+2} = a_{\alpha+1} k_{\alpha+1} + k_\alpha;$$

ils constituent, à un facteur constant près, la seule solution du système, qui tende vers zéro pour $\alpha \to \infty$; en effet, s'il y avait deux solutions indépendantes tendant vers zéro, il en serait de même de la solution générale.

7. Nous dirons qu'une transformation continue τ de C, dépourvue de points invariants, d'équation

$$x_1 = x + \gamma(x),$$

est *très petite* (1), si, en indiquant par δ_1 et δ_2 deux membres positifs convenables très petits par rapport à 1, on a toujours

$$|\gamma(x)| < \delta_1$$

et

$$1 - \delta_2 < \frac{\gamma(x')}{\gamma(x)} < 1 + \delta_2,$$

lorsque x' appartient à l'intervalle (x, x_1).

L'équation de la transformation inverse τ^{-1} est donnée, approximativement (2), par

$$x_{-1} = x - \gamma(x).$$

Pour calculer l'équation de $T\tau T^{-1}$, transformée de τ par la transformation T d'équation (1) [en supposant que $g(x)$ possède une dérivée seconde continue], remarquons que par les transformations successives T^{-1}, τ, T le point x va en $g_{-1}(x)$, en $g_{-1}(x) + \gamma(g_{-1}(x))$ et enfin en

$$g[g_{-1}(x) + \gamma(g_{-1}(x))] = x + \gamma(g_{-1}(x))\, g'(g_{-1}(x)) + \dots;$$

l'équation cherchée est donc, approximativement,

$$x_1 = x + \gamma(g_{-1}(x))\, g'(g_{-1}(x)).$$

Considérons enfin le module d'une transformation très petite. Le module d'une telle transformation est donné, approximativement, par l'inverse de l'exposant de la plus petite puissance de la transformation par laquelle un point x accomplit un tour complet de C; cet exposant est à son tour donné approximativement par

$$\int_x^{x+1} \frac{dx}{\gamma(x)},$$

on a donc pour le module l'expression

$$\frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{dx}{\gamma(x)}}.$$

(1) *Très petit* a une signification relative; on veut dire *assez petit* pour que les relations qu'on va donner dans ce paragraphe (qui seraient exactes pour δ_1 et δ_2 infiniment petits, c'est-à-dire pour des transformations infiniment petites) soient valables avec une approximation suffisante pour les applications qu'on en fera dans ce Mémoire (aux paragraphes 32 et 40).

(2) Je pense que la signification mathématique exacte du mot *approximativement*, qui paraît plusieurs fois dans ce paragraphe, est évidente dans chaque cas et ne demande pas d'autres explications. Par exemple, dans le cas actuel, je veux dire par ce mot que la différence entre les deux abscisses x_{-1} et $x - \gamma(x)$ est plus petite que $\delta_1 \delta_2$, donc plus petite qu'une quantité quadratique en δ_1 et δ_2.

Supposons enfin que la transformation très petite τ soit égale au produit $\tau_{(1)}\,\tau_{(2)}\,\ldots\,\tau_{(n)}$ de n transformations très petites $\tau_{(1)}$, $\tau_{(2)}$, $\ldots$, $\tau_{(n)}$, représentées par n fonctions $\gamma_{(1)}(x)$, $\gamma_{(2)}(x)$, $\ldots$, $\gamma_{(n)}(x)$, toutes du même signe; supposons que le rapport

$$\frac{\gamma_{(j)}(x')}{\gamma_{(j)}(x)} \qquad (j=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

soit toujours très proche de l'unité lorsque x' varie dans l'intervalle $(x,\,x_1)$ compris entre un point x et son transformé par τ. On a alors, approximativement,

$$\gamma(x)=\gamma_{(1)}(x)+\gamma_{(2)}(x)+\ldots+\gamma_{(n)}(x).$$

Entre le module k de τ et les modules $k_{(1)}$, $k_{(2)}$, $\ldots$, $k_{(n)}$ de $\tau_{(1)}$, $\tau_{(2)}$, $\ldots$, $\tau_{(n)}$ on a la relation

$$k\geqq k_{(1)}+k_{(2)}+\ldots+k_{(n)},$$

valable approximativement. Pour l'établir il suffit d'avoir recours à l'expression du module, que nous venons de donner; il s'agit de montrer que

$$\frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{dx}{\gamma_{(1)}(x)+\gamma_{(2)}(x)+\ldots+\gamma_{(n)}(x)}}\geqq\frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{dx}{\gamma_{(1)}(x)}}+\ldots+\frac{1}{\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{dx}{\gamma_{(n)}(x)}};$$

c'est là un cas particulier d'une relation connue (1).

8. On peut faire correspondre, à un point x de C et à l'ensemble de ses homologues par rapport aux puissances de T, un ensemble de points sur un cercle Γ de longueur 1. La considération de cette représentation, due à Poincaré, va jouer un rôle important dans la suite. Au point x de C faisons correspondre un point particulier y de Γ; en général aux points

$$\ldots\quad x_{-3},\quad x_{-2},\quad x_{-1},\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad \ldots$$

de C faisons correspondre les points

$$\ldots\quad y_{-3}\equiv y-3k,\quad y_{-2}\equiv y-2k,\quad y_{-1}\equiv y-k,\quad y,$$
$$y_1\equiv y+k,\quad y_2\equiv y+2k,\quad y_3\equiv y+3k,\quad \ldots$$

respectivement. Il est bien clair qu'à deux valeurs de y, qui diffèrent d'un entier, correspond le même point de Γ. Désignons par θ la rotation de Γ d'un angle $2\pi k$, qui porte y_i en y_{i+1}.

Soit maintenant x_i, x_j, x_h, ... des homologues quelconques de x et y_i, y_j, y_h, ... les points correspondants de Γ. *Les points x_i, x_j, x_h, ... sont situés dans le même ordre que les points y_i, y_j, y_h, ...*; cette remarque est due à Poincaré.

---

(1) Hardy, Polya et Littlewood, *Inequalities*, p. 146.

Il suffit évidemment de démontrer cette propriété pour un groupe de trois points, dont l'un est le point x,

$$x, \quad x_i, \quad x_j,$$

et pour les points correspondants de Γ,

$$y, \quad y_i, \quad y_j.$$

Supposons, par exemple, $i < j$. T^i porte x en x_i, T^j porte x en x_j, enfin T^{j-i} porte x_i en x_j.

Le module de T^i est donné par ik; soit i' le plus grand entier contenu dans ik, alors T^i amène x en x_i après i' tours de C. De même, si j' est le plus grand entier contenu dans le module jk de T^j, cette transformation amènera x en x_j après j' tours complets de C. Enfin le nombre de tours après lequel la transformation T^{j-i} amène x_i en x_j est évidemment égal à $j' - i'$ si en se déplaçant de x vers la droite on rencontre x_i d'abord, et x_j après; il est égal à $j' - i' - 1$ dans le cas opposé. Ce même nombre est donné, d'autre part, par le plus grand entier contenu dans $(j-i)k$.

D'autre part, on va de y à y_i par 0^i et par un déplacement total donné par ik, en faisant d'abord i' tours complets de Γ; on va de y_i à y_j par 0^j et par un déplacement total donné par jk, et en faisant d'abord j' tours complets de Γ; enfin par 0^{j-i} on va de y_i à y_j après un nombre de tours qui est évidemment égal à $j' - i'$ si en se déplaçant de y vers la droite on rencontre y_i d'abord, et y_j ensuite, et qui est égal à $j' - i' - 1$ dans le cas opposé. Mais, ici encore, ce nombre est égal au plus grand entier contenu dans $(j-i)k$. On voit donc que y_i précède y_j si x_i précède x_j, et *vice versa*.

L'ampleur du déplacement $y_j - y_i$ qui porte un point y_i en un point y_j est donnée par le module $(j-i)k$ de la transformation T^{j-i}. La distance entre les points géométriques y_j et y_i est donnée aussi par le module de T^{j-i}, à un entier près.

9. Les déductions des paragraphes 9, 10, 11 et 12, quoique élémentaires, sont parfois un peu minutieuses. Il sera surtout nécessaire, pour la suite, d'être quelque peu familiarisé avec les considérations de ce paragraphe et de bien rappeler le lemme du paragraphe 10 et le premier lemme énoncé en italique au paragraphe 11.

Les considérations du paragraphe précédent font comprendre l'importance de considérer la distribution des points y_i sur Γ, distribution que nous allons étudier dans ce paragraphe.

Considérons d'abord les $n_1 + 1$ points

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad \ldots, \quad y_{n_1};$$

ils se suivent de gauche à droite à une distance égale à k; enfin l'intervalle

$$(y_{n_1}, y)$$

a l'ampleur

$$1 - kn_1 = k_1'.$$

On voit en somme que ces premiers $n_1 + 1$ points divisent Γ en n_1 intervalles (y_i, y_{i-1}) $(0 \leq i < n_1)$ d'ampleur k et un intervalle (y_{n_1}, y) d'ampleur $|k_1|$.

L'intervalle

$$(y_{n_1+1}, y_1)$$

peut être obtenu à partir de (y_{n_1}, y) par le déplacement d'ampleur k, son ampleur est donc encore donnée par $|k_1|$. Après cela, le point $y_{n_1+i} (i < n_1)$ divise l'intervalle

$$(y_{i-1}, y_i)$$

en deux parties, dont

$$(y_{n_1+i}, y_i)$$

a l'ampleur $|k_1|$. Deux points y_{2n_1+i}, y_{n_1-i} déterminent également un intervalle d'ampleur $|k_1|$ compris dans (y_{i-1}, y_i).

On peut poursuivre; on voit que les $a_1 n_1$ points $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, \ldots, y_{n_2+n_1-1}$ divisent chacun des n_1 intervalles d'ampleur k du premier réseau en a_1 intervalles partiels d'amplèur $|k_1|$ et un intervalle d'ampleur $|k_2|$, situé à gauche. On a ainsi un nouveau réseau formé par les $n_2 + n_1$ points

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots \quad y_{n_2+n_1-1}$$

et constitué par $a_1 n_1 + 1 = n_2$ intervalles

$$(y_i, y_{i+n_1}) \qquad (0 \leq i < n_2)$$

d'ampleur $|k_1|$ et par n_1 intervalles

$$(y_i, y_{i+n_2}) \qquad (0 \leq i < n_1)$$

d'ampleur k_2.

On peut poursuivre indéfiniment dans la formation de nouveaux réseaux. Le $\alpha^{\text{ième}}$ réseau sera formé par les $n_\alpha + n_{\alpha-1}$ points

$$y, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{n_\alpha+n_{\alpha-1}-1}$$

et sera constitué par n_α intervalles,

$$(y_i, y_{i+n_{\alpha-1}}) \qquad (0 \leq i < n_\alpha),$$

d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$, et par $n_{\alpha-1}$ intervalles,

$$(y_i, y_{i+n_\alpha}) \qquad (0 \leq i < n_{\alpha-1}),$$

d'ampleur $|k_\alpha|$.

On passera du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha+1^{\text{ième}}$ réseau par la considération de $n_\alpha a_\alpha$ nouveaux conséquents de y, en divisant chaque intervalle d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$ en a_α intervalles,

$$(y_{i+n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha},\ y_{i+n_{\alpha-1}+(b_\alpha+1)n_\alpha}) \qquad (b_\alpha = 0,\ 1,\ \ldots\ a_\alpha - 1),$$

d'ampleur $|k_\alpha|$, et un

$$(y_i,\ y_{i+n_{\alpha-1}}),$$

d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$, situé à droite (à gauche). De même, on passera du $\alpha+1^{\text{ième}}$ au $\alpha+2^{\text{ième}}$ réseau par la considération de $n_{\alpha-1}a_{\alpha-1}$ nouveaux conséquents de y, en divisant chaque intervalle d'ampleur $|k_\alpha$ en $a_{\alpha-1}$ intervalles d'ampleur $k_{\alpha-1}$ et un d'ampleur $|k_{\alpha-2}|$ situé à gauche (à droite).

Nous aurons aussi à considérer, par la suite, un deuxième système de réseaux, celui des réseaux *incomplets* : le $\alpha^{\text{ième}}$ réseau imcomplet est formé par les n_α points

$$y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_{n_\alpha-1};$$

il est constitué par $n_\alpha - n_{\alpha-1}$ intervalles,

$$(y_i,\ y_{i+n_{\alpha-1}}) \qquad (0 \leq i < n_\alpha - n_{\alpha-1}),$$

d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$, et par $n_{\alpha-1}$ intervalles,

$$(y_i,\ y_{i-n_\alpha+n_{\alpha-1}}) \qquad (n_\alpha - n_{\alpha-1} \leq i < n_\alpha)$$

d'ampleur $|k_{\alpha-1}|+|k_\alpha|$.

Évidemment, *à tout réseau de* Γ *correspond un réseau de* C, *ayant son origine dans un point donné* x. Nous dirons qu'un intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$ d'ampleur $\gamma_{\alpha-1}(x)|$, qui correspond à un intervalle d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$ de Γ, *a le module* $|k_{\alpha-1}|$.

10. Dans la suite de ce Chapitre nous allons supposer que la variation totale V de la fonction $g_1(x)$ soit bornée.

Soit x un point de l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$ et i une valeur de l'index $\leq n_\alpha$. Nous allons montrer que, *lorsque* α *et* i *croissent, le rapport*

$$\frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x)}, \tag{7}$$

reste toujours compris entre deux quantités positives convenables, qu'on peut choisir indépendamment de x, x', i *et* α; nous exprimerons cela en disant que le rapport *reste fini*. Pour la démonstration, remarquons qu'on a

$$g_i^1(x) = \prod_0^{i-1} g^1(x_j), \qquad g_i^1(x') = \prod_0^{i-1} g^1(x'_j);$$

par conséquent

$$\frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x)} = \prod_0^{i-1} \left(1 + \frac{g^1(x'_j) - g^1(x_j)}{g^1(x_j)}\right).$$

Pour montrer que ce produit reste toujours fini, il suffit de montrer que la sommation

$$\sum_{0}^{i-1}{}_{j} \frac{|g^1(x'_j) - g^1(x_j)}{g^1(x_j)}$$

reste bornée. Les dénominateurs, qui paraissent dans les termes de la sommation, ne sont certainement pas plus petits que le minimum de la fonction continue et positive $g_1(x)$; il suffit donc de montrer que

$$\sum_{0}^{i-1}{}_{j} |g^1(x'_j) - g^1(x_j)|$$

reste bornée. Les intervalles $(x_j, x_{j-n_\alpha-1})$ $(j < n_\alpha)$, qui appartiennent au $\alpha^{\text{ième}}$ réseau de C, ne peuvent avoir que les extrêmes en commun; à plus forte raison les intervalles (x_j, x'_j) ne peuvent pas avoir des points intérieurs en commun; la dernière sommation ne peut donc dépasser la variation totale V de $g^1(x)$.

Le rapport (7) resterait encore fini si x' était dans l'intervalle plus grand $(x, x_{2n_\alpha-1})$. Pour le prouver il suffit de choisir un point x'' qui appartienne à $(x, x_{n_\alpha-1})$ et tel que x' appartienne à $(x'', x''_{n_\alpha-1})$; alors du fait que les deux rapports $\frac{g_i^1(x'')}{g_i^1(x')}$ et $\frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x)}$ restent finis, il s'ensuit que (7) aussi reste fini.

11. Nous allons démontrer que le rapport

$$(8) \qquad \frac{\frac{\gamma_\alpha(x'_i)}{\gamma_\alpha(x_i)}}{\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_\alpha(x)}} = \frac{\frac{\gamma_\alpha(x'_i)}{\gamma_\alpha(x')}}{\frac{\gamma_\alpha(x_i)}{\gamma_\alpha(x)}} = \frac{\frac{x'_{i+n_\alpha} - x'_i}{x'_{n_\alpha} - x'}}{\frac{x_{i+n_\alpha} - x_i}{x_{n_\alpha} - x}}$$

reste toujours fini. Nous avons indiqué par x' un point de l'intervalle $(x, x_{n_\alpha-1})$ et par i un entier $\leq n_\alpha$.

Le théorème de la moyenne nous donne

$$x'_{i+n_\alpha} - x'_i = g_i(x'_{n_\alpha}) - g_i(x') = (x'_{n_\alpha} - x')\, g_i^1(x'^*),$$

en indiquant par x'^* un point convenable de l'intervalle (x', x'_{n_α}). On tire de là

$$\frac{x'_{i+n_\alpha} - x'_i}{x'_{n_\alpha} - x'} = g_i^1(x'^*).$$

En faisant la même chose pour le dénominateur du troisième membre de (8), on arrive à conclure que le rapport (8) est donné par

$$\frac{g_i^1(x'^*)}{g_i^1(x^*)},$$

x^* étant dans (x, x_{n_α}). Cela démontre que le rapport (8) reste toujours fini.

Nous voulons montrer maintenant que *le rapport*

$$\frac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)} = \frac{x_{2n_\alpha} - x_{n_\alpha}}{x_{n_\alpha} - x} \tag{9}$$

entre les ampleurs de deux intervalles contigus de même module $|k_\alpha|$ *reste fini lorsque* α *croît.*

Soit $\bar{x}$ le point de maximum de la fonction $|\gamma_\alpha(x)|$; si l'on fait, dans (8), $i = n_\alpha$ et que l'on substitue $\bar{x}$ à x' et $\bar{x}'_{-n_\alpha}$ à x, on déduit que le produit

$$\frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{-n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\bar{x})} \frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)}$$

(qui évidemment est plus petit que 1) ne peut pas devenir infiniment petit. En remarquant alors que ni l'un ni l'autre des deux facteurs

$$\frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{-n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)}, \quad \frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)}, \tag{10}$$

ne dépasse 1, on reconnaît qu'aucun de ces facteurs ne peut devenir infiniment petit; nous pouvons donc conclure qu'ils restent finis.

Considérons maintenant le réseau incomplet formé par les n_α points

$$y, \ y_1, \ \ldots, \ y_{n_\alpha - 1};$$

nous avons vu (§ 9) que ce réseau divise Γ en n_α intervalles dont l'ampeur ne dépasse pas $|k_{\alpha-1}| + |k_\alpha|$. Si l'on considère donc un intervalle quelconque d'ampleur $|2k_{\alpha-1}|$,

$$(y^* - k_{\alpha-1}, \ y^* + k_{\alpha-1}),$$

il y aura certainement un point y_i parmi les n_α considérés, qui tombe dans cet intervalle. On voit alors qu'il y aura aussi un point $x_i (i < n_\alpha)$, qui tombe dans l'intervalle de module $|2k_{\alpha-1}|$

$$(\bar{x}_{-n_{\alpha-1}}, \ \bar{x}_{n_{\alpha-1}});$$

en effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait déplacer x par continuité jusqu'à ce que l'un des extrêmes de l'intervalle $(\bar{x}_{-n_{\alpha-1}}, \bar{x}_{n_{\alpha-1}})$ vienne à coïncider avec l'un x_j, parmi les points $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n_{\alpha-1}}$, tandis qu'aucun de ces points ne tomberait à l'intérieur de l'intervalle. A l'intervalle de C obtenu de la sorte correspond l'intervalle $(y_j, y_j + |2k_{\alpha-1}|)$ ou l'intervalle $(y_j, y_j - |2k_{\alpha-1}|)$ du cercle Γ: alors à l'intérieur de cet intervalle d'ampleur $|2k_{\alpha-1}|$ il ne tomberait aucun des points $y, y_1, \ldots, y_{n_\alpha - 1}$, ce que nous avons exclu.

Substituons maintenant x_{n_α} à x' dans le premier membre de (8) et indiquons par i la même valeur de l'indice que dans les lignes précédentes; nous trouvons

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha + i})}{\gamma_\alpha(x_i)}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)}} = \frac{g_i^1(x_{n_\alpha})}{g_i^1(x^*)},$$

x^* étant un point convenable de (x, x_{n_α}) et $x'^*_{n_\alpha}$ étant un point convenable de $(x_{n_\alpha}, x_{2n_\alpha})$; nous en déduisons que le premier membre de l'équation reste fini. De même, si dans le second membre de l'équation (8) on fait $i = n_\alpha$ et l'on substitue x_i à x et $\bar{x}$ à x', on déduit que le rapport

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha+i})}{\gamma_\alpha(x_i)}}$$

reste fini. De la comparaison de ce dernier rapport avec le premier membre de l'équation précédente, et en rappelant que le second des rapports (10) reste fini, on déduit finalement que le rapport (9) reste fini.

Plus en général, *en indiquant* maintenant *par x' un point dans* (x, x_{n_α}), on reconnaît que *le rapport*

$$\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_\alpha(x)} = \frac{x'_{n_\alpha} - x'}{x_{n_\alpha} - x}$$

reste fini. On le voit facilement en remarquant que les points

$$x, \quad x', \quad x_{n_\alpha}, \quad x'_{n_\alpha}, \quad x_{2n_\alpha}, \quad x'_{2n_\alpha}$$

sont ordonnés et que les deux rapports

$$\frac{x_{2n_\alpha} - x_{n_\alpha}}{x_{n_\alpha} - x}, \quad \frac{x'_{2n_\alpha} - x'_{n_\alpha}}{x'_{n_\alpha} - x'}$$

restent finis.

12. Nous avons vu que, lorsqu'on passe du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha+1^{\text{ième}}$ réseau de Γ, on obtient, de l'intervalle $(y, y_{n_{\alpha-1}})$ d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$, un intervalle d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$,

$$(y, y_{n_{\alpha-1}}),$$

et $a_{\alpha-1} \geq 1$ intervalles d'ampleur $|k_\alpha|$,

$$(y_{n_{\alpha-1}}, y_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}), \quad (y_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}, y_{n_{\alpha-1}+2n_\alpha}), \quad \ldots, \quad (y_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha}, y_{n_{\alpha-1}}).$$

De même, lorsqu'on passe du $\alpha+1^{\text{ième}}$ au $\alpha+2^{\text{ième}}$ réseau, on obtient, de

$$(y_{n_{\alpha-1}+(a_{\alpha-1})n_\alpha}, y_{n_{\alpha-1}}),$$

un intervalle d'ampleur $|k_{\alpha+2}|$ et $a_{\alpha+1} \geq 1$ intervalles d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$, dont l'un est

$$(y_{n_{\alpha-1}}, y_{2n_{\alpha+1}}).$$

On voit donc que, en passant du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha+2^{\text{ième}}$ réseau, on obtient, de l'intervalle

$$(y, y_{n_{\alpha-1}}),$$

d'ampleur $|k_{\alpha-1}|$, au moins deux intervalles contigus d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$,

$$(y, y_{n_{\alpha+1}}), \quad (y_{n_{\alpha+1}}, y_{2n_{\alpha+1}}).$$

En passant ensuite du $\alpha + 2^{\text{ième}}$ au $\alpha + 4^{\text{ième}}$ réseau nous obtiendrons, de chacun de ces deux intervalles d'ampleur $|k_{\alpha+1}|$, deux intervalles au moins d'ampleur $|k_{\alpha+3}|$. Il y aura donc dans $(y, y_{n_{\alpha-1}})$ au moins quatre intervalles d'ampleur $|k_{\alpha+3}|$ appartenant au $\alpha + 4^{\text{ième}}$ réseau.

On aura de même au moins quatre intervalles de module $|k_{\alpha+3}|$ du $\alpha + 4^{\text{ième}}$ réseau de C, qui sont contenus dans $(x, x_{n_{\alpha-1}})$. Si alors

$$(x', x'_{n_{\alpha+3}})$$

est un intervalle quelconque de module $|k_{\alpha+3}|$ contenu dans $(x, x_{n_{\alpha-1}})$, il y aura au moins un intervalle de module $|k_{\alpha+3}|$, contigu à $(x', x'_{n_{\alpha+3}})$, qui est également contenu dans $|(x, x_{n_{\alpha-1}})|$.

Si l'on remarque que le rapport entre l'ampleur des deux intervalles contigus doit rester fini et que la somme des ampleurs est certainement plus petite que l'ampleur $|\gamma_{\alpha-1}(x)|$ de $(x, x_{n_{\alpha-1}})$, on voit que le rapport

$$\frac{\gamma_{\alpha+3}(x')}{\gamma_{\alpha-1}(x)}$$

reste toujours inférieur à un nombre positif convenable plus petit que 1, qu'on peut choisir indépendamment de x, de x' et de α, et que nous voulons considérer comme la quatrième puissance p^4 d'un nombre positif p.

Considérons maintenant plus en général un entier $\alpha' < \alpha$ et supposons que l'intervalle (x', x'_{n_α}) soit contenu dans $(x, x_{n_{\alpha'}})$. En indiquant par $\mathrm{E}\left(\frac{\alpha-\alpha'}{4}\right)$ le plus grand entier contenu dans $\frac{\alpha-\alpha'}{4}$, on pourra construire une chaîne de $\mathrm{E}\left(\frac{\alpha-\alpha'}{4}\right)$ intervalles, dont le premier est l'intervalle (x', x'_{n_α}), de modules respectivement égaux à $|k_\alpha|, |k_{\alpha-4}|, |k_{\alpha-8}|, \ldots$, chacun de ces intervalles étant contenu dans le suivant et le dernier étant contenu dans $(x, x_{n_{\alpha'}})$ [où, éventuellement, coïncidant avec $(x, x_{n_{\alpha'}})$]. On déduit ainsi que le rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$$

est plus petit que $p^{4\mathrm{E}\left(\frac{\alpha-\alpha'}{4}\right)} \leqq p^{\alpha-\alpha'-3}$.

L'ampleur de l'intervalle (x, x_{n_α}) ne peut pas, en particulier, dépasser $p^{\alpha-3}$. Le maximum de l'ampleur des intervalles des réseaux successifs constitués par un point x et par ses conséquents tend donc à zéro. *L'ensemble dérivé de l'ensemble constitué par x et par ses infinis conséquents recouvre donc la courbe* C *tout entière* (1). C'est ce dernier résultat, qui est dû à M. Denjoy.

---

(1) Il n'en est pas nécessairement de même si l'on ne suppose pas que $g'(x)$ soit à variation bornée. Dans ce cas, comme l'ont montré Poincaré et Denjoy, l'ensemble dérivé peut se réduire à un sous-ensemble parfait et discontinu de C, qui ne dépend pas du point x considéré.

13. Nous indiquons par

$$c_\alpha$$

le maximum absolu de $\gamma_\alpha(x)$. D'après ce que nous venons de voir c_α tend vers zéro pour $\alpha \to \infty$, et, plus en général, $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$ tend vers zéro pour $\alpha - \alpha' \to \infty$. c_α est inférieur à $p^{\alpha-3}$.

Nous allons évaluer le maximum absolu du rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)} \qquad (\alpha' < \alpha),$$

en indiquant toujours par x' un point tel que (x', x'_{n_α}) soit contenu dans $(x, x_{n_{\alpha'}})$.

Convenons d'indiquer en particulier par x et x' deux points de C, en correspondance desquels le rapport $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ atteint son maximum absolu et par $\bar{x}$ le point dans lequel $\gamma_{\alpha'}(x)$ atteint le maximum $c_{\alpha'}$. Faisons la remarque que les $2n_{\alpha'+1}$ intervalles transformés de $(x, x_{n_{\alpha'}})$ par T^0, T^1, T^2, ..., $T^{2n_{\alpha'+1}-1}$ recouvrent une fois au moins tout point de C; $\bar{x}$ appartiendra donc à un au moins de ces intervalles, soit $(x_j, x_{j+n_{\alpha'}})$. Par une déduction analogue à celle du paragraphe 11 on trouve

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_{\alpha'}(x_j)}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}} = \frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_\alpha(x')}}{\dfrac{\gamma_{\alpha'}(x_j)}{\gamma_{\alpha'}(x)}} = \frac{g_j^1(x^*)}{g_j^1(x^{**})},$$

x^* et x^{**} étant deux points convenables de $(x, x_{n_{\alpha'}})$. Le dernier rapport reste fini; le rapport entre $\frac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_{\alpha'}(x_j)}$ et $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ reste donc fini. Nous pouvons affirmer d'autre part, d'après ce que nous avons vu à la fin du paragraphe 11, que le rapport entre $\gamma_{\alpha'}(x_j)$ et $\gamma_{\alpha'}(\bar{x})$ reste fini, nous voyons donc que le rapport entre $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ et $\frac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ reste fini.

Mais

$$\frac{\gamma_\alpha(x'_j)}{\gamma_\alpha(x)} = \frac{\gamma_\alpha(x'_j)}{c_{\alpha'}} \leq \frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}};$$

nous pouvons enfin affirmer que le rapport entre $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ et $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$ reste borné; nous dirons que $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ *est au plus de l'ordre de* $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$.

CHAPITRE III.

14. Nous allons donner, dans ce Chapitre, la démonstration du théorème A :

Il y a toujours une transformation infinitésimale qui engendre une transformation T *du type* 3 *si* $g(x)$ *possède une dérivée seconde satisfaisant à la condition de Lipschitz, et si l'on peut donner un exposant* $\lambda < 1$ *de façon que*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_\alpha}{n_\alpha^\lambda} = 0. \tag{3}$$

La démonstration du théorème étant assez longue, il n'est pas mal d'en donner, dès maintenant, une idée générale.

Nous avons déjà vu que les transformations $T^{n_\alpha}(\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$ correspondent à des transformations géométriques déplaçant tout point de C aussi peu qu'on veut, alternativement à droite et à gauche; on peut représenter ces transformations géométriques par

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots).$$

Les modules k_α de ces transformations sont alternativement positifs et négatifs et tendent vers zéro. Supposons maintenant que la suite des fonctions

$$\frac{\gamma_1(x)}{k_1}, \quad \frac{\gamma_2(x)}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha}, \quad \ldots \tag{11}$$

converge d'une façon uniforme vers une fonction positive $\xi(x)$, on démontre qu'on obtient alors nécessairement la transformation donnée T lorsque, dans l'équation du groupe g_1 engendré par

$$\xi(x)\frac{df}{dx},$$

on donne la valeur particulière k au paramètre t. Tout revient donc à démontrer la convergence uniforme de la suite (11).

Lorsque l'on passe du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha+1^{\text{ième}}$ réseau sur C, l'intervalle

$$(x, x_{n_{\alpha-1}}),$$

d'ampleur $|\gamma_{\alpha-1}(x)|$, est divisé (§ 12) en un intervalle

$$(x, x_{n_{\alpha-1}})$$

d'ampleur $|\gamma_{\alpha+1}(x)|$, et a_α intervalles

$$(x_{n_{\alpha-1}}, x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}), \quad (x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}, x_{n_{\alpha-1}+2n_\alpha}), \quad \ldots, \quad (x_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha}, x_{n_{\alpha+1}}),$$

d'ampleurs respectives

$$|\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}})|, \quad |\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha})|, \quad \ldots, \quad |\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha})|. \tag{12}$$

Si ces a_α dernières quantités étaient égales entre elles et égales à $|\gamma_\alpha(x)|$, on pourrait donc poser

$$\gamma_{\alpha-1}(x) = \gamma_{\alpha+1}(x) - a_\alpha \gamma_\alpha(x),$$

d'où

$$\gamma_{\alpha+1}(x) = a_\alpha \gamma_\alpha(x) + \gamma_{\alpha-1}(x).$$

C'est le même système d'équations auquel satisfont les quantités k_α (§ 6) et nous avons remarqué que ces quantités constituent, à une constante multiplicative près, la seule solution du système qui tend vers zéro lorsque $\alpha \to \infty$.

En réalité, les quantités (12) ne sont pas rigoureusement égales entre elles; on démontrera toutefois que, pour $\alpha \to \infty$, le rapport entre l'ampleur de deux intervalles contigus de module $|k_\alpha|$ tend vers l'unité. On conçoit qu'il puisse en découler que les rapports

$$\frac{\gamma_1(x)}{k_1}, \quad \frac{\gamma_2(x)}{k_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha} \ldots, \tag{11}$$

sans être rigoureusement égaux entre eux, puissent du moins être convergents pour $\alpha \to \infty$.

Au paragraphe 11 nous avons déduit que le rapport entre deux intervalles consécutifs de module $|k_\alpha|$ reste fini du fait que le rapport

$$\frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x)} \qquad (i \leq n_\alpha) \tag{7}$$

reste fini. Par un raisonnement tout à fait analogue on déduira que le rapport entre deux intervalles contigus de module $|k_\alpha|$ tend vers 1 pour $\alpha \to \infty$, du fait que, en réalité, le rapport (7) tend aussi vers 1 pour $\alpha \to \infty$.

La démonstration du théorème A reviendra donc au fond à démontrer que *le rapport* (7) *tend vers* 1 *avec une rapidité suffisante*. On démontrera d'abord que le rapport (7) tend vers 1; une démonstration successive qui utilise l'hypothèse (3) nous permettra ensuite de démontrer que le rapport (7) tend vers 1 avec une rapidité suffisante. La première démonstration occupera la première partie du Chapitre jusqu'au paragraphe 20.

15. Nous allons introduire des locutions, dont nous ferons un usage très fréquent dans la suite de ce Mémoire.

P′ et P″ étant deux quantités dépendant d'un ou de plusieurs indices (et, éventuellement, du choix d'un ou de plusieurs points de C) l'affirmation « P″ *est de l'ordre de* P′ » indiquera qu'on peut donner deux inégalités

$$p\,\mathrm{P}' < \mathrm{P}'' < q\,\mathrm{P}',$$

les nombres p et q dépendant seulement de $g(x)$ [plus précisément du maximum et du minimum de $g^1(x)$, du maximum et de la constante de Lipschitz de $g^2(x)$] et non pas des autres arguments, dont dépendent P′ et P″. L'affirmation « P″ *est*

de l'ordre de P′ *au plus* » indiquera qu'on peut donner la deuxième des deux inégalités; l'affirmation « P″ *est de l'ordre de* P′ *au moins* » indiquera qu'on peut donner la première des deux inégalités.

Indiquons par x' et x'' deux points de l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$. *Nous devons étudier le rapport*

$$\frac{g^1_{n_\alpha}(x')}{g^1_{n_\alpha}(x'')}; \tag{13}$$

à part une différence non essentielle dans la forme on peut obtenir (13) en posant, dans le rapport (7), $i = n_\alpha$. Faisons d'abord la remarque que *si* x' *est très voisin de* x'', *de façon que le rapport*

$$\left|\frac{x'-x''}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right| = \left|\frac{x'-x''}{x_{n_{\alpha-1}}-x}\right| = \rho'$$

soit très petit, la différence de (13) *à l'unité est à son tour très petite, de l'ordre de* ρ' *au plus.*

Pour établir cela, il suffit (*voir* le paragraphe 10) de démontrer que la sommation

$$\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \left| g^1(x'_j) - g^1(x''_j) \right| \tag{14}$$

est au plus de l'ordre de ρ'. On a, en vertu du théorème de la moyenne,

$$\frac{\left|\dfrac{x'_j - x''_j}{x_{n_{\alpha-1}+j} - x_j}\right|}{\rho'} = \frac{\dfrac{x'_j - x''_j}{x_{n_{\alpha-1}+j} - x_j}}{\dfrac{x' - x''}{x_{n_{\alpha-1}} - x}} = \frac{\dfrac{x'_j - x''_j}{x' - x''}}{\dfrac{x_{n_{\alpha-1}+j} - x_j}{x_{n_{\alpha-1}} - x}} = \frac{g^1_j(x^*)}{g^1_j(x^{**})},$$

x^* étant dans (x'', x') et x^{**} dans $(x, x_{n_{\alpha-1}})$. Le dernier rapport reste fini, ce qui montre que les rapports

$$\frac{x'_j - x''_j}{x_{n_{\alpha-1}+j} - x_j}$$

sont tous de l'ordre de ρ'. Alors la mesure de la somme des intervalles (x''_j, x'_j) est aussi de l'ordre de ρ'. Enfin la sommation (14) ne dépasse pas la variation de $g^1(x)$ dans la somme des intervalles (x''_j, x'_j). La fonction $g^1(x)$ satisfaisant à la condition de Lispchitz, cette variation est au plus de l'ordre de la mesure de la somme des intervalles.

16. Nous savons déjà que le rapport (13) reste fini. Dans les prochains paragraphes (jusqu'au paragraphe 19) nous allons démontrer que, plus précisément, *ce rapport tend vers* 1 *lorsque* $\alpha \to \infty$. Soit α' une valeur de l'index, fonction de α, telle que α' et $\alpha - \alpha'$ soient infiniment grands pour $\alpha = \infty$: nous allons choisir, par exemple, α' égal au plus grand entier contenu dans $\frac{\alpha}{2}$.

Le $\alpha'^{\text{ième}}$ réseau de C est formé par les $n_{\alpha'} + n_{\alpha'-1}$ intervalles

$$(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}}) \qquad (i < n_{\alpha'}),$$
$$(x_l, x_{l+n_{\alpha'}}) \qquad (l < n_{\alpha'-1}).$$

Considérons l'expression

$$(15) \qquad \sum_{0}^{n_{\alpha'}-1}{}_i \frac{g^2(x_i)}{g^1(x_i)} |x_{i+n_{\alpha'-1}} - x_i| + \sum_{0}^{n_{\alpha'-1}-1}{}_l \frac{g^2(x_l)}{g^1(x_l)} |x_{l+n_{\alpha'}} - x_l|,$$

(15) représente une somme de Riemann de l'intégrale définie

$$\int_x^{x+1} \frac{g^2(x)}{g^1(x)} dx = \int_x^{x+1} d \log g^1(x) = 0;$$

sa valeur est donc donnée par l'erreur qu'on commet en la substituant à l'intégrale. La fonction sous le signe d'intégration étant une fonction de Lipschitz, sa variation dans chaque intervalle est au plus de l'ordre de l'ampleur de l'intervalle; l'erreur considérée est donc au plus de l'ordre de

$$\sum_{0}^{n_{\alpha'}-1}{}_i (x_{i+n_{\alpha'-1}} - x_i)^2 + \sum_{0}^{n_{\alpha'-1}-1}{}_l (x_{l+n_{\alpha'}} - x_l)^2.$$

L'ampleur de chaque intervalle est (§ 13) inférieure à $c_{\alpha'-1}$; on voit enfin que l'erreur considérée est au plus de l'ordre de

$$c_{\alpha'-1} \left\{ \sum_{0}^{n_{\alpha'}-1}{}_i |x_{i+n_{\alpha'-1}} - x_i| + \sum_{0}^{n_{\alpha'-1}-1}{}_l |x_{l+n_{\alpha'}} - x_l| \right\} = c_{\alpha'-1}.$$

La valeur de l'expression (15) *est donc de l'ordre de* $c_{\alpha'-1}$ *au plus.* Après ces remarques, nous allons étudier le rapport

$$(13) \qquad \frac{g^1_{n_\alpha}(x')}{g^1_{n_\alpha}(x'')} = \prod_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \left(1 + \frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)}\right);$$

ce rapport reste fini (§ 10) puisque la sommation $\sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{|g^1(x'_j) - g^1(x''_j)|}{g^1(x''_j)}$ reste bornée; considérons maintenant la sommation

$$(16) \qquad \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)};$$

cette sommation devient infiniment petite lorsque α croît, comme nous allons le démontrer; il en résulte que la différence entre le produit (13) et l'unité devient infiniment petite, et qu'elle est donnée par la sommation (16) lorsqu'on

néglige des quantités, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur ou qui sont de l'ordre de $\rho' c_{\alpha-1}$ au plus (1).

Nous devons donc évaluer l'ordre de grandeur de la sommation (16). Étant donné que nous nous intéressons à l'ordre de grandeur, mais non pas au signe de (16), et du fait que les quantités $(x_j - x_j'')$ sont toutes du même signe, nous pouvons multiplier le terme d'index j par $|x_j' - x_j''|$ et le diviser par $(x_j' - x_j'')$; en appliquant le théorème de la moyenne on obtient la sommation

$$(16^*) \qquad \sum_0^{n_\alpha - 1}{}_j \frac{g^2(x_j^*)}{g^1(x_j'')} |x_j' - x_j''|,$$

les x_j^* étant des points convenablement choisis dans les intervalles (x_j'', x_j').

Soit $(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$ [ou $(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})$] l'intervalle du $\alpha'^{\text{ième}}$ réseau auquel appartient (x_j'', x_j'), son ampleur est plus petite que $c_{\alpha'-1}$; $g^1(x)$ et $g^2(x)$ sont des fonctions de Lipschitz, la différence entre $\frac{g^2(x_i)}{g^1(x_i)}$ et $\frac{g^2(x_j^*)}{g^1(x_j'')}$ est donc de l'ordre de $c_{\alpha'-1}$ au plus. En rappelant (§ 15) que les rapports $\frac{x_j' - x_j''}{x_{n_{\alpha-1}+j} - x_j}$ sont tous de l'ordre de ρ', on trouve facilement que l'erreur totale, qu'on commet en substituant dans la sommation (16^*) $\frac{g^2(x_i)}{g^1(x_i)}$ ou $\frac{g^2(x_l)}{g^1(x_l)}$ à $\frac{g^2(x_j^*)}{g^1(x_j'')}$, est de l'ordre de $\rho' c_{\alpha'-1}$ au plus.

Si alors nous désignons par $f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$ et par $f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})$ la somme des ampleurs des intervalles (x_j'', x_j') contenus dans $(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$ et, respectivement,

---

(1) On a en effet

$$\frac{g^1_{n_\alpha}(x')}{g^1_{n_\alpha}(x'')} = 1 + \sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x_j') - g^1(x_j'')}{g^1(x_j'')} + \frac{1}{2}\sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x_j') - g^1(x_j'')}{g^1(x_j'')}$$
$$\times \left[\sum_0^{n_\alpha-1}{}_l \frac{g^1(x_l') - g^1(x_l'')}{g^1(x_l'')} - \frac{g^1(x_j') - g^1(x_j'')}{g^1(x_j'')}\right] + \dots$$
$$= 1 + \sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x_j') - g^1(x_j'')}{g^1(x_j'')} + \frac{1}{2}\left[\sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x_j') - g^1(x_j'')}{g^1(x_j'')}\right]^2 - \frac{1}{2}\sum_0^{n_\alpha-1}{}_j \left[\frac{g^1(x_j') - g^1(x_j'')}{g^1(x_j'')}\right]^2 + \dots;$$

pour $\alpha \to \infty$ le troisième terme du dernier membre est infiniment petit d'ordre supérieur par rapport au second si celui-ci est infiniment petit; en ce qui concerne le quatrième terme, remarquons que

$$\frac{g^1(x_j') - g^1(x_j'')}{g^1(x_j'')}$$

est au plus de l'ordre de $|x_j' - x_j''|$, donc, à plus forte raison, au plus de l'ordre de $\rho' c_{\alpha-1}$; par conséquent le quatrième terme est au plus de l'ordre de

$$\rho' c_{\alpha-1} \sum_0^{n_\alpha-1}{}_j |x_j' - x_j''| < \rho' c_{\alpha-1}.$$

dans $(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})$, on obtient ainsi l'expression

$$(17) \qquad \sum_{i}^{n_{\alpha'}-1} \frac{g^2(x_i)}{g^1(x_i)} f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}}) + \sum_{l}^{n_{\alpha'-1}-1} \frac{g^2(x_l)}{g^1(x_l)} f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}}),$$

qui donc diffère de (16) d'une quantité de l'ordre de $\rho' c_{\alpha'-1}$ au plus.

Si les $n_{\alpha'} + n_{\alpha'-1}$ rapports

$$\frac{f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})}{|x_i - x_{i+n_{\alpha'-1}}|}, \qquad \frac{f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})}{|x_l - x_{l+n_{\alpha'}}|},$$

qui sont de l'ordre de ρ', étaient exactement égaux entre eux, (17) serait la somme de $n_{\alpha'} + n_{\alpha'-1}$ termes proportionnels à ceux de (15); sa valeur serait alors de l'ordre de $\rho' c_{\alpha'-1}$ au plus; $c_{\alpha'-1}$ est d'autre part (§ 12) plus petit que $p^{\alpha'-\lambda}$, p étant un nombre positif convenable plus petit que 1; la valeur de l'expression (17) serait donc de l'ordre de $\rho' p^{\alpha'}$ au plus.

En réalité les $n_{\alpha'} + n_{\alpha'-1}$ rapports en question ne sont pas exactement égaux; il faudra en tenir compte.

17. Comparons d'abord entre eux les rapports

$$\frac{f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})}{|x_i - x_{i+n_{\alpha'-1}}|} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n_{\alpha'} - 1).$$

Considérons un intervalle (x_j'', x_j') appartenant à l'intervalle $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau *incomplet* et à l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha'-1}})$ du $\alpha'^{\text{ième}}$ réseau *complet*. La transformation $T^i (i < n_{\alpha'})$ amène (x_j'', x_j'), $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ et $(x, x_{n_{\alpha'-1}})$ dans (x_{i+j}'', x_{i+j}'), $(x_{i+j}, x_{i+j+n_{\alpha-1}})$ et $(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$ respectivement.

On a

$$(18') \qquad \frac{\dfrac{x_{i+j}' - x_{i+j}''}{x_{i+j+n_{\alpha-1}} - x_{i+j}}}{\dfrac{x_j' - x_j''}{x_{j+n_{\alpha-1}} - x_j}} = \frac{\dfrac{x_{i+j}' - x_{i+j}''}{x_j' - x_j''}}{\dfrac{x_{i+j+n_{\alpha-1}} - x_{i+j}}{x_{j+n_{\alpha-1}} - x_j}} = \frac{g_i^1(x_j^*)}{g_i^1(x_j^{**})} \qquad (i < n_{\alpha'}),$$

x_j^* et x_j^{**} étant deux points convenables de $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$. Le rapport

$$\left| \frac{x_j^{**} - x_j^*}{x_{n_{\alpha'-1}} - x} \right| \leq \left| \frac{x_{j+n_{\alpha-1}} - x_j}{x_{n_{\alpha'-1}} - x} \right|$$

est (§ 13) au plus de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'-1}}$, par conséquent le rapport (18') est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'-1}}$ au plus (§ 15). Une conclusion tout

à fait analogue est valable pour le rapport

$$\frac{\dfrac{x'_{i-j}-x''_{i-j}}{x_{i+j+n_{\alpha-1}-n_\alpha}-x_{i+j}}}{\dfrac{x'_j-x''_j}{x_{j+n_{\alpha-1}-n_\alpha}-x_j}}, \tag{18''}$$

dans le cas où (x''_j, x'_j) appartient à un intervalle $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}-n_\alpha})$ du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau incomplet.

Si alors on considère tous les intervalles $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ et $(x_j, x_{j-n_{\alpha-1}+n_\alpha})$, qui recouvrent $(x, x_{n_{\alpha'-1}})$, et si l'on additionne les numérateurs et les dénominateurs des rapports correspondants (18') et (18''), on parvient à conclure que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})}{|x_i-x_{i+n_{\alpha'-1}}|}}{\dfrac{f(x, x_{n_{\alpha'-1}})}{|x-x_{n_{\alpha'-1}}|}}$$

est lui aussi égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'-1}}$ au plus. $\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'-1}}$ est d'autre part (§ 13) de l'ordre de $p^{\alpha'}$ au plus.

18. Nous allons maintenant comparer chacun des rapports

$$\frac{f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})}{|x_l-x_{l+n_{\alpha'}}|} \qquad (l=0,1,\ldots,n_{\alpha'-1}-1)$$

$$\frac{f(x, x_{n_{\alpha'-1}})}{|x-x_{n_{\alpha'-1}}|}.$$

Lorsqu'on passe du $\alpha'^{\text{ième}}$ au $\alpha'+1^{\text{ième}}$ réseau, l'intervalle

$$(x, x_{n_{\alpha'-1}}),$$

de module $|k_{\alpha'-1}|$, que nous indiquons ici par A_0, est divisé (§ 12) en deux parties, la première, que nous indiquons par A_1, constituée par $\alpha_{\alpha'}$ intervalles

$$(x_{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}}, x_{n_{\alpha'-1}+(b_{\alpha'}+1)n_{\alpha'}}) \qquad (b_{\alpha'}=0,1,\ldots,a_{\alpha'}-1),$$

de module $|k_{\alpha'}|$, la deuxième, A_2, constituée par un seul intervalle de module $|k_{\alpha'+1}|$,

$$(x, x_{n_{\alpha'+1}}).$$

Les transformations $T^{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}-l}$ portent l'intervalle

$$(x_l, x_{l+n_{\alpha'}}),$$

que nous indiquerons par B_0, dans chacun des $a_{\alpha'}$ intervalles, qui consti-

tuent A_1. Faisons maintenant, pour l'intervalle $(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})$ et pour chaque intervalle $(x_{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}}, x_{n_{\alpha'-1}+(b_{\alpha'}+1)n_{\alpha'}})$, un raisonnement analogue à celui que nous avons fait au paragraphe précédent pour $(x, x_{n_{\alpha'-1}})$ et $(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}})$, et remarquons que l'exposant $n_{\alpha'-1} + b_{\alpha'} n_{\alpha'} - l$ est plus petit que $n_{\alpha'+1}$. Nous arrivons ainsi à conclure que les rapports

$$\frac{\dfrac{f(x_{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}}, x_{n_{\alpha'-1}+(b_{\alpha'}+1)n_{\alpha'}})}{|x_{n_{\alpha'-1}+b_{\alpha'}n_{\alpha'}} - x_{n_{\alpha'-1}+(b_{\alpha'}+1)n_{\alpha'}}|}}{\dfrac{f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})}{|x_l - x_{l+n_{\alpha'}}|}} \qquad (b_{\alpha'} = 0, 1, \ldots, a_{\alpha'} - 1)$$

sont tous égaux à l'unité, à des quantités près, de l'ordre de $\frac{r_{\alpha-1}}{r_{\alpha'}}$ au plus.

Additionnons les premières lignes, et, respectivement, les secondes lignes de ces $a_{\alpha'}$ rapports; indiquons par $m(A_1)$ et $m(B_0)$ la mesure de A_1 et de B_0, et par $f(A_1)$ et $f(B_0)$ la somme des ampleurs des intervalles (x_j'', x_j') contenus, respectivement, dans A_1 et dans B_0. On trouve ainsi que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(A_1)}{m(A_1)}}{\dfrac{f(B_0)}{m(B_0)}}$$

est égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\frac{r_{\alpha-1}}{r_{\alpha'}}$ au plus.

Si l'on passe maintenant du $\alpha'+1^{\text{ième}}$ au $\alpha'+2^{\text{ième}}$ réseau, l'intervalle B_0 est à son tour divisé en une partie B_1, composée par $a_{\alpha'+1}$ intervalles de module $|k_{\alpha'+1}|$, et en une partie B_2, constituée par l'intervalle unique $(x_l, x_{l+n_{\alpha'+2}})$ de module $|k_{\alpha'+2}|$.

On peut amener l'intervalle A_2, $(x, x_{n_{\alpha'+1}})$, dans chacun des $a_{\alpha'+1}$ intervalles, qui composent B_1, par des puissances de T d'exposant inférieur à $n_{\alpha'+2}$. On en déduit, comme plus haut, que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(A_2)}{m(A_2)}}{\dfrac{f(B_1)}{m(B_1)}}$$

est égal à l'unité, à une quantité près, de l'ordre de $\frac{r_{\alpha-1}}{r_{\alpha'+1}}$ au plus. On peut poursuivre.

Le processus se terminera de l'une des deux façons suivantes :

I. Si $\alpha - \alpha' - 1$ est pair, on parviendra à un intervalle $A_{\alpha-\alpha'-1}$ de module $|k_{\alpha-2}|$ et à un intervalle $B_{\alpha-\alpha'-1}$ de module $|k_{\alpha-1}|$. L'intervalle $A_{\alpha-\alpha'-1}$ est divisé en deux parties, la première, $A_{\alpha-\alpha'}$, composée de $a_{\alpha-1}$ intervalles de module $|k_{\alpha-1}|$,

dans chacun desquels il y a un intervalle (x_j'', x_j'), la seconde, $A_{\alpha-\alpha'+1}$, constituée par un seul intervalle de module $|k_\alpha|$, dans lequel il n'y a pas d'intervalles (x_j'', x_j'). Dans l'intervalle $B_{\alpha-\alpha'-1}$ il y a un seul intervalle (x_j'', x_j'). La mesure de $A_{\alpha-\alpha'+1}$ est au plus de l'ordre de celle de $A_{\alpha-\alpha'}$, par conséquent le rapport

$$\frac{m(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})} = \frac{m(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'}) + m(A_{\alpha-\alpha'+1})} < 1$$

reste certainement toujours supérieur à une quantité positive convenable donnée; d'autre part $f(A_{\alpha-\alpha'-1})$ est égale à $f(A_{\alpha-\alpha'})$; on déduit que le rapport

$$\frac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})} = \frac{f(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'})} \frac{m(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}$$

est de l'ordre de ρ'.

D'autre part le rapport $\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{m(B_{\alpha-\alpha'-1})}$ est aussi de l'ordre de ρ'. On reconnaît ainsi que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{m(B_{\alpha-\alpha'-1})}}$$

reste fini.

II. Si $\alpha - \alpha' - 1$ est impair on parviendra, d'une part, à un intervalle $A_{\alpha-\alpha'}$, de module $|k_{\alpha-1}|$, dans lequel il y a un intervalle (x_j'', x_j) et, d'autre part, à un intervalle $B_{\alpha-\alpha'-2}$ de module $|k_{\alpha-2}|$, qui est divisé en une partie $B_{\alpha-\alpha'-1}$ composée de $a_{\alpha-1}$ intervalles de module $|k_{\alpha-1}|$ et en une partie $B_{\alpha-\alpha'}$ constituée par un intervalle de module $|k_\alpha|$, dans lequel il n'y a aucun intervalle (x_j'', x_j').

On reconnaît que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'})}{m(A_{\alpha-\alpha'})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2})}}$$

reste fini.

Dans une note placée à la fin de ce Mémoire, nous montrerons que, dans ces conditions, on peut affirmer que le rapport

$$\frac{\dfrac{f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}})}{|x_l - x_{l+n_{\alpha'}}|}}{\dfrac{f(x, x_{n_{\alpha'-1}})}{|x - x_{n_{\alpha'-1}}|}} = \frac{\dfrac{f(B_0)}{m(B_0)}}{\dfrac{f(A_0)}{m(A_0)}},$$

que nous devions étudier, est égal à l'unité, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\alpha' p^{\alpha'}$ au plus.

19. Nous poserons

$$\frac{f(x, x_{n_{\alpha'-1}})}{|x - x_{n_{\alpha'-1}}|} = \rho^{\star};$$

$\rho^{\star}$ est de l'ordre de ρ'.

D'après ce que nous avons vu dans les deux derniers paragraphes, on pourra écrire

$$f(x_i, x_{i+n_{\alpha'-1}}) = \rho^{\star}(1 + r_i \quad p^{\alpha'})\,|x_i - x_{i+n_{\alpha'-1}}| \qquad (i = 0, 1, \ldots, n_{\alpha'} - 1,)$$
$$f(x_l, x_{l+n_{\alpha'}}) \quad = \rho^{\star}(1 + r_l\, \alpha' p^{\alpha'})\,|x_l - x_{l+n_{\alpha'}}| \qquad (l = 0, 1, \ldots, n_{\alpha'-1} - 1),$$

r_i et r_l étant des nombres pour la valeur absolue desquels on peut donner une borne indépendamment de α.

Si l'on porte ces expressions dans (17), on arrive à conclure que (17) elle-même est de l'ordre de $\rho'\alpha' p^{\alpha'}$ au plus.

Nous avons vu d'autre part, au paragraphe 16, que la différence entre (16) et (17) est au plus de l'ordre de $\rho' c_{\alpha'-1} < \rho' p^{\alpha'-1}$; nous pouvons donc affirmer que (16) est de l'ordre de $\rho'\alpha' p^{\alpha'}$ au plus. Au paragraphe 16 on a également montré que la différence entre le rapport (13) et l'unité est donnée par la sommation (16), lorsqu'on néglige des quantités, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur par rapport à (16) ou qui sont de l'ordre de $\rho' c_{\alpha-1}$ au plus; on en déduit que la différence en question est de l'ordre de $\rho'\alpha' p^{\alpha'}$ au plus. On peut affirmer, en conclusion, qu'*on peut donner une borne pour la valeur absolue de la différence entre le rapport* (13) *et l'unité, de la forme*

$$\rho' \varepsilon_{\alpha},$$

ε_{α} *étant un nombre de l'ordre de* $\alpha' p^{\alpha'}$ $\left(\text{de l'ordre de } \frac{2}{\alpha} p^{\frac{\alpha}{2}}\right)$, *qui tend donc vers zéro pour* $\alpha \to \infty$.

20. Nous devons considérer maintenant le rapport

$$(7') \qquad \frac{\xi_i^1(x')}{\xi_i^1(x'')} \qquad (i < n_{\alpha}),$$

x' et x'' étant deux points de l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$.

Soit $b_{\alpha-1} < a_{\alpha-1}$ le quotient de la division de i par $n_{\alpha-1}$; divisons le reste par $n_{\alpha-2}$, on obtient un deuxième quotient $b_{\alpha-2} < a_{\alpha-2}$ et un deuxième reste. En poursuivant, on arrive à mettre le nombre i sous la forme

$$(19) \qquad i = i_0 = \sum_{0}^{\alpha-1}{}_{\alpha'} b_{\alpha'} n_{\alpha'}.$$

Posons, plus en général,

$$i_{\bar{\alpha}} = \sum_{\bar{\alpha}}^{\alpha-1}{}_{\alpha'} b_{\alpha'} n_{\alpha'}, \qquad i_{\alpha} = 0;$$

on a alors

$$\frac{g_i^1(x')}{g_i^1(x'')} = \prod_0^{\alpha-1} \frac{g^1_{b_{\bar\alpha}-n_{\bar\alpha}}(x'_{i_{\bar\alpha-1}})}{g^1_{b_{\bar\alpha}-n_{\bar\alpha}}(x''_{i_{\bar\alpha-1}})}, \tag{20}$$

et l'on est ramené à l'étude des rapports

$$\frac{g^1_{b_{\bar\alpha}-n_{\bar\alpha}}(x'_{i_{\bar\alpha-1}})}{g^1_{b_{\bar\alpha}-n_{\bar\alpha}}(x_{i_{\bar\alpha-1}})} \equiv \prod_0^{b_{\bar\alpha}-1} \frac{g^1_{n_{\bar\alpha}}(x'_{i_{\bar\alpha-1}+ln_{\bar\gamma}})}{g^1_{n_{\bar\alpha}}(x''_{i_{\bar\alpha-1}+ln_{\bar\gamma}})}. \tag{21}$$

$x'_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha}$ et $x''_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha}$ tombent tous les deux dans l'intervalle limité par les points $x_{i_{\alpha-1}-n_{\alpha-1}}$ et $x_{i_{\alpha-1}-n_{\alpha-1}} + \gamma_{\alpha-1}(x_{i_{\alpha-1}-n_{\alpha-1}}) \equiv x_{i_{\alpha-1}}$; la différence entre le facteur d'index l du deuxième membre de (21) et l'unité ne dépasse donc pas (§ 19) $\frac{|x'_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha} - x''_{i_{\alpha-1}+ln_\gamma}|}{|x_{i_{\alpha-1}-n_{\alpha-1}} - x_{i_{\alpha-1}}|}\varepsilon_{\bar\alpha}$; on a d'autre part

$$\frac{|x'_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha} - x''_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha}|}{|x_{i_{\alpha-1}-n_{\alpha-1}} - x_{i_{\alpha-1}}|} = \frac{|x'_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha} - x''_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha}|}{|x_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha+n_{\alpha-1}} - x_{i_{\alpha-1}+ln_\gamma}|} \times \frac{|x_{i_{\alpha-1}+ln_\gamma+n_{\alpha-1}} - x_{i_{\alpha-1}+ln_\gamma}|}{|x_{i_{\alpha-1}+(l+1)n_\alpha} - x_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha}|} \cdot \frac{|x_{i_{\alpha-1}+(l+1)n_\alpha} - x_{i_{\gamma-1}+ln_\alpha}|}{|x_{i_{\alpha-1}-n_{\gamma-1}} - x_{i_{\alpha-1}}|}. \tag{22}$$

Le premier facteur du second membre est de l'ordre de ρ' au plus, le deuxième est de l'ordre de $\frac{C_{\alpha-1}}{C_{\bar\alpha}}$ au plus. Le facteur d'index l du deuxième nombre de (21) est donc égal à l'unité, à une quantité près qui est au plus de l'ordre de

$$\rho' \frac{C_{\alpha-1}}{C_{\bar\alpha}} \frac{|x_{i_{\alpha-1}+(l+1)n_\alpha} - x_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha}|}{|x_{i_{\alpha-1}-n_{\gamma-1}} - x_{i_{\gamma-1}}|}\varepsilon_{\bar\alpha}. \tag{23}$$

La différence entre le produit (21) et l'unité est alors de l'ordre de la somme des quantités (23) au plus ; en remarquant que les $b_{\bar\alpha}$ intervalles

$$(x_{i_{\alpha-1}+ln_\alpha},\ x_{i_{\alpha-1}+(l+1)n_\alpha})$$

sont contenus dans

$$(x_{i_{\gamma-1}},\ x_{i_{\gamma-1}-n_{\gamma-1}}),$$

on reconnaît que cette différence est au plus de l'ordre de

$$\rho' \frac{C_{\alpha-1}}{C_{\bar\alpha}}\varepsilon_{\bar\alpha}.$$

On aura donc enfin une borne $\rho'\varepsilon'_\alpha$ pour la valeur absolue de la différence entre le rapport (7') et l'unité, de l'ordre de

$$\rho' \sum_0^{\alpha-1} \frac{C_{\alpha-1}}{C_{\bar\alpha}}\varepsilon_{\bar\alpha}; \tag{24}$$

en considérant l'ordre de grandeur des nombres c_α et ε_α, tel qu'il est donné par les résultats des paragraphes 13 et 19, on reconnaît facilement que (24) tend vers zéro pour $\alpha \to \infty$.

21. Au paragraphe 11, nous avons démontré que le rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)} \tag{9}$$

entre deux intervalles contigus de même module $|k_\alpha|$ reste fini lorsque α croît; nous avons déduit cela du fait que le rapport (7) reste fini. Nous allons reprendre le raisonnement développé alors, en tenant compte du fait que les rapports (7') et (13) tendent vers l'unité, lorsque $\alpha \to \infty$.

On reconnaît donc, par les mêmes considérations utilisées au paragraphe 11, que les rapports

$$\frac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\bar{x})}, \qquad \frac{\dfrac{\gamma_\alpha(\bar{x}_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(\bar{x})}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha+i})}{\gamma_\alpha(x_i)}},$$

considérés alors, sont égaux à l'unité, à des quantités près, de l'ordre de ε_α au plus. D'autre part, en rappelant que, dans l'équation

$$\frac{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha+i})}{\gamma_\alpha(x_i)}}{\dfrac{\gamma_\alpha(x_{n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x)}} = \frac{g_i^1(x^*_{n_\alpha})}{g_i^1(x^*)},$$

considérée au même paragraphe 11, on a $i < n_\alpha$ et que x^* représente un point de (x, x_{n_α}) et $x^*_{n_\alpha}$ représente un point de $(x_{n_\alpha}, x_{2n_\alpha})$, on trouve que le premier membre de la même équation est égal à 1, à une quantité près de l'ordre de $\left|\frac{\gamma_i(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right| \varepsilon^*_\alpha$ au plus. On arrive de la sorte à démontrer que *le rapport* (9) *est égal à l'unité, à une quantité près de l'ordre de* $\varepsilon_\alpha + \left|\frac{\gamma_i(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right| \varepsilon^*_\alpha$ *au plus, donc*, à fortiori, *de l'ordre de* $\varepsilon_\alpha + \frac{c_\alpha}{c_{\alpha-1}} \varepsilon^*_\alpha$ *au plus.*

On a démontré, à la fin du paragraphe 11, que, plus en général, si x' est dans (x, x_{n_α}), le rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_\alpha(x)}$$

reste fini. On peut préciser maintenant cette affirmation par un raisonnement analogue à celui qu'on a employé alors et démontrer que *le rapport* $\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_\alpha(x)}$ *est infiniment peu différent de* 1 *lorsque* $\alpha \to \infty$. Choisissons pour cela un entier l de

l'ordre de $\dfrac{1}{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^* \dfrac{c_\alpha}{c_{\alpha-1}}}$; les l quantités

$$|x_{n_\alpha} - x|, \quad |x_{2n_\alpha} - x_{n_\alpha}|, \quad \ldots, \quad |x_{ln_\alpha} - x_{(l-1)n_\alpha}|$$

sont toutes du même ordre et le rapport entre deux consécutives entre elles est infiniment proche de 1. Il en est de même des quantités

$$|x'_{n_\alpha} - x'|, \quad |x'_{2n_\alpha} - x'_{n_\alpha}|, \quad \ldots, \quad |x'_{ln_\alpha} - x'_{(l-1)n_\alpha}|.$$

En remarquant, en outre, que les points

$$x, \quad x', \quad x_{n_\alpha}, \quad x'_{n_\alpha}, \quad x_{2n_\alpha}, \quad x'_{2n_\alpha}, \quad \ldots, \quad x_{l-1\,n_\alpha}, \quad x'_{l-1)n_\alpha}$$

sont ordonnés, on déduit facilement la propriété énoncée.

Considérons enfin le rapport

$$\frac{\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}})}{\gamma_\alpha(x)},$$

entre l'ampleur des deux intervalles (x, x_{n_α}) et $(x_{n_{\alpha-1}}, x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha})$ de module $|k_\alpha|$, homologues par rapport à $T^{n_{\alpha-1}}$. Par des considérations analogues à celles que nous venons d'employer dans l'étude du rapport (9), on démontre que ce rapport est égal à 1, à une quantité près, qui est de l'ordre de $\varepsilon_{\alpha-1} + \left|\dfrac{\gamma_{\alpha-1}(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\right| \varepsilon^*_{\alpha-1}$ au plus, donc, *a fortiori*, de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha-1}$ au plus.

22. En utilisant les résultats de ces derniers paragraphes nous pouvons substituer l'affirmation faite au paragraphe 13 par une autre plus précise. Nous savons maintenant, en effet, que les rapports $\dfrac{g_j^1(x^*)}{g_j^1(x^{**})}$ et $\dfrac{\gamma_{\alpha'}(x_j)}{\gamma_{\alpha'}(\overline{\overline{x}})}$, considérés alors, tendent vers l'unité pour $\alpha' \to \infty$; en reprenant le raisonnement du paragraphe 13 nous pouvons donc affirmer que le rapport

$$\left|\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}\right|$$

ne peut dépasser $\dfrac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$, sinon d'une quantité, qui est infiniment petite d'ordre supérieur pour $\alpha' \to \infty$.

Soit, d'autre part, $\overline{\overline{x}}$ le point de C où $\gamma_\alpha(x)$ atteint son maximum c_α : indiquons par $\overline{\overline{x}}^*$ un point de C tel que l'intervalle $(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{x}}_{n_{\alpha'}})$ soit contenu dans $(\overline{\overline{x}}^*, \overline{\overline{x}}^*_{n_{\alpha'}})$. En convenant maintenant, comme au paragraphe 13, d'indiquer par x et x' deux points de C, en correspondance desquels le rapport $\dfrac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}$ atteint son maximum, on a

$$\left|\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_{\alpha'}(x)}\right| \geq \left|\frac{\gamma_\alpha(\overline{\overline{x}})}{\gamma_\alpha(\overline{\overline{x}}^*)}\right| - \left|\frac{c_\alpha}{\gamma_\alpha(\overline{\overline{x}}^*)}\right| \cdot \frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}.$$

En réunissant les deux résultats obtenus nous pouvons donc affirmer que *le maximum du rapport* $\left|\frac{\gamma_\alpha(x')}{\gamma_\alpha(x)}\right|$ *est égal à* $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha'}}$, *à une quantité infiniment petite d'ordre supérieur près.*

23. Considérons maintenant le rapport

$$\left|\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right|, \tag{25}$$

entre l'ampleur de deux intervalles contigus de module $|k_\alpha|$ et $|k_{\alpha-1}|$. Choisissons une suite monotone de nombres positifs M_α, qui tendent vers l'infini, moins rapidement que $\frac{1}{\varepsilon_\alpha}$. *Nous allons démontrer que, si* $a_\alpha < M_\alpha$, *le rapport* (25) *est égal à* $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$, *à une quantité près, qui est infiniment petite par rapport à* $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$ *pour* $\alpha \to \infty$; *que ce même rapport est encore de l'ordre de* $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$ *si* $a_\alpha < \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$; *et qu'il est enfin de l'ordre de* ε_α *au plus si* $a_\alpha > \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$.

Nous avons déjà vu (§ 12) que, lorsqu'on passe du $\alpha^{\text{ième}}$ au $\alpha+1^{\text{ième}}$ réseau, l'intervalle de module $|k_{\alpha-1}|$,

$$(x, x_{n_{\alpha-1}}),$$

est divisé en un intervalle

$$(x, x_{n_\alpha}),$$

de module $|k_\alpha|$ et d'ampleur $|\gamma_{\alpha+1}(x)|$, et en a_α intervalles

$$(x_{n_{\alpha-1}}, x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}), \quad (x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha}, x_{n_{\alpha-1}+2n_\alpha}), \quad \ldots, \quad (x_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha}, x_{n_{\alpha-1}}), \tag{26}$$

de module $|k_\alpha|$ et d'ampleur respective

$$|\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}})|, \quad |\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+n_\alpha})|, \quad \ldots, \quad |\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+(a_\alpha-1)n_\alpha})|.$$

Considérons un entier $b_\alpha < a_\alpha$; le rapport $\frac{\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha})}{\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+(b_\alpha-1)n_\alpha})}$ entre deux intervalles contigus $(x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha}, x_{n_{\alpha-1}+(b_\alpha+1)n_\alpha})$ et $(x_{n_{\alpha-1}+(b_\alpha-1)n_\alpha}, x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha})$ est égal à l'unité, à une quantité près, qui est de l'ordre de

$$\varepsilon_\alpha + \left|\frac{\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha})}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right|\varepsilon_\alpha^*$$

au plus.

Remarquons maintenant que les intervalles (26), d'ampleur $|\gamma_\alpha(x_{n_{\alpha-1}+b_\alpha n_\alpha})|$, sont contenus dans l'intervalle $(x, x_{n_{\alpha-1}})$, d'ampleur $|\gamma_{\alpha-1}(x)|$. $l \leq a_\alpha$ étant un entier de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon_\alpha}$ au plus, nous voyons par là que le rapport entre les ampleurs de deux quelconques des l premiers intervalles (26) est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de

$$l\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^*$$

au plus; c'est-à-dire que ces l intervalles sont tous du même ordre.

Supposons maintenant $a_\alpha > \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$ et choisissons l de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon_\alpha}$: l'ampleur de chacun des l intervalles sera évidemment au plus de l'ordre de $\frac{|\gamma_{\alpha-1}(x)|}{l}$, c'est-à-dire de $\varepsilon_\alpha|\gamma_{\alpha-1}(x)|$. Le rapport entre le premier de ces l intervalles, $(x_{n_{\alpha-1}}, x_{n_{\alpha-1}+n_{\alpha-1}})$, et l'intervalle (x, x_{n_α}), d'ampleur $|\gamma_\alpha(x)|$, est d'autre part égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de $\varepsilon^*_{\alpha-1}$ au plus (§ 21). On voit donc que $\left|\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right|$ est de l'ordre de ε_α au plus; la dernière partie du lemme est démontrée.

Considérons ensuite le cas où $a_\alpha < \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$; en choisissant $l = a_\alpha$, on voit que les a_α intervalles (26) sont tous du même ordre de grandeur; ils sont alors de l'ordre de $\frac{|\gamma_{\alpha-1}(x)|}{a_\alpha}$ et il en est donc de même de l'intervalle (x, x_{n_α}). $\frac{|\gamma_\alpha(x)|}{|\gamma_{\alpha-1}(x)|}$ est donc de l'ordre de $\frac{1}{a_\alpha}\left(\text{de } \left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|\right)$.

Supposons enfin $a_\alpha < M_\alpha$. Le rapport entre deux quelconques des intervalles (26) est alors égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de

$$a_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^*_\alpha$$

au plus; le rapport entre l'un quelconque des intervalles (26) et l'intervalle (x, x_{n_α}) est égal à 1, à une quantité près, de l'ordre de

$$a_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^*_\alpha + \varepsilon^*_{\alpha-1}$$

au plus. On voit alors qu'on peut donner, pour le rapport (25), l'expression approchée

$$\frac{1}{a_\alpha + \left|\frac{\gamma_{\alpha+1}(x)}{\gamma_\alpha(x)}\right|},$$

en négligeant des quantités qui représentent une fraction du rapport (25) de l'ordre de $a_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^*_\alpha + \varepsilon^*_{\alpha-1} < M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^*_\alpha + \varepsilon^*_{\alpha-1}$ au plus.

Nous avons ramené notre question à la question analogue relative à la valeur successive de l'index. Si l'on a aussi $a_{\alpha+1} < M_\alpha < M_{\alpha+1}$, en appliquant les mêmes considérations au rapport $\frac{|\gamma_{\alpha+1}(x)|}{|\gamma_\alpha(x)|}$ nous pouvons déduire pour (25) la nouvelle expression approchée

$$\cfrac{1}{a_\alpha + \cfrac{1}{a_{\alpha+1} + \cfrac{1}{\left|\frac{\gamma_{\alpha+2}(x)}{\gamma_{\alpha+1}(x)}\right|}}}$$

en négligeant des quantités qui ne représentent certainement pas une fraction de (25) d'ordre plus grand que $M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon^*_\alpha + \varepsilon^*_{\alpha-1}$.

Supposons que, en poursuivant de la sorte, on trouve un premier quotient

incomplet $a_{\alpha^*} > M_\alpha$, nous avons, toujours avec la même approximation, l'expression

$$\cfrac{1}{a_\alpha + \cfrac{1}{a_{\alpha+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_{\alpha^*-1} + \left|\cfrac{\gamma_{\alpha^*}(x)}{\gamma_{\alpha^*-1}(x)}\right|}}}$$

En remarquant d'autre part que, en vertu des considérations déjà développées dans ce paragraphe, le rapport $\left|\frac{\gamma_{\alpha^*}(x)}{\gamma_{\alpha^*-1}(x)}\right|$ est certainement au plus de l'ordre de $\frac{1}{M_\alpha}$, on peut enfin affirmer que le rapport (25) est donné par la fraction continue limitée

$$\cfrac{1}{a_\alpha + \cfrac{1}{a_{\alpha+1} + \cdots + \cfrac{1}{a_{\alpha^*-1}}}},$$

en négligeant une quantité qui ne représente certainement pas une fraction de (25) d'ordre plus grand que

$$M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^* + \varepsilon_{\alpha-1}^* + \frac{1}{M_\alpha}.$$

On trouve d'autre part la même fraction continue lorsqu'on développe $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$ et qu'on néglige le reste $\left|\frac{k_{\alpha^*}}{k_{\alpha^*-1}}\right|$, qui est au plus de l'ordre de $\frac{1}{M_\alpha}$. La première partie du lemme est donc démontrée dans ce cas. Dans l'autre cas, où les entiers $a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, a_{\alpha+3}, \ldots$ ne dépassent jamais M_α, on peut déduire, pour le rapport (25) et pour $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$, le même développement en fraction continue illimitée, en négligeant une fraction du rapport (25), de l'ordre de $M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^* + \varepsilon_{\alpha-1}^*$ au plus. Le lemme est maintenant complètement démontré.

Il importe de remarquer que le résultat énoncé pour le rapport $\left|\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right|$ *est valable aussi pour le rapport* $\frac{C_\alpha}{C_{\alpha-1}}$.

24. La borne

$$\rho' \varepsilon_\alpha$$

pour la valeur absolue de la différence entre le rapport (13′) et l'unité, telle qu'elle nous est donnée par la méthode déjà exposée, n'est pas suffisamment petite pour la démonstration du théorème A.

Nous allons supposer, par la suite, α assez grand pour que les nombres ε_α et ε_α^* soient déjà assez petits en vertu de la méthode précédente, et nous allons déduire, par une nouvelle méthode, les nombres ε_α et ε_α^* pour les valeurs supérieures de l'index.

Nous supposons, dans les déductions qui vont suivre, $c_{\alpha-1}$ *infiniment petit par rapport à* ε_α *pour* $\alpha \to \infty$; nous montrerons *a posteriori*, au paragraphe 30, qu'une telle hypothèse est permise.

De l'hypothèse, que nous venons de faire, et de ce qu'on a vu dans une Note en bas de page au paragraphe 16, on déduit que la différence entre le rapport (13) et l'unité est donnée, à des quantités près, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur, par la sommation

$$(16) \qquad \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^1(x'_j) - g^1(x''_j)}{g^1(x''_j)};$$

en remarquant que l'ampleur des intervalles (x_j, x'_j) et (x_j, x''_j) est certainement inférieure à $c_{\alpha-1}$, on reconnaît, par un raisonnement déjà développé au paragraphe 16, qu'on peut substituer à la sommation (16) la suivante :

$$(27) \qquad \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^2(x_j)}{g^1(x_j)}(x'_j - x''_j);$$

l'erreur qu'on commet est de l'ordre de $\varphi' c_{\alpha-1}$ au plus.

Les n_α intervalles (x''_j, x'_j) sont contenus dans les n_α intervalles $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ de module $|k_{\alpha-1}|$ du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau; cela nous suggère de considérer d'abord la sommation

$$(28) \qquad \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^2(x_j)}{g^1(x_j)}(x_{j+n_{\alpha-1}} - x_j) \equiv \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^2(x_j)}{g^1(x_j)} \gamma_{\alpha-1}(x_j).$$

On peut substituer à cette sommation l'intégrale

$$\int \frac{g^2(x)}{g^1(x)}\,dx,$$

étendue à l'ensemble des intervalles $(x_j, x_{n_{\alpha-1}+j})$; on voit, comme au paragraphe 16, que l'erreur que l'on commet de la sorte est de l'ordre de $c_{\alpha-1}$ au plus. Enfin, l'intégrale étendue à C tout entière étant nulle, l'intégrale définie considérée est égale, au signe près, à l'intégrale étendue à l'ensemble complémentaire constitué par les $n_{\alpha-1}$ intervalles (x_j, x_{j+n_α}) de module $|k_\alpha|$ du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau. .

Pour évaluer cette dernière intégrale, remarquons d'abord que, lorsqu'on passe du $\alpha - 1^{\text{ième}}$ au $\alpha^{\text{ième}}$ réseau, les intervalles de module $|k_{\alpha-2}|$ sont divisés chacun en $a_{\alpha-1}$ intervalles de module $|k_{\alpha-1}|$ et un de module $|k_\alpha|$; au contraire les intervalles de module $|k_{\alpha-1}|$ ne sont pas divisés. On voit donc que chaque intervalle (x_j, x_{j+n_α}) du $\alpha^{\text{ième}}$ réseau appartient à un intervalle $(x_j, x_{j+n_{\alpha-1}})$ du $\alpha - 1^{\text{ième}}$ réseau.

Cela posé, considérons la différence entre le rapport

$$\frac{g^1_{n_{\alpha-1}}(x_{n_\alpha})}{g^1_{n_{\alpha-1}}(x)}$$

et l'unité; cette différence ne dépasse pas $\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\,\varepsilon_{\alpha-1}$, d'autre part elle est donnée, à une quantité près, qui est infiniment petite d'ordre supérieur pour $\alpha \to \infty$, par la sommation

$$\sum_0^{n_{\alpha-1}-1} \frac{g^1(x_{j+n_\alpha}) - g^1(x_j)}{g^1(x_j)}$$

La différence entre le terme d'index j de cette sommation et l'intégrale

$$\int_{x_j}^{x_{j+n_\alpha}} \frac{g^2(x)}{g^1(x)}\,dx$$

est de l'ordre de $(x_{j+n_\alpha} - x_j)^2$ au plus; la différence entre la sommation elle-même et l'intégrale étendue aux $n_{\alpha-1}$ intervalles (x_j, x_{j+n_α}), que nous devions évaluer, est au plus de l'ordre de

$$= \sum_0^{n_{\alpha-1}-1} (x_{j+n_\alpha} - x_j)^2$$

$$= \sum_0^{n_{\alpha-1}-1} \left[\frac{\gamma_\alpha(x_j)}{\gamma_{\alpha-2}(x_j)}(x_{n_{\alpha-2}+j} - x_j)\right]^2 < \left(\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\right)^2 c_{\alpha-2} \sum_0^{n_{\alpha-1}-1} |x_{j+n_{\alpha-2}} - x_j| < \left(\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\right)^2 c_{\alpha-2};$$

on voit enfin que la différence considérée est de l'ordre de c_α au plus. Il faut remarquer que, pour établir la première inégalité, nous avons supposé que tous les rapports $\frac{\gamma_\alpha(x_j)}{\gamma_{\alpha-2}(x_j)}$ étaient égaux à $\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}$; l'erreur totale commise de la sorte est toutefois infiniment petite d'ordre supérieur pour $\alpha \to \infty$ par rapport à $\left(\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}\right)^2 c_{\alpha-2} < c_\alpha$.

Il résulte donc que l'intégrale considérée ne dépasse pas $\varepsilon_{\alpha-1}\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}$, en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur; enfin, en négligeant une quantité de l'ordre de $c_{\alpha-1}$ au plus, on déduit que la sommation (28) ne dépasse pas

$$\varepsilon_{\alpha-1}\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)}.$$

25. Reprenons l'étude de la sommation

$$\sum_0^{n_\alpha-1} \frac{g^2(x_j)}{g_1(x_j)}(x'_j - x''_j). \tag{27}$$

Si les rapports

$$\left|\frac{x'_j - x''_j}{\gamma_{\alpha-1}(x_j)}\right|$$

étaient tous égaux à $\left|\frac{x' - x''}{\gamma_{\alpha-1}(x)}\right| = \rho'$, on aurait, pour la valeur absolue de la sommation (27), la borne

$$\rho'\varepsilon_{\alpha-1}\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)},$$

en négligeant une quantité de l'ordre de $c_{\alpha-1}\rho'$ au plus. En réalité, les rapports en question ne sont pas exactement égaux et il est donc nécessaire de tenir compte du terme

$$(29)\qquad \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^2(x_j)}{g_1(x_j)}\{\rho' |\gamma_{\alpha-1}(x_j)| - |x_j'-x_j''|\};$$

nous devons déterminer une borne pour la valeur absolue de ce terme.

Choisissons, dans $(x, x_{n_{\alpha-1}})$, un point $\bar{x}$ quelconque, et deux points x''' et x^{IV} de façon que l'intervalle (x', x'') soit compris dans (x''', x^{IV}); posons

$$\left|\frac{x'''-x^{\text{IV}}}{\gamma_{\alpha-1}(\bar{x})}\right| = \rho''' \qquad (\rho''' \geqq \rho').$$

Considérons la sommation

$$(30)\qquad \sum_{0}^{n_\alpha-1}{}_j \frac{g^2(\bar{x}_j)}{g^1(x_j)}\left\{\frac{\rho'}{\rho'''}|x_j'''-x_j^{\text{IV}}| - |x_j'-x_j''|\right\},$$

qui se réduit à la sommation (29) pour $\bar{x}=x$, $x^{\text{IV}}=x$, $x'''=x_{n_{\alpha-1}}$; nous allons donner une borne pour la valeur absolue de cette expression plus générale. Nous avons

$$\frac{\left|\frac{x_j'-x_j''}{x_j'''-x_j^{\text{IV}}}\right|}{\frac{\rho'}{\rho'''}} = \frac{\frac{x_j'-x_j''}{x_j'''-x_j^{\text{IV}}}}{\frac{x'-x''}{x'''-x^{\text{IV}}}} = \frac{\frac{x_j'-x_j''}{x'-x''}}{\frac{x_j'''-x_j^{\text{IV}}}{x'''-x^{\text{IV}}}} = \frac{g_j^1(x^*)}{g_j^2(x^{**})},$$

x^* et x^{**} étant deux points convenablement choisis dans (x^{IV}, x'''); la valeur absolue de la différence entre $\frac{g_j^1(x^*)}{g_j^1(x^{**})}$ et l'unité ne dépasse pas $\rho'''\varepsilon_\alpha^*$. On en déduit

$$\left|\frac{\rho'}{\rho'''}|x_j'''-x_j^{\text{IV}}| - |x_j'-x_j''|\right| < \rho'|x_j'''-x_j^{\text{IV}}|\varepsilon_\alpha^* = \rho'\rho'''\varepsilon_\alpha^*|\gamma_{\alpha-1}(x_j)|,$$

l'égalité entre le deuxième et le troisième membre n'ayant lieu qu'à des quantités près, qui sont infiniment petites d'ordre supérieur pour $\alpha \to \infty$.

On voit alors qu'on peut donner, pour la valeur absolue de la sommation (30), une borne de la forme $\rho'\rho'''\bar{\varepsilon}_\alpha$, $\bar{\varepsilon}_\alpha$ étant un nombre indépendant de x, de ρ' et de ρ''', qu'on peut supposer infiniment petit pour $\alpha \to \infty$.

Nous trouvons ainsi, pour la valeur absolue de la sommation (29), la borne

$$\rho'\bar{\varepsilon}_\alpha,$$

ce qui donne, pour la valeur abolue de (27), la borne

$$\rho'\varepsilon_\alpha = \rho'\varepsilon_{\alpha-1}\frac{\gamma_\alpha(x)}{\gamma_{\alpha-2}(x)} + \rho'\bar{\varepsilon}_\alpha.$$

Il nous reste à montrer de quelle façon on peut évaluer ε_α en fonction des quantités analogues d'index inférieur.

26. Si l'on divise un nombre $j < n_\alpha$ par $n_{\alpha-1}$, et si l'on pose

$$j = b_{\alpha-1} n_{\alpha-1} + j',$$

on a, ou bien $b_{\alpha-1} < a_{\alpha-1}$, $j' < n_{\alpha-1}$, ou bien $b_{\alpha-1} = a_{\alpha-1}$, $j' < n_{\alpha-2}$.

Nous pouvons donc écrire (3o) de la façon suivante :

$$(3o') \quad \sum_0^{a_{\alpha-1}-1} \sum_0^{n_{\alpha-1}-1} \frac{g^2(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})} \left\{ \frac{\rho'}{\rho'''} |x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}| - |x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}| \right\}$$

$$+ \sum_0^{n_{\alpha-1}-1} \frac{g^2(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})} \left\{ \frac{\rho'}{\rho'''} |x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\mathrm{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}| - |x'_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}| \right\}.$$

Nous devons transformer encore (3o'). On a, pour $b_{\alpha-1} = 0, 1, \ldots, a_{\alpha-1}$,

$$\frac{\left| \dfrac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}} \right|}{\dfrac{\rho'}{\rho'''}} = \frac{\dfrac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x' - x''}}{\dfrac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x''' - x^{\mathrm{IV}}}} = \frac{g^1_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}(x^*_{(b_{\alpha-1})})}{g^1_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}(x^{**}_{(b_{\alpha-1})})},$$

$x^*_{(b_{\alpha-1})}$ et $x^{**}_{(b_{\alpha-1})}$ étant des points convenablement choisis dans (x^{IV}, x'''). On reconnaît, par un raisonnement déjà utilisé au paragraphe 20, que la valeur absolue de la différence entre $\frac{g^1_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}(x^*_{(b_{\alpha-1})})}{g^1_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}(x^{**}_{(b_{\alpha-1})})}$ et 1 ne dépasse pas $\rho''' \varepsilon_{\alpha-1}$. On tire de là

$$\frac{\rho'}{\rho'''} = \left| \frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}} \right| + r_{b_{\alpha-1}} \varepsilon_{\alpha-1} \rho',$$

$r_{b_{\alpha-1}}$ étant des coefficients, dont la valeur absolue ne dépasse pas 1.

Si l'on introduit dans (3o') ces expressions pour $\frac{\rho'}{\rho'''}$ on obtient

$$(3o'') \quad \sum_0^{a_{\alpha-1}-1} \sum_0^{n_{\alpha-1}-1} \frac{g^2(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}$$

$$\times \left\{ \left| \frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}} \right| |x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}| - |x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}| \right\}$$

$$+ \sum_0^{n_{\alpha-1}-1} \frac{g^2(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}$$

$$\times \left\{ \left| \frac{x'_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}} - x^{\mathrm{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}} \right| |x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\mathrm{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}| - |x'_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}| \right\}$$

$$+ \rho' \varepsilon_{\alpha-1} \sum_0^{a_{\alpha-1}-1} r_{b_{\alpha-1}} \sum_0^{n_{\alpha-1}-1} \frac{g^2(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})} |x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}|$$

$$+ \rho' \varepsilon_{\alpha-1} r_{\alpha-1} \sum_0^{n_{\alpha-1}-1} \frac{g^2(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})}{g^1(\overline{x}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'})} |x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'} - x^{\mathrm{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}|.$$

Nous allons établir une borne pour la valeur absolue de (3o″), en admettant, toutefois, qu'on puisse négliger des quantités infiniment petites d'ordre supérieur.

Choisissons un point $\bar{\bar{x}}$ de façon que les $a_{\alpha-1}$ intervalles $(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}, x_{(b_{\alpha-1}+1)n_{\alpha-1}})$ $(b_{\alpha-1}=0, 1, \ldots, a_{\alpha-1})$ soient intérieurs à l'intervalle $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{x}}_{n_{\alpha-2}})$. Si, dans la sommation par rapport à j' dans la première et la seconde lignes de (3o″), on divise le numérateur et le dénominateur de $\left|\frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}\right|$ par $\left|\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})\right|$, on a une expression de la forme (3o); il suffit de substituer α par $\alpha-1$, x par $\bar{\bar{x}}$ et $x', x'', x''', x^{\mathrm{IV}}$ par $x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}$, $x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}$, $x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}$, $x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}$. On a alors, pour la valeur absolue de cette sommation, la borne

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\left|\frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|\left|\frac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|.$$

En négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur, on a

$$\left|\frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|=\left|\frac{x'_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}\right|\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|=\rho'\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|,$$

$$\left|\frac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|=\left|\frac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}\right|\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|=\rho'''\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|;$$

on peut donc substituer la borne précédente par

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\left[\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right]^2\rho'\rho'''.$$

Supposons d'abord $a_{\alpha-1}<\mathrm{M}_{\alpha-1}$ (1); on a

$$\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|=\frac{\gamma_{\alpha-2}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}\right|;$$

à un facteur près, qui est infiniment petit pour $\alpha\to\infty$, le premier facteur du second membre est égal à 1 (§ 21), le deuxième est égal à $\left|\frac{k_{\alpha-1}}{k_{\alpha-2}}\right|$ (§ 23); on a alors, pour la valeur absolue de la sommation double de la première ligne de (3o″), la borne

$$a_{\alpha-1}\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\frac{k^2_{\alpha-1}}{k^2_{\alpha-2}}\rho'\rho'''.$$

En tous cas, du fait que les $a_{\alpha-1}$ intervalles $(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}, x_{(b_{\alpha-1}+1)n_{\alpha-1}})$ sont contenus dans $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{x}}_{n_{\alpha-2}})$, on a, en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur,

$$\sum_{0}^{a_{\alpha-1}-1}{}_{b_{\alpha-1}}\left[\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right]^2<\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\sum_{0}^{a_{\alpha-1}-1}{}_{b_{\alpha-1}}\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{\bar{x}})}\right|<\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}.$$

(1) Les nombres M_α ont été introduits au paragraphe 23.

et l'on trouve, pour la valeur absolue de la même sommation double, la borne

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\rho'\rho'''.$$

Considérons maintenant la sommation par rapport à j' de la troisième et la quatrième lignes de (3o″) : si l'on divise le numérateur et le dénominateur de $\left|\frac{x'_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}-x''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}}{x'''_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}-x^{\mathrm{IV}}_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}+j'}}\right|$ par $|\gamma_{\alpha-3}(x)|$, on trouve encore une expression de la forme (3o), relative, cette fois, à la valeur $\alpha-2$ de l'index. On a alors, pour cette même sommation, la borne

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-2}\left[\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{a_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-3}(x)}\right]^2\rho'\rho''',$$

qu'on peut substituer, si $a_{\alpha-1}<\mathrm{M}_{\alpha-1}$ et $a_{\alpha-2}<\mathrm{M}_{\alpha-2}$, par

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-2}\frac{k^2_{\alpha-1}}{k^2_{\alpha-3}}\rho'\rho''',$$

et, en tous cas, par

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha-2}\frac{c^2_{\alpha-1}}{c^2_{\alpha-3}}\rho'\rho'''.$$

Considérons après cela la sommation par rapport à j' dans la cinquième ligne de (3o″) : on reconnaît qu'elle est de la forme (27), relative à la valeur $\alpha-1$ de l'index; une borne pour la valeur absolue de cette sommation est donc donnée par

$$\varepsilon_{\alpha-1}\left|\frac{x'''_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}-x^{\mathrm{IV}}_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}}}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{x})}\right|;$$

en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur, on peut substituer à cette valeur la suivante :

$$\varepsilon_{\alpha-1}\left|\frac{\gamma_{\alpha-1}(x_{b_{\alpha-1}n_{\alpha-1}})}{\gamma_{\alpha-2}(\bar{x})}\right|\rho'''.$$

On voit alors que la valeur absolue de la sommation double de la troisième ligne de (31) ne dépasse pas

$$\varepsilon^2_{\alpha-1}\rho'\rho'''.$$

Enfin, pour la valeur absolue de la sommation de la sixième ligne de (3o″), on trouve la borne

$$\varepsilon_{\alpha-1}\varepsilon_{\alpha-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\rho'\rho'''.$$

En conclusion on trouve, pour la valeur absolue de (3o″), la borne

$$(31')\qquad c_{\alpha-1}\frac{k^2_{\alpha-1}}{k^2_{\alpha-2}}\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\rho'\rho'''+\frac{k^2_{\alpha-1}}{k^2_{\alpha-3}}\bar{\varepsilon}_{\alpha-2}\rho'\rho'''+\varepsilon^2_{\alpha-1}\rho'\rho'''+\varepsilon_{\alpha-1}\varepsilon_{\alpha-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\rho'\rho''',$$

valable lorsque $a_{\alpha-1} < M_{\alpha-1}$ et $a_{\alpha-2} < M_{\alpha-2}$, et la borne

$$(31'') \qquad \frac{C_{\alpha-1}}{C_{\alpha-2}}\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}\rho'\rho''' + \left(\frac{C_{\alpha-1}}{C_{\alpha-2}}\right)^2\bar{\varepsilon}_{\alpha-2}\rho'\rho''' + \varepsilon_{\alpha-1}^2\rho'\rho''' + \varepsilon_{\alpha-1}\varepsilon_{\alpha-2}\frac{C_{\alpha-1}}{C_{\alpha-3}}\rho'\rho''',$$

valable dans tous les cas.

En rassemblant ici les résultats de ces deux derniers paragraphes, nous pouvons conclure : *on peut déterminer le nombre* ε_α *par l'équation*

$$(32) \qquad \varepsilon_\alpha = \frac{C_\alpha}{C_{\alpha-2}}\varepsilon_{\alpha-1} + \bar{\varepsilon}_\alpha.$$

Le nombre $\bar{\varepsilon}_\alpha$ *peut à son tour être déterminé par l'équation*

$$(33') \qquad \bar{\varepsilon}_\alpha = a_{\alpha-1}\frac{k_{\alpha-1}^2}{k_{\alpha-2}^2}\bar{\varepsilon}_{\alpha-1} + \frac{k_{\alpha-1}^2}{k_{\alpha-3}^2}\bar{\varepsilon}_{\alpha-2} + \varepsilon_{\alpha-1}^2 + \varepsilon_{\alpha-1}\varepsilon_{\alpha-2}\frac{C_{\alpha-1}}{C_{\alpha-3}},$$

lorsque $a_{\alpha-1} < M_{\alpha-1}$ *et* $a_{\alpha-2} < M_{\alpha-2}$; *il peut, en tout cas, être déterminé par l'équation*

$$(33'') \qquad \bar{\varepsilon}_\alpha = \frac{C_{\alpha-1}}{C_{\alpha-2}}\bar{\varepsilon}_{\alpha-1} + \left(\frac{C_{\alpha-1}}{C_{\alpha-3}}\right)^2\bar{\varepsilon}_{\alpha-2} + \varepsilon_{\alpha-1}^2 + \varepsilon_{\alpha-1}\varepsilon_{\alpha-2}\frac{C_{\alpha-1}}{C_{\alpha-3}}.$$

Il est toutefois nécessaire de rappeler que (32) d'un côté, (33') et (33'') de l'autre, ne sont pas des relations exactes : nous pouvons, en toute rigueur, affirmer que *les nombres* ε_α *et* $\bar{\varepsilon}_\alpha$ *peuvent être choisis de façon à ne pas dépasser les seconds membres de ces relations, sinon de quantités infiniment petites d'ordre supérieur pour* $\alpha \to \infty$.

27. On voit facilement qu'on peut supposer $\bar{\varepsilon}_\alpha$ de l'ordre de ε_α. En effet, d'après (33''), on doit choisir ε_α plus grande que $\frac{C_{\alpha-1}}{C_{\alpha-2}}\varepsilon_{\alpha-1}$. De là et de l'équation (32), on déduit que $\bar{\varepsilon}_\alpha$ est de l'ordre de ε_α si $\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}$ est de l'ordre de $\varepsilon_{\alpha-1}$; il n'est pas possible, d'autre part, que le rapport $\frac{\bar{\varepsilon}_\alpha}{\varepsilon_\alpha}$ devienne graduellement très petit, parce que, si $\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}}{\varepsilon_{\alpha-1}}$ est très petit, on voit, par ces mêmes équations, que $\frac{\bar{\varepsilon}_\alpha}{\varepsilon_\alpha} > \frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha-1}}{\varepsilon_{\alpha-1}}$.

28. On démontrera très facilement le théorème A lorsqu'on aura fait voir qu'*on peut choisir les nombres* ε_α *de façon qu'ils deviennent, pour* $\alpha \to \infty$, *plus petits que toute puissance de* $|k_{\alpha-1}|\left(\text{de } \frac{1}{n_\alpha}\right)$ *d'exposant positif donné plus petit que* 1.

D'après le paragraphe précédent, on peut démontrer le même lemme pour les nombres $\bar{\varepsilon}_\alpha$.

Pour une valeur α_1 de l'index nous pouvons envisager les cas suivants :

1. Supposons d'abord $a_{\alpha_1-1} > \frac{1}{\varepsilon_{\alpha_1-1}}$; alors (§ 23) $\frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}$ est au plus de l'ordre de ε_{α_1-1}. Dans le second membre de (33″) le premier et le troisième termes sont de l'ordre de $\bar{\varepsilon}^2_{\alpha_1-1}$ au plus, le deuxième et le quatrième termes sont infiniment petits d'ordre supérieur par rapport à $\bar{\varepsilon}^2_{\alpha_1-1}$; *il est alors possible de choisir* $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}$ *de l'ordre de* $\bar{\varepsilon}^2_{\alpha_1-1}$. Remarquons que $\frac{\varepsilon_{\alpha_1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}}$ est de l'ordre de $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}$ et que $\frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}$ est de l'ordre de $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}$ au plus; en multipliant éventuellement la valeur de $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}$, telle qu'elle nous est donnée par (33″), par un facteur borné, nous pouvons donc satisfaire à l'inégalité

$$\frac{\varepsilon_{\alpha_1}}{\varepsilon_{\alpha_1-1}} > \frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}. \tag{34}$$

2. Supposons en deuxième lieu $\frac{1}{\varepsilon_{\alpha_1-1}} > a_{\alpha_1-1} > M_{\alpha_1-1}$. Le second membre de (33″) est de l'ordre de $\frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}$; $\frac{c_{\alpha_1-1}}{c_{\alpha_1-2}}$ est d'autre part (§ 23) de l'ordre de $\left|\frac{k_{\alpha_1-1}}{k_{\alpha_1-2}}\right|$; *on peut choisir dans ce cas* $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}$ *de l'ordre de*

$$\left|\frac{k_{\alpha_1-1}}{k_{\alpha_1-2}}\right|\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}.$$

On peut supposer, comme dans le cas 1, que l'inégalité (34) soit satisfaite.

3. Supposons $a_{\alpha_1-1} < M_{\alpha_1-1}$, mais $a_{\alpha_1-2} > M_{\alpha_1-2}$. (33″) montre que, dans ce cas aussi, *on peut choisir* $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}$ *de l'ordre de* $\left|\frac{k_{\alpha_1-1}}{k_{\alpha_1-2}}\right|\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}$ et de façon à satisfaire (34).

4. Supposons enfin $a_{\alpha_1-1} < M_{\alpha_1-1}$ et $a_{\alpha_1-2} < M_{\alpha_1-2}$. Utilisons dans ce cas (33′) : en rappelant ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 26 et en remarquant que le troisième et le quatrième termes du second membre sont infiniment petits d'ordre supérieur par rapport au premier, on déduit, en divisant par $k^2_{\alpha_1-1}$,

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}}{k^2_{\alpha_1-1}} = (1+\mu_{\alpha_1})\left\{a_{\alpha_1-1}\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}}{k^2_{\alpha_1-2}} + \frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-2}}{k^2_{\alpha_1-3}}\right\}, \tag{35}$$

μ_{α_1} étant une quantité positive, qu'on peut supposer infiniment petite pour $\alpha_1 = \infty$.

Si l'on a aussi

$$a_{\alpha_1} < M_{\alpha_1}, \qquad a_{\alpha_1+1} < M_{\alpha_1+1}, \qquad \ldots, \qquad a_{\alpha_1+j} < M_{\alpha_1+j} \qquad (j \geq 0),$$

on pourra considérer, à côté de l'équation (35), $j+1$ équations analogues, en introduisant $j+1$ nombres positifs $\mu_{\alpha_1+1}, \mu_{\alpha_1+2}, \ldots, \mu_{\alpha_1+j+1}$. Soit alors $\alpha_2 > \alpha_1$ la plus grande valeur de l'indice telle que

$$a_{\alpha_1} < M_{\alpha_1}, \qquad a_{\alpha_1+1} < M_{\alpha_1+1}, \qquad \ldots, \qquad a_{\alpha_2-2} < M_{\alpha_2-2}$$

et

$$\mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_1+1} + \ldots + \mu_{\alpha_2-1} < 1 ; \tag{36}$$

ajoutons à l'équation (35) les suivantes :

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}}{k^2_{\alpha_1}} = (1+\mu_{\alpha_1-1})\left\{\alpha_{\alpha_1}\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1}}{k^2_{\alpha_1-1}} + \frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}}{k^2_{\alpha_1-2}}\right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}}{k^2_{\alpha_2-2}} = (1+\mu_{\alpha_2-1})\left\{\alpha_{\alpha_2-2}\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-2}}{k^2_{\alpha_2-3}} + \frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-3}}{k^2_{\alpha_2-3}}\right\}.$$

Les nombres $\frac{\bar{\varepsilon}_\alpha}{k^2_{\alpha-1}}$ satisferaient, s'il n'y avait pas les coefficients $(1+\mu_\alpha)$, aux mêmes équations récurrentes que m_α et n_α; une solution de ces équations est de la forme $m_\alpha + cn_\alpha$ (c constant) et ne peut donc pas croître (lorsque α croît) plus rapidement que m_α, n_α, ou $\left|\frac{1}{k_{\alpha-1}}\right|$. On pourrait alors en déduire que

$$\frac{\dfrac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}}{k^2_{\alpha_2-2}}}{\dfrac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}}{k^2_{\alpha_1-2}}}$$

est au plus de l'ordre de $\left|\frac{k_{\alpha_1-2}}{k_{\alpha_2-2}}\right|$ et, de là, que $\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}$ *est au plus de l'ordre de* $\varepsilon_{\alpha_1-1}\left|\frac{k_{\alpha_2-2}}{k_{\alpha_1-2}}\right|$. On reconnaît d'ailleurs immédiatement que cette conclusion reste valable, en vertu de (36), lorsqu'on tient compte des coefficients $(1+\mu_\alpha)$.

Étant donné que les rapports

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha''}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha'}}, \quad \frac{\alpha_{\alpha''-1}}{\alpha_{\alpha'-1}} \qquad (\alpha_1 - 1 \leq \alpha' < \alpha'' \leq \alpha_2 - 1)$$

sont du même ordre de grandeur, on peut toujours, en augmentant éventuellement les nombres ε_α sans changer leur ordre de grandeur, faire en sorte que le premier des deux rapports soit toujours plus grand que le second; (34) sera donc satisfaite.

Nous devons distinguer le cas 4 en deux cas, 4′ et 4″, suivant que la sommation

$$\mu_{\alpha_1} + \mu_{\alpha_1+1} + \ldots + \mu_{\alpha_2}$$

dépasse ou non l'unité. Il est nécessaire de remarquer que, dans le cas 4′, le nombre $\alpha_2 - \alpha_1$ augmente indéfiniment pour $\alpha_1 \to \infty$.

Après avoir considéré ces différents cas, définissons la suite croissante d'entiers $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_i, \ldots$ de la façon suivante : $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 1$, si pour α nous sommes dans les cas 1, 2, 3; si pour α_i nous sommes dans le cas 4, α_{i+1} doit être choisi à partir de α_i de la même façon que α_2 à partir de α_1.

Faisons la remarque que, pour $\alpha_i \to \infty$, les rapports

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_{i+1}-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_i-1}}, \qquad \left|\frac{k_{\alpha_{i+1}-2}}{k_{\alpha_i-2}}\right|$$

deviennent infiniment petits, excepté éventuellement le cas où, pour α_i, nous sommes dans 3 ou 4″. Remarquons aussi que, si le cas 3 se présente pour α_i, il ne se présente certainement pas pour α_{i+1}; si, d'autre part, nous sommes dans le cas 4″ pour α_{i+1}, nous sommes nécessairement dans le cas 1 ou 2 pour α_{i+2}.

On aura donc au plus deux entiers consécutifs de la suite, correspondant aux cas 3 ou 4″.

29. La démonstration du lemme énoncé au début du paragraphe précédent est désormais très facile : nous allons montrer que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log|k_{\alpha_i-2}|}{\log \bar{\varepsilon}_{\alpha_i-1}} = 1.$$

On a

$$\frac{\log|k_{\alpha_i-2}|}{\log \bar{\varepsilon}_{\alpha_i-1}} = \frac{\log|k_{\alpha_1-2}| + \log\left|\frac{k_{\alpha_2-2}}{k_{\alpha_1-2}}\right| + \log\left|\frac{k_{\alpha_3-2}}{k_{\alpha_2-2}}\right| + \ldots + \log\left|\frac{k_{\alpha_{j+1}-2}}{k_{\alpha_j-2}}\right| + \ldots + \log\left|\frac{k_{\alpha_i-2}}{k_{\alpha_{i-1}-2}}\right|}{\log \bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1} + \log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_1-1}} + \log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_3-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_2-1}} + \ldots + \log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_{j+1}-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_j-1}} + \ldots + \log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_i-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_{i-1}-1}}}.$$

Chaque terme $\log\left|\frac{k_{\alpha_{j+1}-2}}{k_{\alpha_j-2}}\right|$ du numérateur ou $\log\frac{\bar{\varepsilon}_{\alpha_{j+1}-1}}{\bar{\varepsilon}_{\alpha_j-1}}$ du dénominateur est négatif et il devient, lorsque l'indice croît, infiniment grand en valeur absolue, si l'on n'est pas, pour α_j, dans les cas 3 ou 4″. Nous venons de remarquer que ces cas ne peuvent se présenter que deux fois consécutivement au plus.

D'autre part, la différence entre un terme au numérateur et le terme correspondant au dénominateur reste toujours bornée lorsqu'on n'est pas dans le cas 1 en correspondance de ces deux termes. Dans le cas 1, au contraire, le terme au numérateur peut dépasser, en valeur absolue, le terme au dénominateur d'une quantité très grande. Toutefois, pendant que le terme au dénominateur est égal, à une quantité finie près, à la somme des termes précédents du dénominateur, le terme au numérateur ne dépasse pas, en vertu de la condition (3), la somme des termes précédents du numérateur multipliée par λ.

On reconnaît facilement, que, dans ces conditions, le rapport tend vers 1 pour $i \to \infty$.

30. Nous avons supposé, au paragraphe 24, $c_{\alpha-1}$ infiniment petit par rapport à ε_α pour $\alpha \to \infty$.

Considérons maintenant, au contraire, le cas, où l'on peut toujours choisir ε_α de l'ordre de $c_{\alpha-1}$. D'après le lemme du paragraphe 23, $\frac{c_\alpha}{c_{\alpha-1}}$ est alors de l'ordre

de $\left|\frac{k_\alpha}{k_{\alpha-1}}\right|$ lorsque a_α est plus petit que $c_{\alpha-1}$; de l'ordre de $c_{\alpha-1}$ au plus dans l'autre cas. On voit alors, en imitant le raisonnement du paragraphe précédent que

$$\lim_{\alpha=\infty} \frac{\log |k_{\alpha-1}|}{\log c_{\alpha-1}} = 1;$$

ε_α étant d'autre part de l'ordre de $c_{\alpha-1}$, le lemme du paragraphe 28 est immédiat dans ce cas.

Le cas est exclu, d'autre part, où le rapport $\frac{c_{\alpha-1}}{\varepsilon_\alpha}$ a sa plus grande limite finie et sa plus petite limite égale à zéro. En effet, d'après (34), le rapport considéré est décroissant.

31. Considérons un exposant λ' plus grand que λ et plus petit que 1.

Pour α assez grand $\frac{1}{\varepsilon_\alpha}$ sera plus grand que $n_\alpha^{\lambda'}$, a_α sera plus petit que $n_\alpha^{\lambda'}$; le cas 1 du paragraphe 26 ne pourra plus se présenter. On pourra choisir le nombre M_α, dont il est question au paragraphe 23, de l'ordre de $n_\alpha^{\lambda'}$; alors le produit

$$M_\alpha \varepsilon_\alpha$$

sera au plus de l'ordre de $\frac{1}{n_\alpha^{\lambda'-\lambda}}$. Enfin, on voit sans difficulté qu'on peut supposer, d'après (24), que les nombres ε_α^* et $\varepsilon_{\alpha-1}^*$ ne sont pas plus grands que toute puissance de $\frac{1}{n_\alpha}$ d'exposant positif donné. La différence entre le rapport

$$\frac{\frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha}}{\frac{\gamma_{\alpha-1}(x)}{k_{\alpha-1}}} = \frac{\frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha}}{\frac{\gamma_{\alpha-1}(x)}{k_{\alpha-1}}}$$

et l'unité est au plus de l'ordre de

$$M_\alpha \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^* + \varepsilon_{\alpha-1}^* + \frac{1}{M_\alpha},$$

d'après le lemme du paragraphe 23 ; elle n'est donc certainement pas plus grande que toute puissance de $\frac{1}{n_\alpha}$ d'exposant positif donné, d'après ce que nous venons de voir. Il s'ensuit sans difficulté que le rapport $\frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha}$ converge vers une fonction finie et positive $\xi(x)$. Cette convergence étant d'ailleurs uniforme, la fonction limite est continue.

32. Nous devons montrer qu'on obtient la transformation T lorsqu'on donne la valeur k au paramètre t dans l'équation du groupe g_1 engendré par

$$\mathrm{X}f = \xi(x) \frac{df}{dx}.$$

Indiquons par τ_α la transformation d'équation

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x),$$

qui coïncide avec T^{n_α} au point de vue géométrique; de

$$\lim_{x \to x} \frac{\gamma_\alpha(x)}{k_\alpha} = \xi(x),$$

on tire

$$\gamma_\alpha(x) = k_\alpha \xi(x) + \eta_\alpha(x),$$

la fonction $\eta_{1\alpha}(x)$ étant infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à k_α pour $\alpha \to \infty$. D'une façon analogue, si

$$x^*_{n_\alpha} = g(x, k_\alpha) = x + k_\alpha \xi(x) + \eta^*_\alpha(x)$$

est l'équation de la transformation τ^*_α, obtenue en donnant la valeur k_α au paramètre t dans l'équation

$$x_1 = g(x, t)$$

du groupe g_1 engendré par Xf, $\eta^*_{1\alpha}(x)$ est infiniment petite d'ordre supérieur par rapport à k_α pour $\alpha \to \infty$.

Indiquons par s_α le nombre $+1$ ou -1 selon que $\frac{k}{k_\alpha}$ est positif ou négatif et par r_α la partie entière de $\left|\frac{k}{k_\alpha}\right|$; le point transformé d'un point x par $\tau_\alpha^{s_\alpha r_\alpha}$ est situé à gauche de x_1, transformé de x par T; au contraire le point transformé de x par $\tau_\alpha^{s_\alpha (r_\alpha + 1)}$ est situé à droite de x_1. De ce que τ_α tend vers l'identité pour $\alpha \to \infty$, on tire que les points transformés de x par $\tau_\alpha^{s_\alpha r_\alpha}$ et par $\tau_\alpha^{s_\alpha (r_\alpha + 1)}$ sont infiniment proches à x_1 pour $\alpha \to \infty$; alors $\tau_\alpha^{s_\alpha r_\alpha}$ tend vers T.

Considérons maintenant la transformation $\tau_\alpha^{*\, r_\alpha s_\alpha}$, qui est engendrée par g_1 lorsqu'on donne la valeur $r_\alpha |k_\alpha|$ au paramètre t. On a

$$\tau_\alpha^{s_\alpha r_\alpha} = [(\tau_\alpha^{s_\alpha} \tau_\alpha^{*-s_\alpha}) \tau_\alpha^{*s_\alpha}]^{r_\alpha} = \left\{ \prod_0^{r_\alpha - 1}{}_l \tau_\alpha^{*s_\alpha l} (\tau_\alpha^{s_\alpha} \tau_\alpha^{*-s_\alpha}) \tau_\alpha^{*-s_\alpha l} \right\} \tau_\alpha^{*s_\alpha r_\alpha};$$

on a entre accolades le produit des transformations transformées de la transformation très petite $\tau_\alpha^{s_\alpha} \tau_\alpha^{*-s_\alpha}$ par les puissances de τ^*_α; en employant les formules données au paragraphe 7, on trouve facilement que la fonction, qui représente la transformation très petite indiquée entre accolades, est donnée par

$$s_\alpha \sum_0^{r_\alpha - 1}{}_l \{ \eta_\alpha [g(x, -lk_\alpha)] - \eta^*_\alpha [g(x, -lk_\alpha)] \} g^1 [g(x, -lk_\alpha), lk_\alpha],$$

en négligeant des quantités infiniment petites d'ordre supérieur pour $\alpha \to \infty$.

Le facteur entre accolades dans chaque terme de la sommation est infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à k_α (à $n_{\alpha+1}$) pour $\alpha \to \infty$. D'autre part, de

$$\int_{g(x,-lk_\alpha)}^{x} \frac{dx}{\xi(x)} = lk_\alpha, \tag{4'}$$

en dérivant par rapport à x on tire

$$g^1[g(x, -lk_\alpha), lk_\alpha] = \frac{\xi(x)}{\xi[g(x, -lk_\alpha)]};$$

N étant le maximum et $\underline{N}$ le minimum de la fonction continue et positive $\xi(x)$, $g^1[g(x, -lk_\alpha), lk_\alpha]$ ne peut donc pas dépasser $\frac{N}{\underline{N}}$.

On voit donc que chacun des $r_\alpha < n_{\alpha+1}$ termes de la sommation par rapport à l est le produit d'un facteur infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à k_α $\left(\text{à } \frac{1}{n_{\alpha+1}}\right)$ pour un facteur borné; la sommation est donc infiniment petite pour $\alpha \to \infty$. Alors $\tau_x^{x_\alpha r_\alpha}$ tend vers $\tau_x^{x_\alpha r_\alpha}$, ou encore vers T; on reconnaît donc qu'on obtient T en donnant la valeur k au paramètre t dans l'équation de g_t. *Le théorème* A *est ainsi démontré.*

CHAPITRE IV.

33. Il importe de montrer que l'ensemble E des nombres irrationnels de l'intervalle (0,1), qui ne satisfont, pour aucune valeur de $\lambda < 1$, à la condition

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha_\alpha}{n_\alpha^\lambda} = 0, \tag{3}$$

a une mesure nulle.

Considérons l'ensemble des nombres, qui ne satisfont pas à la condition (3) lorsqu'on donne à λ une valeur particulière plus petite que 1. Cet ensemble contient E; il suffira donc d'avoir démontré qu'il a lui-même une mesure nulle.

Considérons la succession

$$\frac{\alpha_1}{n_1^\lambda}, \quad \frac{\alpha_2}{n_2^\lambda}, \quad \frac{\alpha_3}{n_3^\lambda}, \quad \ldots \tag{37}$$

pour la valeur considérée de λ et pour un nombre k de l'intervalle (0,1): on peut distinguer trois cas :

I. La succession tend à zéro.

II. La succession a une plus grande limite finie.

III. La succession a ∞ pour plus grande limite.

Il faudrait montrer que la mesure de l'ensemble des nombres k, pour lesquels on est dans les cas II ou III, a une mesure nulle; il suffira toutefois d'avoir montré, pour toute valeur de λ positive < 1, que l'ensemble correspondant E_λ des nombres, pour lesquels on est dans les cas III, a une mesure nulle. En effet, quel que soit $\lambda' < \lambda$, l'ensemble des nombres pour lesquels on est, en correspondance avec la valeur λ de l'exposant, dans le cas II ou dans le cas III, est contenu, on le voit immédiatement, dans $E_{\lambda'}$.

Démontrons donc que E_λ a une mesure nulle. Indiquons par $E_\lambda(M)$ l'ensemble des nombres pour lesquels le rapport (37) n'est pas toujours inférieur au nombre positif M. $E_\lambda(M)$ tend vers E_λ quand $M \to \infty$.

Nous allons maintenant définir l'ensemble $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$: nous dirons qu'un nombre fait partie de $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ si $\frac{m}{n}$ fait partie de la succession des réduites de ce nombre et si, a étant le dénominateur partiel de son développement en fraction continue de même index que m et n, il n'est pas

$$\frac{a}{n^\lambda} < M.$$

Écrivons $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ au lieu de $\frac{m}{n}$ pour indiquer qu'il y a α réduites antécédentes $\frac{m_0}{n_0}$, $\frac{m_1}{n_1}$, ..., $\frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}}$; soit a_α le plus petit entier tel que

$$\frac{a_\alpha}{n_\alpha^\lambda} \geqq M,$$

soit enfin $\frac{a_\alpha m_\alpha + m_{\alpha-1}}{a_\alpha n_\alpha + n_{\alpha-1}} \equiv \frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}$. $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ est constitué précisément par l'intervalle $\left(\frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}}\right)$; $E_\lambda(M)$ est la somme des intervalles $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ lorsque $\frac{m}{n}$ prend toute valeur rationnelle de l'intervalle $(0, 1)$; sa mesure est certainement inférieure à la somme des mesures de tous ces intervalles. Pour évaluer cette somme, considérons d'abord la somme des mesures des intervalles correspondant à une valeur donnée de n,

$$mE_\lambda\left(M, \frac{1}{n}\right) + mE_\lambda\left(M, \frac{2}{n}\right) + \ldots + mE_\lambda\left(M, \frac{n-1}{n}\right).$$

$mE\left(M, \frac{m}{n}\right)$ est donnée par

$$\left|\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} - \frac{m_\alpha}{n_\alpha}\right| = \frac{1}{n_\alpha n_{\alpha+1}} < \frac{1}{n_\alpha^2 a_\alpha} \leqq \frac{1}{M}\,\frac{1}{n^{2+\lambda}};$$

la somme des mesures des $n-1$ ensembles correspondant à la valeur donnée

n est donc plus petite que $\frac{1}{M}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$; enfin la mesure de E(M) est plus petite que

$$\frac{1}{M}\left[\frac{1}{1^{1+\lambda}}+\frac{1}{2^{1+\lambda}}+\frac{1}{3^{1+\lambda}}+\cdots\right];$$

cette expression est finie et proportionnelle à $\frac{1}{M}$; la mesure de l'ensemble E est donc égale à zéro.

Remarquons enfin que, quel que soit $\lambda<1$, E_λ contient E. En effet, si λ'' est un nombre compris entre λ et 1, l'ensemble des nombres de l'intervalle (0, 1), tels que la succession correspondante

$$\frac{a_1}{n_1^{\lambda''}},\quad \frac{a_2}{n_2^{\lambda''}},\quad \frac{a_3}{n_3^{\lambda''}},\quad \cdots,$$

a une plus grande limite différente de zéro, est contenu dans E_λ et contient E.

E_λ tend vers E lorsque $\lambda\to 1$.

34. Nous allons maintenant démontrer l'existence de transformation 3″, c'est-à-dire de transformations de module irrationnel, qui sont caractérisées par une fonction $g(x)$ possédant une dérivée seconde satisfaisant à la condition de Lipschitz, et qui ne sont, toutefois, engendrées par aucune transformation infinitésimale.

Rappelons d'abord que, $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ étant les réduites du module irrationnel d'une transformation T, les transformations géométriques T_{n_α} ($\alpha=1, 2, \ldots$) sont données, géométriquement, par les équations

$$x_{n_\alpha}=x+\gamma_\alpha(x),$$

et que les fonctions $\gamma_\alpha(x)$, alternativement positives et négatives, tendent vers zéro lorsque α croît.

Supposons maintenant que T soit engendrée par la transformation infinitésimale

$$(2)\qquad Xf=\xi(x)\frac{df}{dx},$$

la fonction continue $\xi(x)$ aura nécessairement partout le même signe, comme nous allons voir; nous pourrons donc supposer qu'elle est positive.

Si $\xi(x)$ était positive dans un certain intervalle et négative dans un autre, tout point du premier intervalle serait déplacé à droite par une transformation finie de paramètre positif appartenant au groupe g_t engendré par Xf; tout point du deuxième intervalle serait au contraire déplacé à gauche. Il y aurait alors nécessairement des points invariants.

Il reste à montrer que $\xi(x)$ ne peut pas être nulle pour certaines valeurs de x. En dérivant l'équation

$$\int_x^{g(x)} \frac{dx}{\xi(x)} = 1$$

par rapport à x on obtient la relation

$$g^1(x) = \frac{\xi[g(x)]}{\xi(x)};$$

si alors $\xi(x)$ était nulle en x, elle serait nulle aussi en $\xi(x)$, enfin dans tous les conséquents de x. Ces points étant denses sur C, la fonction continue $\xi(x)$ serait identiquement nulle.

$\xi(x)$ admet donc un maximum N fini et un minimum $\underline{N}$ positif; le rapport entre le maximum et le minimum est donc fini.

On peut supposer qu'on obtient T^{α} en donnant la valeur $\delta_x t$ au paramètre t dans l'équation du groupe g_t engendré par Xf; le déplacement $\gamma_x(x)$ que cette transformation induit sur un point x est celui d'un point matériel qui se trouve en x au temps 0 et qui se déplace, pendant l'intervalle de temps $\delta_x t$ avec la vitesse $\xi(x)$, fonction de la place : on voit que ce déplacement est au moins égal à $\underline{N}\,\delta_x t$ et au plus égal à $N\,\delta_x t$.

Cette simple observation démontre que si, lorsque $\alpha \to \infty$, la plus grande limite du rapport entre le maximum et le minimum des valeurs absolues de $\gamma_x(x)$ n'est pas bornée, T n'admet certainement pas une transformation infinitésimale qui l'engendre.

35. Soit maintenant

$$x_1 = g(x, \theta) \tag{38}$$

l'équation d'une famille ∞^1 de transformations $T(\theta)$, dépendant du paramètre θ susceptible de varier dans un certain intervalle, soit (0, 1).

On suppose que $g(x, \theta)$ possède une dérivée seconde par rapport à x, qui satisfait à la condition de Lipschitz, et une dérivée première continue par rapport à θ. Par la suite nous indiquerons ces dérivées de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g(x, \theta) = g^{0,1}(x, \theta); \qquad \frac{\partial}{\partial x} g(x, \theta) = g^{1,0}(x, \theta); \qquad \frac{\partial^2}{\partial^2 x} g(x, \theta) = g^{2,0}(x, \theta).$$

Nous supposons que le transformé x_1 d'un point x quelconque se déplace toujours vers la droite lorsque θ croît, c'est-à-dire que

$$g^{0,1}(x, \theta) > 0.$$

La fonction $k(\theta)$, qui donne la valeur du module des transformations de la famille, sera dans ces conditions non décroissante dans l'intervalle (0, 1).

Nous voulons exclure le cas, *a priori* possible, que les transformations de la famille soient toutes irrégulières et possèdent un même module rationnel.

A une valeur irrationnelle du module, comprise entre $k(0)$ et $k(1)$, correspondra une transformation de la famille et une seulement. On a donc une infinité de la puissance du continu, de transformations régulières, correspondant aux valeurs irrationnelles du module.

Nous allons voir, au contraire, que, si la famille (38) est *arbitraire*, toutes les transformations de module rationnel sont irrégulières. Soit $\frac{m}{n}$ un nombre rationnel compris entre $k(0)$ et $k(1)$; considérons les puissances $n^{\text{ièmes}}$ des transformations de la famille et faisons croître par continuité le paramètre θ à partir de 0. Puisque $\frac{m}{n} > k(0)$, d'abord tout point x effectuera, par les puissances $n^{\text{ièmes}}$ considérées, moins de m tours complets de C, jusqu'à ce qu'on parvienne, en correspondance avec une certaine valeur θ' du paramètre, à une première transformation (38) de module $\frac{m}{n}$: il y aura alors au moins un point $\bar{x}$ qui effectuera exactement m tours de C. Il en sera de même des $n-1$ homologues de $\bar{x}$, mais on voit bien que, la famille étant arbitraire, il n'y a pas de raison pour que tout autre point effectue m tours de C : un point quelconque effectuera donc moins de m tours.

Si l'on fait croître encore θ, le point $\bar{x}$ effectuera plus de m tours, mais il y aura d'autres points qui effectueront exactement m tours, jusqu'à ce qu'on arrive à une certaine valeur θ'' de θ, en correspondance avec laquelle il y aura des points particuliers qui effectueront m tours exactement, pendant que tout autre point effectuera plus de m tours de C. Toutes les transformations correspondantes (38) ont le même module rationnel $\frac{m}{n}$; elles sont évidemment irrégulières.

Les transformations qui possèdent un même module rationnel sont donc celles qui correspondent à des valeurs de θ appartenant à un certain intervalle fermé. Aux différents nombres rationnels compris entre $k(0)$ et $k(1)$ correspond une infinité d'intervalles fermés extérieurs entre eux; à l'ensemble des transformations régulières, de module irrationnel, correspond un ensemble parfait discontinu, privé des extrémités de ses intervalles contigus.

36. Soit maintenant

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_\alpha, \quad \ldots,$$

une succession de nombres positifs, dont la plus grande limite n'est pas bornée.

Considérons un nombre rationnel compris entre $k(0)$ et $k(1)$, que nous représentons par

$$\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$$

pour indiquer qu'en le développant en fraction continue on obtient α réduites antécédentes $\frac{m_0}{n_0}, \frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}}$; supposons, par exemple, qu'il soit $\frac{m_{\alpha-1}}{n_{\alpha-1}} > \frac{m_\alpha}{n_\alpha}$.

Les transformations de module $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ sont celles d'un certain intervalle fermé $(\theta'_\alpha, \theta''_\alpha)$.

Représentons par

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x, \theta)$$

les transformations (géométriques) $T^{n_\alpha}(\theta)$ dans le voisinage de θ''_α. $\gamma_\alpha(x, \theta''_\alpha)$ est positive ou nulle; pour

$$\theta > \theta''_\alpha.$$

$\gamma_\alpha(x, \theta)$ est positive; on peut donc définir un intervalle ouvert

$$(\theta''_\alpha, \theta^*_\alpha),$$

situé à droite de θ''_α, dans lequel le rapport entre le maximum et le minimum de $\gamma_\alpha(x, \theta)$ est plus grand que r_α.

Choisissons un entier a_α assez grand pour que les transformations de module

$$\frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}} = \frac{m_{\alpha-1} + a_\alpha m_\alpha}{n_{\alpha-1} + a_\alpha n_\alpha}$$

correspondent à un intervalle fermé $(\theta'_{\alpha+1}, \theta''_{\alpha+1})$, intérieur à $(\theta''_\alpha, \theta^*_\alpha)$.

Représentons par

$$x_{n_{\alpha+1}} = x + \gamma_{\alpha+1}(x, \theta)$$

les transformations (géométriques) $T^{n_{\alpha+1}}(\theta)$ dans le voisinage de $\theta'_{\alpha+1}$. La fonction $\gamma_{\alpha+1}(x, \theta'_{\alpha+1})$ est négative ou nulle; pour

$$\theta < \theta'_{\alpha+1},$$

la fonction $\gamma_{\alpha+1}(x, \theta)$ est négative; on peut donc définir un intervalle ouvert

$$(\theta^*_{\alpha+1}, \theta'_{\alpha+1}),$$

situé à gauche de $\theta'_{\alpha+1}$ et intérieur à $(\theta''_\alpha, \theta^*_\alpha)$, dans lequel le rapport entre le maximum et le minimum absolus de $\gamma_{\alpha+1}(x, \theta)$ est plus grand que $r_{\alpha+1}$.

Choisissons un entier $a_{\alpha+1}$ assez grand pour que les transformations de module

$$\frac{m_{\alpha+2}}{n_{\alpha+2}} = \frac{m_\alpha + a_{\alpha+1} m_{\alpha+1}}{n_\alpha + a_{\alpha+1} n_{\alpha+1}}$$

correspondent à un intervalle fermé $(\theta'_{\alpha+2}, \theta''_{\alpha+2})$ intérieur à $(\theta^*_{\alpha+1}, \theta'_{\alpha+1})$, ...

En poursuivant indéfiniment de la sorte, on arrive à définir un module irrationnel k, dont les réduites sont

$$\frac{m_0}{n_0}, \quad \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_2}{n_2}, \quad \ldots, \quad \frac{m_\alpha}{n_\alpha}, \quad \frac{m_{\alpha+1}}{n_{\alpha+1}}, \quad \frac{m_{\alpha+2}}{n_{\alpha+2}}, \quad \ldots;$$

la valeur correspondante θ du paramètre appartient aux intervalles

$$(\theta''_\alpha, \theta^*_\alpha), \quad (\theta^*_{\alpha+1}, \theta'_{\alpha-1}), \quad (\theta''_{\alpha+2}, \theta^*_{\alpha+2}), \ldots;$$

d'après la remarque faite au paragraphe 34, la transformation $T(\bar{\theta})$ ne peut être engendrée par aucune transformation infinitésimale.

37. Nous avons vu que dans la famille (38) il n'y a pas, en général, de transformations régulières de module rationnel; les transformations irrégulières correspondent aux valeurs de θ appartenant à un ensemble constitué par une infinité d'intervalles fermés sans points communs, dont la mesure est évidemment différente de zéro. Il nous reste à considérer l'ensemble P_1, qui correspond aux transformations de module irrationnel, qui sont engendrées par une transformation infinitésimale et l'ensemble P_2, qui correspond aux transformations de module irrationnel qui, au contraire, ne sont engendrées par aucune transformation infinitésimale. *Ces ensembles ont tous les deux la puissance du continu; nous allons montrer que le premier* P_1 *a une mesure différente de zéro, et que le second* P_2 *a une mesure nulle.* Nous pourrons dire alors qu'une transformation *arbitraire* peut, ou bien (type 2) être irrégulière, ou bien (type 3') avoir un module irrationnel et posséder une transformation infinitésimale qui l'engendre; tandis que les transformations 1 régulières de module rationnel et les transformations 3'' régulières de module irrationnel, qui ne sont pas engendrées par une transformation infinitésimale, doivent être considérées comme exceptionnelles.

Démontrons d'abord que l'*ensemble* P_1 *ne peut pas être de mesure nulle*. Considérons le plus grand nombre dérivé

$$k'(\theta)$$

de $k(\theta)$; nous allons voir que ce nombre est fini dans tout point de P_1. Soit θ un tel point, et soit $\bar{k}$ la valeur irrationnelle correspondante du module. La transformation

$$x_1 = g(x, \theta) \tag{39}$$

admet une transformation infinitésimale qui l'engendre, soit

$$\xi(x)\frac{df}{dx};$$

alors, par la transformation de la variable indépendante définie par

$$\frac{dx}{\xi(x)} = \frac{dy}{k},$$

(39) est transformée (§ 3) en

$$y_1 = y + k. \tag{40}$$

Dans le voisinage de $\bar{\theta}$ l'équation de la famille peut être représentée par

$$y_1 = y - k + (\theta - \bar{\theta})\Pi(x, \theta), \tag{41}$$

$\Pi(x, \theta)$ étant continue. M étant un nombre plus grand que toute valeur de $\Pi(x, \theta)$, considérons la famille ∞^1 de transformations

$$y_1' = y - k + (\theta - \bar{\theta})M, \tag{41'}$$

(41) et (41') coïncident pour $\theta = \bar{\theta}$; pour $\theta > \bar{\theta}$, y_1' est à droite de y_1; pour $\theta < \bar{\theta}$, y_1' est, au contraire, à gauche de y_1. On voit par là que, pour $\theta > \bar{\theta}$, la transformation (41') a un module plus grand que la transformation (41) correspondante, et qu'elle a un module plus petit pour $\theta < \bar{\theta}$. $k'(\bar{\theta})$ est donc plus petit que le nombre dérivé correspondant, relatif à la famille (41'), qui est évidemment égale à M. $k'(\bar{\theta})$ est donc fini.

38. Considérons maintenant l'ensemble des valeurs irrationnelles du module qui ne satisfont pas à la condition (3) : c'est (§ 33) un ensemble de mesure nulle et il en est évidemment de même de l'ensemble qu'on obtient en lui adjoignant toutes les valeurs rationnelles de l'intervalle $[k(0), k(1)]$. On peut donc enfermer ce second ensemble dans un ensemble ouvert O de mesure ε très petite. L'ensemble complémentaire F a une mesure différente de zéro,

$$\sigma = k(1) - k(0) - \varepsilon.$$

L'ensemble O se compose d'une infinité d'intervalles ouverts : considérons l'ensemble des valeurs de θ, telles que les transformations correspondantes de la famille (38) aient un module appartenant à l'un déterminé de ces intervalles; cet ensemble est lui-même un intervalle ouvert. Alors l'ensemble O' des valeurs de θ telles que les transformations correspondantes de la famille aient un module appartenant à O est lui aussi un ensemble ouvert. L'ensemble complémentaire F' est compris évidemment dans P_1; si l'on admettait que P_1 avait une mesure nulle, F' aurait lui aussi une mesure nulle.

On obtient F' en enlevant à l'intervalle (0, 1) les intervalles ouverts qui composent O'; ces intervalles peuvent être ordonnés par ordre de grandeur. Si l'on commence à enlever à (0, 1) le premier, le second, le troisième, etc., des intervalles ouverts de O', on obtient des ensembles qui tendent vers F' et qui sont composés de deux, trois, quatre, etc., intervalles fermés. La mesure de ces ensembles tend vers 0; au contraire, la variation totale de la fonction $k(\theta)$ dans chacun des ensembles se maintient au moins égale à φ.

Il y a nécessairement un premier ensemble composé d'intervalles fermés de mesure totale plus petite que $\frac{1}{10}$; alors, dans l'un au moins, I_1, des intervalles fermés, qui le composent, le rapport de la variation de $k(\theta)$ à l'ampleur de l'in-

tervalle est plus grand que 10ε. On peut répéter sur I_1 le raisonnement qu'on a fait sur l'intervalle $(0, 1)$; on parvient à un deuxième intervalle fermé I_2, appartenant à I_1 et tel que le rapport de la variation de $k(\theta)$ en I_2 à l'ampleur de I_2 est plus grand que 100ε.

En poursuivant de la même façon, on arrive à construire une succession d'intervalles fermés dont l'ampleur tend vers zéro,

$$I_1, \quad I_2, \quad I_3, \quad \ldots, \quad I_n, \quad \ldots,$$

chacun appartenant au précédent, tels que le rapport de la variation de $k(\theta)$ en I_n à l'ampleur de I_n est plus grand que $10^n\varepsilon$.

Il y a un point θ, qui fait partie de tous ces intervalles; ce point appartient évidemment à F', donc aussi à P_1. On voit bien que, dans ce point, le plus grand nombre dérivé $k'(\theta)$ ne peut pas être fini, et nous avons vu, au contraire, que le plus grand nombre dérivé est fini en tout point de P_1.

L'hypothèse que P_1 a une mesure nulle aboutit donc à une contradiction.

39. *Au contraire, l'ensemble* P_2 *des valeurs de* θ *correspondant à des transformations de module irrationnel, qui ne sont pas engendrées par des transformations infinitésimales, a une mesure nulle.*

Si θ appartient à P_2, $k(\theta)$ appartient nécessairement à l'ensemble E des valeurs du module, qui ne satisfont pas à la condition (3). Si la mesure de P_2 n'était pas nulle, il en serait de même de la mesure de l'ensemble E' des valeurs de θ telles que $k(\theta)$ appartient à E, ou encore, λ étant un nombre positif quelconque plus petit que 1, de la mesure de l'ensemble E'_λ des valeurs de θ telles que $k(\theta)$ appartient à E_λ (§. 33). La mesure de l'ensemble $E'_\lambda(M)$ des valeurs de θ telles que $k(\theta)$ n'est pas rationnel et appartient à $E_\lambda(M)$ resterait donc, pour $M = \infty$, toujours supérieure à une quantité positive donnée. Soit, enfin, $E'_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ l'intervalle composé par les valeurs θ telles que $k(\theta)$ appartienne à l'intervalle *ouvert* $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$; la somme des mesures des intervalles $E'_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$, lorsque $\frac{m}{n}$ prend toute valeur rationnelle de l'intervalle $\left(k(0), k(1)\right)$, resterait, pour $M = \infty$, toujours supérieure à une quantité positive donnée. Or, cela n'est pas possible; en effet, la somme correspondante des intervalles $E_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)$ tend vers zéro (§ 33), et nous allons montrer que le rapport

$$\frac{mE_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)}{mE'_\lambda\left(M, \frac{m}{n}\right)}$$

ne peut pas devenir infiniment petit. Il est donc impossible que la mesure de P_2 soit différente de zéro.

40. Supposons qu'il y ait a_α réduites antécédentes à $\frac{m}{n}$; écrivons $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ à la place de $\frac{m}{n}$. Supposons, de plus, que $E_i\left(M, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}\right)$ soit, par exemple, à gauche de $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$.

Soit θ'_α l'extrême droite de $E'_i\left(M, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}\right)$, c'est-à-dire la plus petite valeur de θ telle que $k(\theta'_\alpha) = \frac{m_\alpha}{n_\alpha}$; soit θ un point arbitraire de $E'_i\left(M, \frac{m_\alpha}{n_\alpha}\right)$, tel que $k(\theta)$ soit irrationnel; il suffit de montrer que le rapport

$$\frac{\frac{m_\alpha}{n_\alpha} - k(\theta)}{\theta'_\alpha - \theta} \tag{42}$$

ne peut pas devenir infiniment petit.

$T^{n_\alpha}(\theta_\alpha)$ laisse invariants certains points de C et transforme tous les autres en des points situés à leur gauche; $T^{n_\alpha}(\theta)$ transforme tout point de C en un point situé à sa gauche. $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ étant une des réduites du module $k(\overline{\theta})$ de $T(\overline{\theta})$, aucun point transformé de x par une puissance de $T(\theta)$ d'exposant plus petit que n_α ne peut tomber entre x et son transformé par $T^{n_\alpha}(\overline{\theta})$.

Posons

$$T(\theta'_\alpha) = \tau T(\theta), \tag{43}$$

τ est une transformation très petite, qui induit sur le point d'abscisse $g^{(x,\overline{\theta})}$ un déplacement, dont la partie principale est donnée par

$$g^{(n)}(x, \theta)(\theta'_\alpha - \overline{\theta}).$$

La fonction $g^{(n)}(x, \theta)$ étant continue et positive, elle a un minimum positif; le déplacement induit par τ est donc partout de l'ordre de $(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$ et le module de τ est par conséquent lui aussi de l'ordre de $(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$.

On tire de (43)

$$T^{n_\alpha}(\theta'_\alpha) = \left[\tau T(\theta)\right]^{n_\alpha} = \left[\prod_{s=0}^{n_\alpha - 1} T^s(\theta)\, \tau\, T^{-s}(\theta)\right] T^{n_\alpha}(\theta);$$

on déduit de là que le produit des transformations transformées de τ par les puissances successives de $T(\theta)$

$$\prod_{s=0}^{n_\alpha - 1} T^s(\theta)\, \tau\, T^{-s}(\theta) = T'^{n_\alpha}(\theta'_\alpha)\, T^{-n_\alpha}(\theta), \tag{44}$$

porte $g_{n_\alpha}(x, \overline{\theta})$ en $g_{n_\alpha}(x, \theta'_\alpha)$, c'est-à-dire en un point de l'intervalle $(x, g_{n_\alpha}(x, \overline{\theta}))$.

La transformation très petite $T^s(\overline{\theta}) = T^{-s}(\theta)$ a le même module que la transformation τ; elle induit sur un point $g(x^*, \overline{\theta})$ un déplacement, dont la partie principale est donnée par

$$g^{0,1}[g_{-s}(x^*, \overline{\theta}), \overline{\theta}]\, g_s^{1,0}[g_{-s+1}(x^*, \overline{\theta}), \overline{\theta}](\theta'_\alpha - \overline{\theta}).$$

Lorsque $g(\overline{x}^*, \theta)$ varie dans l'intervalle $(x, g_{n_\alpha}(x, \overline{\theta}))$, cette expression est multipliée par un facteur, qui est infiniment peu différent de 1 lorsque $\alpha \to \infty$ (1); on peut donc appliquer le lemme du paragraphe 7 et l'on en déduit que le module de la transformation (44) est de l'ordre de $n(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$ au moins.

La différence entre le module de $T^{n_\alpha}(\overline{\theta})$ et m_α est donnée par le module, négatif, de la transformation

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x, \overline{\theta}); \tag{45}$$

la transformation inverse

$$x = x_{n_\alpha} - \gamma_\alpha(x, \overline{\theta}) \tag{46}$$

aura le même module que (45), au signe près. Or, nous avons déjà remarqué que la transformation (44) transforme $g_{n_\alpha}(x, \overline{\theta}) \equiv x_{n_\alpha}$ en un point de (x, x_{n_α}) qui donc ou bien coïncide avec x, ou bien est situé entre x_{n_α} et x; le module de la transformation (44) ne peut donc pas dépasser, en valeur absolue, celui de (46); ce dernier est donc aussi de l'ordre de $n_\alpha(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$ au moins.

Le module de $T^{n_\alpha}(\overline{\theta})$ diffère donc de m_α d'une quantité de l'ordre de $n(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$ au moins; par conséquent, le module de $T(\overline{\theta})$ diffère de $\frac{m_\alpha}{n_\alpha}$ d'une quantité de l'ordre de $(\theta'_\alpha - \overline{\theta})$ au moins; le rapport (42) ne peut donc pas devenir infiniment petit. C. Q. F. D.

41. Nous avons donc complètement démontré le théorème B : *Dans la famille* (38) *l'ensemble des valeurs de* θ, *qui correspondent à des transformations* 1, *est vide, l'ensemble, qui correspond à des transformations* 3'', *a une mesure nulle : les deux ensembles, qui correspondent aux transformations* 2 *et aux transformations* 3', *ont tous les deux une mesure différente de zéro.*

Nous avons déjà remarqué que l'ensemble des valeurs prises par la fonction $k(\theta)$ lorsque θ varie en P_2 est contenu dans l'ensemble E des valeurs, qui ne satisfont pas à la condition (3); on pourrait peut-être tâcher de démontrer que, lorsque la famille (38) est *arbitraire*, ces deux ensembles coïncident. On aurait

(1) Lorsque $g(x^*, \overline{\theta})$ varie dans $(x, g_{n_\alpha}(x, \overline{\theta}))$, $g_{-s+1}(x^*, \overline{\theta})$ varie dans $(g_{-s}(x, \overline{\theta}), g_{n_\alpha - s}(x, \overline{\theta}))$; en indiquant par x' et x'' deux points de ce dernier intervalle, il suffit alors de remarquer (§ 20) que le rapport $\frac{g_s^{1,0}(x', \overline{\theta})}{g_s^{1,0}(x'', \overline{\theta})}$ est infiniment peu différent de 1.

montré de cette façon que la condition (3) est réellement la moins restrictive qu'on puisse donner et l'on aurait montré en même temps qu'une transformation *arbitraire*, dont le module ne satisfait pas à la condition (3), n'est engendrée par aucune transformation infinitésimale.

NOTE.

Nous devons combler ici la lacune dans la déduction du paragraphe 18. Rappelons qu'on considérait, dans le cas I($\alpha - \alpha' - 1$ pair), deux suites composées chacune de $\alpha - \alpha'$ intervalles : $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-\alpha'-1}$ et $B_0, B_1, \ldots, B_{\alpha-\alpha'-1}$, tels que

$$A_0 = A_1 + A_2, \qquad A_2 = A_3 + A_4, \qquad \ldots,$$
$$A_{\alpha-\alpha'-3} = A_{\alpha-\alpha'-4} + A_{\alpha-\alpha'-3}, \qquad A_{\alpha-\alpha'-3} = A_{\alpha-\alpha'-2} + A_{\alpha-\alpha'-1};$$
$$B_0 = B_1 + B_2, \qquad B_2 = B_3 + B_4, \qquad \ldots,$$
$$B_{\alpha-\alpha'-3} = B_{\alpha-\alpha'-4} + B_{\alpha-\alpha'-3}, \qquad B_{\alpha-\alpha'-3} = B_{\alpha-\alpha'-2} + B_{\alpha-\alpha'-1}.$$

On a les relations suivantes :

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\dfrac{f(A_1)}{m(A_1)}}{\dfrac{f(B_0)}{m(B_0)}} = 1 + \delta_0 \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'}}, & \dfrac{\dfrac{f(A_2)}{m(A_2)}}{\dfrac{f(B_1)}{m(B_1)}} = 1 + \delta_1 \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha'+1}}, \quad \ldots, \\ \dfrac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-4})}{m(B_{\alpha-\alpha'-4})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-4} \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-4}}, & \dfrac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2})}}{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-3} \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}. \\ \dfrac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-2} \dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}, & \dfrac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{m(B_{\alpha-\alpha'-1})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-1}, \end{array}\right.$$

$\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{\alpha-\alpha'-1}$ étant bornés en valeur absolue, indépendamment de α; *on veut évaluer la différence entre le rapport*

$$(48)\qquad \frac{\dfrac{f(A_0)}{m(A_0)}}{\dfrac{f(B_0)}{m(B_0)}}$$

et l'unité.

Des deux dernières relations (47) on tire respectivement

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\left(1 + \delta_{\alpha-\alpha'-2}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\right) f(B_{\alpha-\alpha'-2})} \cdot \frac{1}{m(B_{\alpha-\alpha'-2})} \qquad \frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{(1 + \delta_{\alpha-\alpha'-1}) f(B_{\alpha-\alpha'-1})} = 1,$$

et de ces équations, en additionnant entre elles les troisièmes et, respectivement, les quatrièmes lignes de deux fractions, on tire

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-3})\left(1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\right)}{m(B_{\alpha-\alpha'-3})}}=1.$$

On a donc

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-3})}}=1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}. \tag{49}$$

De cette relation et de l'antépénultième des (47) on tire, respectivement,

$$\frac{f(A_{\alpha-\alpha'-1})}{\left(1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\right)m(A_{\alpha-\alpha'-1})}=1,$$

$$\frac{f(A_{\alpha-\alpha'-2})}{\left(1+\delta_{\alpha-\alpha'-3}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\right)m(A_{\alpha-\alpha'-2})}=1.$$

En additionnant entre elles les premières et, respectivement, les deuxièmes lignes des deux fractions on tire

$$\frac{f(A_{\alpha-\alpha'-3})}{\left\{\begin{array}{l} m(A_{\alpha-\alpha'-3})\left(1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\dfrac{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}\right.\\ \left.+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\dfrac{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-3}\dfrac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\dfrac{m(A_{\alpha-\alpha'-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}\right)\end{array}\right\}}=1,$$

et de cette dernière relation on obtient

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-3})}}=1+\delta_{\alpha-\alpha'-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}$$
$$+\delta_{\alpha-\alpha'-1}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-3})}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}+\delta_{\alpha-\alpha'-3}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-3}}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-3})}.$$

Nous pouvons continuer; nous aurons, pour $2\alpha'' < \alpha - \alpha' - 1$,

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}} = 1 + (\ldots); \tag{50}$$

entre parenthèses dans le second membre on a une somme de $2\alpha'' + 1$ termes.

En combinant la relation (50) avec

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-2}},$$

de la même façon qu'on a déjà combiné les deux dernières relations (47) on obtient

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}} = 1 + (\ldots)\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})} + \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-2}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})};$$

en combinant ensuite cette dernière relation et

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}} = 1 + \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-3}}$$

de la même façon qu'on a déjà combiné la relation (49) et l'antépénultième des (47) on tire

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-4})}} = 1 + \left\{\left[(\ldots)\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})} + \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-2}}\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}\right]\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}\right.$$
$$\left. + \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3}\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-3}}\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}\right\}. \tag{51}$$

De (51) nous pourrons déduire la valeur de

$$\frac{\dfrac{f(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-4})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-4})}}{\dfrac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-4})}}$$

de la même façon que nous avons déduit le second membre de la relation (51)

du second membre de la relation (50) : nous devrons additionner à l'unité la somme de l'ensemble des termes entre accolades de (51) multipliées par $\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-5})}\,\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-5})}$ et de deux nouveaux termes.

Il est désormais facile de voir, sur la base des considérations précédentes, qu'en poursuivant on obtient pour le rapport (50) la valeur

$$1+\sum_{0}^{\frac{1}{2}(\alpha-\alpha'-2)}{}_{\alpha''}\ \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2}\,\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-2}}\,\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{f(B_0)}\,\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_0)}$$

$$+\sum_{0}^{\frac{1}{2}(\alpha-\alpha'-2)}{}_{\alpha''}\ \delta_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3}\,\frac{c_{\alpha-1}}{c_{\alpha-2\alpha''-3}}\,\frac{f(B_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-3})}{f(B_0)}\,\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-2})}{m(A_0)}.$$

Le rapport $\frac{m(A_{\alpha-\alpha'-2\alpha''-1})}{m(A_0)}$ est de l'ordre de $\frac{c_{\alpha-2\alpha''-1}}{c_{\alpha'-1}}$; chacun des $\alpha-\alpha'-1$ termes de deux sommations du second membre est alors de l'ordre de $p^{\alpha-\alpha'}$ au plus; *la différence entre le rapport* (48) *et l'unité est de l'ordre de* $(\alpha-\alpha')p^{\alpha-\alpha'}$ *au plus*.

On pourrait arriver à une conclusion semblable dans le cas II considéré au paragraphe 18.

ERRATUM.

Article de M. Paul Lévy, *Axiome de Zermelo et nombres transfinis* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 67, 1950, fasc. 1).

Page 15, note (1), *intervertir les noms* Albin Michel *et* Gallimard.

QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

FONCTIONS MÉROMORPHES PÉRIODIQUES

PAR M. PHAM TINH-QUAT.

Le but de cette étude est d'étendre aux fonctions méromorphes périodiques quelques propriétés que j'ai obtenues pour les fonctions entières périodiques (¹).

Je ne considère ici, comme dans mon précédent Mémoire, que les fonctions d'ordre fini, et je suppose, sans restreindre la généralité, que la période de la fonction est égale à 2π.

Dans la première Partie, je m'occuperai du théorème de Picard. En me basant sur l'expression du module d'une fonction entière périodique et en reprenant la méthode que M. Borel a employée dans le cas général, je montrerai l'existence possible d'une équation exceptionnelle de la forme

$$F(z) = G(z),$$

où $G(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre inférieur à $F(z)$ et de même période.

Comme application, j'indiquerai quelques propriétés immédiates d'une classe de fonctions admettant une telle équation exceptionnelle.

La seconde Partie est consacrée aux directions de Borel et aux cercles de remplissage. La transformation $u = e^{-iz}$ permet de définir d'abord une fonction caractéristique $T(y, F)$ analogue à la fonction caractéristique de M. Nevanlinna dans le cas général et d'obtenir ainsi une propriété simple concernant le défaut $\delta(x)$ dans un cas particulier.

La méthode directe, basée sur celle de MM. Milloux et Valiron, que j'ai employée pour résoudre le problème des directions de Borel et des cercles de remplissage des fonctions entières périodiques, s'applique immédiatement ici et donne des résultats en tout point analogues. Elle fournit en même temps une généralisation d'un résultat de M. Valiron sur les fonctions méromorphes d'ordre nul.

(¹) *Thèse*, Paris, 1948, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 1948.

PREMIÈRE PARTIE.

L'ORDRE DES FONCTIONS MÉROMORPHES PÉRIODIQUES ET LE THÉORÈME DE PICARD.

1. Soit

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

une fonction méromorphe, quotient de deux fonctions entières n'admettant pas de zéros communs. La périodicité de $F(z)$ exige que, si a est un zéro de $f(z)$, $a + 2k\pi$ soit un zéro de $F(z)$, c'est-à-dire de $f(z)$, quel que soit l'entier k [$g(z)$ ne pouvant pas devenir infinie en ces points].

Avec l'ensemble des zéros de $f(z)$ on peut former un produit canonique de facteurs primaires de Weierstrass, produit qui représente une fonction entière périodique de période 2π. Donc

$$f(z) = f_1(z)\, e^{f_2(z)}.$$

De même,

$$g(z) = g_1(z)\, e^{g_2(z)},$$

d'où

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{g_1(z)}\, e^{h(z)},$$

$h(z) = f_2(z) - g_2(z)$ est une fonction entière.

La périodicité de $F(z)$, comme celles de $f_1(z)$ et $g_1(z)$, entraîne la périodicité de $e^{h(z)}$. On obtient par suite la propriété suivante :

Toute fonction méromorphe de période 2π est le quotient de deux fonctions entières de même période.

Dans toute cette étude, je suppose que $f(z)$ et $g(z)$ sont deux produits canoniques de facteurs primaires sinusoïdaux, *débarrassés, le cas échéant, des facteurs exponentiels, de la forme e^{iz}*. L'ordre de $f(z)$ et de $g(z)$ est supposé fini.

$F(z)$ sera appelée forme canonique méromorphe.

Je rappelle que pour une fonction entière périodique, on a, avec les notations déjà employées (1),

$$\log f(z) = n(y) - \Sigma r_p + k(x, y)\, y^{\rho - \varepsilon}.$$

L'égalité est valable en dehors des domaines d'exclusion constitués par de petits rectangles entourant les zéros et de dimensions

$$2r_n^{\lambda}, \quad (e^{-y^2}.$$

(1) Pour éviter des longueurs et des redites, je renvoie, pour les notations du présent travail, à mon Mémoire cité plus haut.

L'étendue totale des domaines d'exclusion, dans toute bande de largeur finie non parallèle à la période, est par suite finie.

Donc, pour une fonction méromorphe périodique d'ordre $1+\rho$, on peut écrire

$$\log F(z) = (n-n')\,y - \Sigma(r_p - r'_p) - k(x,y)\,y^{\rho-\varepsilon},$$

l'égalité étant valable en dehors des domaines d'exclusion d'étendue totale finie dans toute bande donnée non parallèle à la période, n' et r'_p étant relatifs à $g(z)$.

2. Une fonction entière périodique d'ordre fini et qui ne se réduit pas à une combinaison finie d'exponentielles, ne peut admettre des valeurs exceptionnelles au sens de Picard. Autrement dit, pour une fonction $f(z)$ d'ordre $1+\rho$, la suite des zéros de $f(z)-x$ admet comme exposant $1+\rho$ quelle que soit la valeur x.

Ce résultat s'étend immédiatement aux équations

$$f(z) - \varphi(z) = 0,$$

où $\varphi(z)$ représente une fonction entière périodique de même période et d'ordre inférieur à $f(z)$. Parmi de telles équations il n'y en a aucune qui soit exceptionnelle, en ce sens que la suite des zéros admet toujours $1+\rho$ comme exposant.

Cette circonstance est due à ce que la fonction $f(z)-\varphi(z)$ est d'ordre $1+\rho$ et par suite elle se représente par un produit canonique de facteurs primaires sinusoïdaux d'ordre $1+\rho$, multiplié, le cas échéant, par une exponentielle linéaire.

Il n'en est plus de même pour une fonction méromorphe qui peut admettre *une* valeur exceptionnelle au sens de Picard (1).

Si l'on considère une fonction méromorphe de la forme

$$\frac{f(z)}{g(z)},$$

où $f(z)$ est d'ordre inférieur à $g(z)$, la valeur zéro est visiblement exceptionnelle.

J'appelle transformées homographiques périodiques de $F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ l'ensemble des fonctions $\frac{af-bg}{cf-dg}$ dans lesquelles a, b, c, d représentent des fonctions périodiques de même période que F, mais d'ordre moindre.

J'appelle équation exceptionnelle, une équation de la forme

$$F(z) - G(z) = 0.$$

(1) J'écarte le cas, du reste sans intérêt, des fonctions méromorphes qui s'expriment par une combinaison finie d'exponentielles linéaires. Une telle fonction peut évidemment admettre deux valeurs exceptionnelles : ainsi $e^z : (e^z + 1)$ admet 0 et 1 comme valeurs lacunaires.

telle que la suite des zéros admet un exposant inférieur à l'ordre de $F(z)$, $G(z)$ désignant une fonction méromorphe de même période mais d'ordre inférieur.

Les généralisations de M. Borel sur le théorème de Picard (1) s'appliquent facilement ici, avec des simplifications manifestes et conduisent à la proposition suivante :

Étant donnée une forme canonique méromorphe périodique $F(z)$, *parmi les équations* $F(z) - G(z) = 0$, *où* $G(z)$ *représente une fonction méromorphe quelconque de même période mais d'ordre inférieur, il n'y en a pas en général d'exceptionnelles, s'il y en a, il n'y en a qu'une* (2).

Si l'on appelle fonction exceptionnelle, une fonction qui donne lieu à une équation exceptionnelle, on voit encore que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme canonique méromorphe périodique soit exceptionnelle, est qu'elle soit la transformée homographique périodique d'une fonction entière.

Applications.

3. *Sur une classe de fonctions exceptionnelles.* — Soit une fonction périodique méromorphe *exceptionnelle* d'ordre inférieur à 2, ou bien d'ordre quelconque mais transformée homographique périodique d'une fonction entière à croissance régulière. Une telle fonction est de la forme

$$F(z) = \frac{af - b}{cf - d},$$

$f(z)$ étant une fonction entière périodique d'ordre inférieur à 2, ou bien d'ordre quelconque, mais alors à croissance régulière, a, b, c, d des fonctions périodiques de même période d'ordre inférieur à $f(z)$.

Remarquons d'abord, d'après l'expression du module d'une fonction entière périodique d'ordre $1 + \varepsilon$, qu'en dehors des domaines d'exclusion le logarithme du module de la fonction reste supérieur à

$$-|y|^{1+\varepsilon};$$

par suite, si $f(z)$ est d'ordre inférieur à 2 ou à croissance régulière, et $a(z)$ une fonction entière de même période et d'ordre inférieur, $\log|af|$ est équivalent à $\log|f|$, pour $|y|$ suffisamment grand, et ce, en dehors des domaines d'exclusion

(1) Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Paris, Gauthier-Villars (Chap. III, p. 61 et suiv.).

(2) L'essentiel de cette démonstration se résume en ceci :

Parmi les transformées homographiques périodiques de $F(z)$ ne figure pas de fonction entière et alors $F(z)$ ne peut être exceptionnelle.

Parmi ces transformées figure une fonction entière, et comme cette fonction ne se réduit pas à une combinaison finie d'exponentielles linéaires, cas déjà écarté, $F(z)$ n'admet qu'une équation exceptionnelle.

de $f(z)$ et de $a(z)$; car, en effet, en dehors de ces domaines, la double inégalité

$$(1)\qquad y^{1-\rho-\varepsilon} < \log f < y^{1-\rho-\varepsilon}$$

finit par être constamment vérifiée, pendant que l'on a

$$-y^{\rho'-\varepsilon} < \log a < y^{1-\rho'-\varepsilon},$$

$1+\rho' < 1+\rho$ désigne l'ordre de $a(z)$.

De même si $b(z)$ désigne, comme $a(z)$, une fonction entière périodique de même période que $f(z)$ mais d'ordre inférieur, le rapport des modules de $b(z)$ à $a(z)f(z)$ est infiniment petit en dehors des mêmes domaines, et par suite $\log\,|af+b|$ est encore équivalent à $\log\,|f|$ en dehors des domaines d'exclusion des fonctions $a(z)$ et $f(z)$.

En définitive, en dehors des domaines d'exclusion de $f(z)$, $a(z)$, $c(z)$, on a l'égalité

$$\log\,|\mathrm{F}(z)| = \log\left|\frac{af+b}{cf+d}\right| = k(x,y)\,y^{\rho} = o(1)\,y^{\rho} \qquad (\rho' < 1-\rho).$$

On voit que toutes les transformées homographiques périodiques de $f(z)$ qui n'admettent ni zéro ni ∞ comme valeur exceptionnelle, se comportent comme des fonctions d'ordre inférieur à $f(z)$, en dehors des domaines d'exclusion dont l'étendue totale est finie dans toute bande de largeur finie non parallèle à la période.

Si maintenant l'on prend

$$\mathrm{F}(z) = \frac{af+b}{d} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{F}(z) = \frac{b}{cf+d},$$

c'est-à-dire si $\mathrm{F}(z)$ admet zéro ou ∞ comme valeur exceptionnelle, le logarithme du module de $\mathrm{F}(z)$ se comporte au contraire, en dehors des domaines d'exclusion analogues, comme celui de la fonction entière $f(z)$ ou de la fonction $1:f(z)$.

4. *Sur les fonctions à croissance régulière.* — Un raisonnement déjà employé montre qu'il existe, pour toutes les fonctions périodiques à croissance régulière d'ordre $1+\rho$, des bandes parallèles aux suites primaires et d'ordonnée indéfiniment croissante telles que l'on ait, en dehors des domaines d'exclusion,

$$\log\,|f(z)| = \mathrm{A}\,n\,y^{\rho},$$

$\mathrm{A} = \mathrm{A}(x,y)$ est compris entre $\frac{1-\varepsilon}{1-\rho}$ et 1, et qu'étant donnée deux fonctions entières périodiques à croissance régulière quelconques il existe une infinité de ces bandes d'ordonnées indéfiniment croissante telles qu'on ait simultanément

$$\log\,|f(z)| = \mathrm{A}\,n\,y^{\rho},$$
$$\log\,|g(z)| = \mathrm{B}\,n'\,y^{\rho},$$

$B = B(x, y)$ est analogue à A. Ici, il faut exclure de ces bandes les domaines d'exclusion des deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ à la fois.

Ces bandes jouent le rôle de ce que j'ai appelé les domaines de régularité communs aux deux fonctions, lorsqu'on s'attache au module maximum sur un cercle de centre l'origine.

Il en résulte que pour toute fonction méromorphe périodique à croissance régulière, il existe des bandes parallèles aux suites primaires et d'ordonnée indéfiniment croissante telle que dans chacune de ces bandes on ait

$$\log |F(z)| < An + Bn' + y$$

et ce, en dehors des domaines d'exclusion, n et n' désignant respectivement le nombre de zéros et de pôles d'ordonnée comprise entre zéro et y.

Supposons que α soit valeur exceptionnelle pour la fonction $F(z)$ à croissance régulière, dans les bandes précédentes on a

$$\log |F(z) - \alpha| > O(1) n - y.$$

Si l'on considère

$$F(z) - G(z),$$

où $G(z)$ désigne une fonction de même période, à croissance régulière et d'ordre inférieur, il existe des bandes où

$$\log |F(z) - G(z)| \sim \log |F(z)|.$$

On peut alors affirmer qu'il existe des valeurs de y indéfiniment croissantes pour lesquelles les nombres de zéros de $F(z)$ et de $F(z) - G(z)$ d'ordonnée comprise entre zéro et y sont équivalents.

On obtient une conclusion identique si l'on suppose que zéro est valeur exceptionnelle de $F(z)$.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTION CARACTÉRISTIQUE, DIRECTIONS DE BOREL CERCLES DE REMPLISSAGE.

5. Dans le cas particulier où la fonction $F(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles d'ordonnée négative, la transformation

$$u = e^{-iz}$$

fait correspondre à $F(z)$ une fonction méromorphe $G(u)$ d'ordre nul, et réciproquement à toute fonction méromorphe $G(u)$ d'ordre nul telle que

$$\overline{\lim_{R=\infty}} \frac{\log T(R, G)}{\log \log R} = 1 - \rho < 1,$$

il correspond une fonction méromorphe périodique de période 2π d'ordre $1 + \rho$.

La caractéristique de M. Nevanlinna peut s'écrire pour une telle fonction

$$2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} |F(x + iy)|\, dx = \int_{0}^{y} n(t, \infty)\, dt,$$

à supposer, pour simplifier l'écriture, que la fonction n'admette pas de pôles d'ordonnée négative, $n(t, \infty)$ désignant ici le nombre de pôles « fondamentaux » d'ordonnée inférieure à t.

Dans le cas général, considérons, avec M. Nevanlinna, l'expression

$$m\left(y, \frac{1}{F - a}\right) + N\left(y, \frac{1}{F - a}\right)$$

et, pour $a = \infty$,

$$m(y, F) + N(y, F),$$

avec

$$m\left(y, \frac{1}{F - a}\right) = m(y, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^{+} \left| \frac{1}{F(x + iy) - a} \right| dx,$$

$$N\left(y, \frac{1}{F - a}\right) = N(y, a) = \int_{0}^{y} n(t, a)\, dt;$$

$n(t, a)$ désigne le nombre de zéros « fondamentaux » *d'ordonnée comprise entre zéro et t*.

La différence entre ces expressions et les expressions habituelles relatives à une fonction méromorphe est qu'elles concernent, dans le plan des u, une fonction admettant zéro et ∞ comme points singuliers essentiels.

Mais, grâce à l'introduction de la moyenne des zéros « fondamentaux » d'ordonnée comprise entre zéro et y, la somme considérée jouit de la même propriété essentielle de la fonction caractéristique de M. Nevanlinna.

Soit, en effet,

$$F(z) = F_1(z)\, F_2(z) = G(u) = G_1(u)\, G_2\left(\frac{1}{u}\right) \qquad (u = e^{-iz}),$$

F_1 n'a que des zéros et pôles d'ordonnée positive, F_2 des zéros et pôles d'ordonnée négative; G_1 et G_2 deux fonctions méromorphes d'ordre nul en u et $1 : u$ respectivement.

Quand on fait tendre y vers $+\infty$, G_2 tend vers une limite finie, et d'après la définition même de $m(y, F)$, on a

$$m(y, F) = m(y, F_1) + O(1),$$

$$m\left(y, \frac{1}{F}\right) = m\left(y, \frac{1}{F_1}\right) + O(1).$$

Quant aux expressions

$$N(y, F) \quad \text{et} \quad N\left(y, \frac{1}{F}\right),$$

elles sont respectivement identiques à

$$N(y, F_1) \quad \text{et} \quad N\left(y, \frac{1}{F_1}\right),$$

à cause de la définition de $n(t, \infty)$.

En appliquant la formule de Jensen à $G_1(u)$, donc à $F_1(u)$, et en tenant compte des égalités précédentes, on obtient

$$m\left(y, \frac{1}{F}\right) + N\left(y, \frac{1}{F}\right) = m(y, F) + N(y, F) + O(1).$$

On déduit de là, par un raisonnement connu, qu'il est inutile de reproduire ici (1) :

$$m(y, a) + N(y, a) = m(y, \infty) + N(y, \infty) + O(1).$$

Ce n'est autre que le premier théorème fondamental de M. Nevanlinna.

Dans le cas particulier où la fonction $F(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et pôles d'ordonnée négative, on sait que le premier membre de l'égalité précédente représente une fonction croissante et convexe de y. La méthode employée ici ne permet pas d'affirmer qu'il en est encore ainsi dans le cas général.

Je conviens d'appeler encore fonction caractéristique de $F(z)$ la fonction

$$T(y, F) = m(y, \infty) + N(y, \infty).$$

On pourra au besoin remplacer $T(y, F)$ par une fonction croissante et convexe de y et qui n'en diffère que par une fonction bornée. Il existe de telles fonctions, ne serait-ce la fonction caractéristique de $F_1(z)$ qui possède cette propriété (pour y positif).

6. Il convient de distinguer les ordres relatifs de $T(y, F)$ des deux côtés de l'axe réel. Une transformation homographique à coefficients constants dont le déterminant ne s'évanouit pas, n'altère pas la fonction caractéristique à une fonction additive bornée près. Ceci montre que deux fonctions appartenant à la famille de ces transformées possèdent le même ordre relatif du côté des y positifs, et le même ordre relatif, qui peut être différent du premier, du côté des y négatifs.

Soit $F = f : g$, il existe des parallèles à Ox, d'ordonnée indéfiniment croissante, en dehors des domaines d'exclusion des fonctions f, g, $f - ag$, car l'épaisseur totale des bandes d'exclusion est finie.

Sur une telle droite, on peut écrire, d'après l'expression du module de F du n° 1 et compte tenu de la définition de $N(y, 1 : F) = ny - \Sigma r_p$,

$$\log |F(x + iy) - a| = N\left(y, \frac{1}{F - a}\right) - N(y, F - a) + k(x, y)\, y^{\rho+\varepsilon}.$$

(1) R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars (Chap. I, n° 7).

Faisons l'hypothèse qu'il existe une infinité de telles parallèles sur lesquelles $|F(z)-a|>1$.

Intégrant le long d'une telle droite entre $-\pi,\pi$ on obtient, en remarquant que $N(y, a)$ ne dépend pas de x et que le long de cette droite $\log|F-a|$ est positif,

$$m(y, F-a)=N\left(y, \frac{1}{F-a}\right)-N(y, F-a)+o(1)y^{\rho+\varepsilon},$$

ou

$$T(y, F)=N\left(y, \frac{1}{F-a}\right)+o(1)y^{\rho+\varepsilon}.$$

Si donc on suppose que la fonction F est à croissance régulière, c'est-à-dire que

$$\lim_{y=\infty}\frac{\log T(y)}{\log y}=1+\rho,$$

ou bien que son ordre est inférieur à 2, le rapport de $y^{\rho+\varepsilon}$ à $T(y, F)$ est infiniment petit avec $1:y$.

En appelant, suivant la terminologie habituelle, défaut de la valeur a l'expression

$$\delta(a)=1-\overline{\lim_{y=\infty}}\frac{N(y, a)}{T(y, F)},$$

on obtient la proposition suivante :

Soit une fonction méromorphe périodique d'ordre inférieur à 2, ou bien d'ordre quelconque mais à croissance régulière, si a est une valeur telle que $|F(z)-a|>1$ sur une suite de parallèles à Ox d'ordonnée indéfiniment croissante, en dehors des bandes d'exclusion de la fonction, on peut affirmer que le défaut de la valeur a est nul.

La proposition précédente s'applique à une fonction périodique méromorphe F d'ordre inférieur à 2 ou à croissance régulière, dès que F admet ∞ comme valeur exceptionnelle. On a vu, en effet, au n° 3, que pour une telle fonction le logarithme du module se comporte, en dehors des domaines d'exclusion, comme une fonction entière à croissance régulière ou d'ordre inférieur à 2, pour laquelle le logarithme du module finit par surpasser toute valeur finie en dehors des domaines d'exclusion.

Si l'on suppose maintenant que F, toujours à croissance régulière ou d'ordre inférieur à 2, admet a comme valeur exceptionnelle, une transformation homographique convenable à coefficients constants transforme F en une fonction K admettant ∞ comme valeur exceptionnelle et pour laquelle la proposition précédente s'applique. Comme les zéros de $F-b$ (b quelconque différent de a) sont ceux de $K-c$ (pour b infini, on prendra les zéros de $1:F$, la valeur correspondante c reste toujours finie), la proposition s'applique à F pour

laquelle le défaut de toute valeur finie ou infinie autre que la valeur exceptionnelle a est nul.

Pour toute fonction méromorphe périodique exceptionnelle (en particulier pour une fonction entière) d'ordre inférieur à 2, ou à croissance régulière, le défaut de toute valeur finie ou infinie autre que la valeur exceptionnelle est nul (1).

En supposant que la fonction n'admet qu'un nombre fini de suites négatives, et en prenant la transformée $G(u)$, on obtient les propositions suivantes :

Pour les fonctions méromorphes d'ordre nul satisfaisant à

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log \log r} < 2,$$

ou bien simplement à

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log T(r)}{\log \log r} < \infty,$$

mais à croissance régulière, le défaut d'une valeur a est nul si l'on peut trouver une suite de cercles centres à l'origine de rayon indéfiniment croissant, en dehors des couronnes centres à l'origine contenant les zéros et les pôles de la fonction, tels que sur ces cercles $|G(u) - a| > 1$.

Si la fonction, qui satisfait toujours aux mêmes hypothèses, admet une valeur exceptionnelle (il en est ainsi pour les fonctions entières), le défaut est nul pour toute valeur autre que la valeur exceptionnelle.

La notion de défaut, dans les deux derniers énoncés, est prise dans le sens habituel.

7. D'après ce qui précède, si l'on désigne par

$$n[r, F - G, D(\varepsilon)],$$

le nombre de zéros de $F - G$ de module inférieur à r et contenus dans l'angle $D(\varepsilon)$ d'ouverture 2ε et de sommet à l'origine, situé du côté du plan où l'ordre relatif de F est $1 + \rho$, on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \log^{\rho} \frac{n[r, F - G, D(\varepsilon)]}{\log r} = 1 + \rho,$$

G désigne toujours une fonction méromorphe de même période et d'ordre

(1) Est exclu de cet énoncé, le cas sans intérêt, des combinaisons finies d'exponentielles linéaires. J'avais énoncé, dans ma thèse (n° 24), cette propriété pour les fonctions entières, mais j'avais omis de préciser les conditions de validité relatives à la croissance régulière ou à l'ordre. Il est clair que dans l'égalité $T(y, F) = N(y, a) + o(1)y^{\rho+\varepsilon}$ rien n'indique, dans le cas général, que le rapport du dernier terme au premier est infiniment petit, précisément pour la suite des valeurs de y vérifiant cette égalité.

inférieur à $1+\rho$. L'égalité ne peut être en défaut que pour une fonction G au plus.

Il y a donc au plus une valeur exceptionnelle au sens de M. Borel et cette valeur est la même que la valeur exceptionnelle au sens de Picard.

Toute droite issue de l'origine contient une direction de Borel de la fonction.

Au lieu de considérer un angle infiniment petit, on peut considérer une bande de largeur infiniment petite (non parallèle à la période) et examiner la limite du premier membre de l'égalité précédente.

J'avais montré qu'il existait, dans la bande $-\pi<x<\pi$, pour les fonctions entières périodiques, au moins une telle bande qui confère au premier membre de l'égalité ci-dessus sa valeur maximum, c'est-à-dire ρ. La démonstration que j'en avais donnée, qui n'est qu'une transposition d'une méthode due à M. Valiron (1), basée sur une inégalité classique de M. Milloux, s'applique aussi aux fonctions méromorphes périodiques d'ordre fini. Elle s'applique même, *mutatis mutandis*, quand on considère, non plus des bandes parallèles à Oy, mais des bandes de direction quelconque non parallèles à la période.

8. Appelons, avec M. Valiron, caractère de la direction D, l'expression

$$\gamma(D, Z)=\lim_{\varepsilon=0}\left[\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{\pi N[r, D(\varepsilon), Z]}{\varepsilon T(r, F)}\right]$$

relative à la valeur Z (2).

La considération de $\gamma(D, Z)$ permet d'énoncer un résultat plus précis que celui que j'ai énoncé pour les fonctions entières périodiques, et fournit une généralisation des théorèmes connus de M. Valiron sur les fonctions méromorphes d'ordre nul.

THÉORÈMES. — A. *Pour toute fonction méromorphe périodique d'ordre fini (sauf pour les fonctions d'ordre 2 ne vérifiant pas l'égalité*

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{T(r, F)}{r^2\log r}=\infty\Big),$$

si le caractère de D *est nul pour trois valeurs de* Z, *il est nul pour toutes les valeurs de* Z *à l'exception, peut-être, d'un ensemble de* Z *de mesure linéaire nulle sur la sphère de Riemann.*

B. *Il existe au moins une direction de caractère positif, pour tous les* Z, *sauf pour deux* Z *au plus.*

---

(1) VALIRON, *Sur les directions de Borel des fonctions méromorphes d'ordre nul* (*Bull. Sc. Math.*, 59, 1935).

(2) Pour les notations de ce numéro et des suivants, *cf.* mon précédent Mémoire.

Une fois le théorème A établi, pour démontrer le théorème B, il suffit de reprendre ce qui a été dit pour les fonctions entières, en faisant le passage du nombre $n(y, D, Z)$ à la moyenne $N(y, D, Z)$. Pour éviter des redites, je me contente de préciser quelques points nécessaires à l'établissement du théorème A.

Cas des fonctions d'ordre supérieur à 2 ou d'ordre 2 vérifiant

$$\overline{\lim_{y=\infty}} \frac{T(y, F)}{y^2 \log y} = \infty.$$

Afin d'éviter les irrégularités dans la croissance possible de $T(y, F)$, introduisons, avec M. Valiron, une fonction $U(y)$ continue telle que

$$\overline{\lim_{y=\infty}} \frac{T(y, F)}{U(y)} = 1,$$
$$\lim_{y=\infty} \frac{U(y)}{y^2 \log y} = \infty.$$

On sait qu'on peut définir une telle fonction $U(y)$.

Remplaçons, dans la définition de $\gamma(D, Z)$, $T(y, F)$ par $U(y)$.

Soit une suite de valeurs de y en progression arithmétique de raison 2ε, y_1, $y_2, \ldots, y_p, \ldots$.

Couvrons le rectangle

$$D(\varepsilon) \qquad (o < y < y_p)$$

à l'aide de p cercles C_q de rayon $\varepsilon\sqrt{2}$ et traçons Γ_q concentriques à C_q et de rayon k fois plus grand. On a, d'après une inégalité de M. Milloux, comme dans le cas des fonctions entières,

$$n[y_p, D(\varepsilon), Z] < 2A \sum_{u=a,b,c} n[y_p, D(k\varepsilon), u] + p.B - D.p \log \eta + 2D \log p!$$

Z est représenté sur la sphère à l'extérieur de deux cercles dont la somme des rayons est inférieure à 2η.

Mais

$$2\varepsilon \sum_{1}^{p-1} n[y_q, D(\alpha), u] < N[y_p, D(\alpha), u] < 2\varepsilon \sum_{1}^{p} n[y_q, D(\alpha), u],$$

d'où

$$N[y_p, D(\varepsilon), Z] < 2A \sum_{u=a,b,c} N[y_p, D(k\varepsilon), u]$$
$$+ 4A\varepsilon \sum_{u=a,b,c} n[y_p, D(k\varepsilon), u] + \sum_{q=1}^{p} [q.B - D.q \log \eta + 2D \log q!].$$

L'avant-dernière somme est moindre que $y_p^{\rho+\varepsilon'}$. La dernière est moindre que

$$\text{const.} y_p^2 \log y_p.$$

Par suite, si le caractère de D est nul pour les valeurs a, b, c, on a

$$N[y_p, D(k\varepsilon), u] < \lambda U(y_p) \quad (u = a, b, c).$$

λ est donné aussi petit que l'on veut; l'inégalité est assurée dès que p est suffisamment grand, et ε suffisamment petit, ce que nous supposons.

Il suit facilement de là, grâce aux hypothèses faites, que

$$\gamma(D, Z) = \lim_{\varepsilon = 0} \left[\overline{\lim_{y = \infty}} \frac{\pi N[y, D(\varepsilon), z]}{\varepsilon U(y)} \right] = 0.$$

Cas des fonctions d'ordre inférieur à 2. — Circonscrivons aux domaines d'exclusion situés dans $D(\varepsilon)$ des cercles C_q et traçons Γ_q concentriques et de rayon k fois plus grand.

C_q finit par être dans $D(\varepsilon)$, et Γ_q dans $D(k\varepsilon)$.

Considérons une suite de valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_p, \ldots$, telle que dans chaque rectangle

$$D(\varepsilon) \qquad (y_{q-1} < y < y_q),$$

il finit par y avoir un seul cercle d'exclusion.

On a encore, en remarquant que dans $D(\varepsilon)$ les zéros de $F(z) - Z$ finissent par être dans C_q, si l'on exclut les Z de module supérieur à un nombre donné, d'ailleurs aussi grand que l'on veut, ce qui revient à exclure sur la sphère un cercle de rayon aussi petit que l'on veut

$$n[y_p, D(\varepsilon), Z] < 2A \sum_{u=a,b,c} n[y_p, D(k\varepsilon), u] + pB - Dp \log\eta + 2D \log p! + n_0(p),$$

$n_0(p)$ désigne le nombre, fini, de zéros de $F(z) - Z$ du domaine $0 < y < y_p$, $D(\varepsilon)$ en dehors des C_q.

On déduit, comme dans le premier cas, une inégalité entre les moyennes des zéros, inégalité qui ne diffère du cas précédent que par l'adjonction au second membre d'un terme de l'ordre de p, provenant de la sommation des termes en $n_0(p)$.

Ici, p est inférieur à y_p^2, $\log p!$ est inférieur à $2y_p^2 \log y$. La fin de la démonstration se fait comme plus haut, en remarquant que

$$\lim \frac{y^{2\rho} \log y}{U(y)} = 0.$$

Le théorème A est donc établi.

C'est par erreur que j'avais affirmé que les théorèmes de M. Valiron sur l'existence d'une direction de caractère positif s'appliquaient à toutes les fonctions d'ordre nul (du moins d'après son Mémoire déjà cité). Ces théorèmes ne s'appliquent en réalité qu'aux fonctions d'ordre nul vérifiant

$$\overline{\lim} \frac{T(r)}{(\log r)^2} = \infty.$$

La démonstration précédente montre qu'ils s'appliquent encore aux fonctions d'ordre nul quelconques, sauf à celles d'entre elles qui vérifient simultanément

$$\overline{\lim}\frac{\log T(r)}{\log\log r}=2 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\frac{T(r)}{(\log r)^2\log\log r}<\infty.$$

9. Le problème des cercles de remplissage n'appelle aucun développement nouveau : les résultats obtenus pour les fonctions entières périodiques s'appliquent sans modification aux fonctions méromorphes.

Pour les fonctions d'ordre supérieur à 2, il existe, dans chaque direction de caractère positif, une suite infinie de cercles C_q de rayon arbitrairement petit tels que dans chacun de ces cercles la fonction prend au moins

$$z_q^{\rho-1-\varepsilon_q} \qquad (z_q \text{ centre de } C_q)$$

fois toute valeur z représentée à l'extérieur de deux cercles de rayon d_q sur la sphère de Riemann, ε_q et d_q tendant vers zéro avec $\frac{1}{q}$.

Pour les fonctions d'ordre inférieur à 2, il existe simplement des domaines D_n de dimensions

$$e^{-\alpha_n^{\rho}} \qquad (\alpha_n>A),$$

tels que, à partir d'un certain rang $n(A, N)$, dans chaque domaine D_n, la fonction prend au moins une fois toute valeur donnée Z de module inférieur à N.

Il existe naturellement de tels domaines dans toutes les directions de caractère positif.

SUR LA SYNCHRONISATION

DES SYSTÈMES OSCILLANTS

NON LINÉAIRES

PAR M. JULES HAAG.

INTRODUCTION.

Le problème de la synchronisation est un problème très important, tant au point de vue mécanique qu'au point de vue électrique.

Dans le cas particulier d'un oscillateur linéaire uniquement soumis à une résistance visqueuse et à une force sinusoïdale, sa solution est élémentaire. Mais ce cas est purement théorique et l'on peut s'en éloigner beaucoup dans la pratique.

Le problème général se pose de la manière suivante :

Étant donné un système dont les mouvements autonomes comprennent un ou plusieurs mouvements périodiques, on le soumet à des forces perturbatrices périodiques ou bien indépendantes du temps. Parmi les mouvements ainsi perturbés, *existe-t-il un mouvement périodique stable* et, dans le second cas, *quelle est la période de ce mouvement?*

Si les équations différentielles des mouvements autonomes sont linéaires et à coefficients constants, on a affaire à un *oscillateur linéaire*. Ses mouvements autonomes comprennent alors une *infinité de mouvements périodiques*. Dans un précédent travail (III), j'ai résolu complètement le problème de la synchronisation de cette espèce d'oscillateurs, en supposant que *les forces perturbatrices sont suffisamment petites* vis-à-vis des forces principales.

Mais il existe des oscillateurs *non linéaires*, en particulier la classe importante des *oscillateurs de relaxation*. Pour ceux-ci, on a *un seul mouvement autonome périodique*. L'étude de leur synchronisation fait l'objet du présent Mémoire.

Dans le Chapitre I, est exposée la *théorie générale*, pour un oscillateur à n degrés de liberté, soumis à des *forces perturbatrices infiniment petites*. Dans le cas où ces forces dépendent du temps, on doit supposer que *leur période et les périodes propres sont proportionnelles à des nombres entiers* assez simples. Si cette dernière condition n'est remplie qu'approximativement, la synchronisation peut encore avoir lieu; mais, il faut alors que les forces synchronisantes aient une intensité assez grande pour pouvoir imposer leur période au système, contrairement à ce qui se passe dans le cas des oscillateurs linéaires.

Si les forces perturbatrices sont *indépendantes du temps*, il existe un mouvement perturbé périodique, dont on peut calculer approximativement la période au moyen d'une formule *généralisant la formule d'Airy*. Ce cas comprend en particulier le *couplage* de plusieurs oscillateurs non linéaires.

La théorie dont nous venons d'esquisser les grandes lignes repose sur une théorie préliminaire concernant les équations différentielles à solution périodique, laquelle a été développée dans (I). Elle est valable moyennant certaines hypothèses sur les fonctions figurant dans ces équations, lesquelles se traduisent par des hypothèses analytiques sur la nature des forces agissant sur l'oscillateur. Nous avons jugé inutile d'expliciter celles-ci, le lecteur pouvant aisément les déduire de (I).

Le Chapitre II, très court, est réservé aux oscillateurs à *un seul degré de liberté*. Il contient une étude géométrique directe de la stabilité.

Le Chapitre III, également très court, est une application à *l'oscillateur de M. Abelé*.

Le Chapitre IV est consacré aux *oscillateurs de relaxation*. Dans deux Mémoires antérieurs (IV et V), j'avais fait une étude asymptotique de leurs mouvements autonomes. En appliquant la théorie générale du Chapitre I et utilisant les formules asymptotiques obtenues dans (IV) et (V), je résous, en première approximation, le problème de la synchronisation et du couplage de ces oscillateurs.

Le Chapitre V est l'application du précédent à deux exemples concrets.

Le premier est *l'oscillateur de van der Pol;* je me borne à indiquer rapidement les résultats qui le concernent.

Le deuxième est l'oscillateur ayant une *courbe fondamentale en dents de scie*. Il n'a sans doute pas grand intérêt par lui-même. Mais, il présente l'avantage de permettre une *étude directe* et rigoureuse de la synchronisation par force sinusoïdale. Cette étude conduit d'abord à une *vérification des formules asymptotiques* déduites du Chapitre IV.

En second lieu, elle peut être faite numériquement pour de *grandes forces synchronisantes*. On constate ainsi que la synchronisation sous-harmonique est possible *quel que soit le rapport des périodes*, pourvu que la force synchronisante ait une intensité suffisante.

Il serait intéressant de chercher si cette conclusion est valable pour les

autres oscillateurs de relaxation, par exemple pour celui de van der Pol. Il serait également désirable de savoir jusqu'à quel point la théorie générale du Chapitre I s'applique à des forces perturbatrices non infiniment petites. Ce sont là des problèmes qui paraissent fort difficiles; je ne les ai pas abordés.

Dans ce qui va suivre, nous aurons à nous reporter aux publications suivantes de l'auteur :

I. *Sur l'existence et la stabilité des solutions périodiques de certains systèmes différentiels* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), t. 65, 1948, p. 299 à 335].

II. *Sur la stabilité des points invariants d'une transformation* [*Bull. Sc. math.*, (2), t. 73, 1949, p. 1 à 12].

III. *Sur la synchronisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), t. 64, 1947, p. 285 à 338].

IV. *Étude asymptotique des oscillations de relaxation* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), t. 60, 1943, p. 35 à 111].

V. *Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), t. 61, 1944, p. 73 à 117].

Les références correspondantes seront repérées par le chiffre romain ci-dessus correspondant.

Les références au présent travail seront désignées par le numéro de l'équation ou du paragraphe, suivi d'un point et du numéro du Chapitre écrit en chiffre arabe.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE.

1. *Définition générale d'un système oscillant.* — Soit un système à n degrés de liberté, soumis *en permanence* à des forces indépendantes du temps, que nous appellerons les *forces principales*. Nous supposons que parmi les mouvements obéissant à ces forces, existe un (1) *mouvement périodique*, de période T, appelée *période propre* du système. Un tel système sera dit *système oscillant* ou encore *oscillateur* à n degrés de liberté.

On peut déterminer sa position et sa vitesse par $m = 2n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Pour faciliter le langage, nous appellerons P le point de l'espace (E_m) qui a pour coordonnées cartésiennes les x_i et P_0 la position initiale de P, c'est-à-dire sa position au temps zéro.

(1) On pourrait supposer qu'il en existe une infinité, dépendant de p paramètres arbitraires. Mais les oscillateurs linéaires étant mis à part, nous n'en connaissons aucun qui remplisse cette condition. Nous n'en ferons donc pas l'étude, bien qu'elle résulte de (1), tout aussi bien que la théorie développée dans le présent Chapitre.

Quand le système est animé d'un mouvement périodique, le point P décrit une courbe fermée, ou *cycle*, (C). Le point P_0 est un point quelconque Q de ce cycle, sa position dépendant du choix arbitraire de l'origine des temps.

Pour que le mouvement du système soit périodique, il faut et il suffit que P_0 soit sur (C). De telles conditions initiales seront dites *conditions normales*. Elles ne peuvent être réalisées *physiquement* d'une manière rigoureusement exacte. Dès lors, pour que l'oscillation périodique puisse être effectivement obtenue, il faut qu'elle soit *stable*, c'est-à-dire que des *conditions initiales voisines des conditions normales* donnent naissance à un *mouvement tendant asymptotiquement vers le mouvement périodique* pour $t = +\infty$. On peut encore dire que si P_0 est suffisamment voisin de (C), la trajectoire de P tend asymptotiquement vers (C).

La condition pour qu'il en soit ainsi résulte des n^{os} 24,I et 6,II. Les z_i vérifient un système de m équations différentielles du premier ordre. A ce système correspond un *système linéaire associé* permettant de calculer, par une équation algébrique de degré m, les m *décréments*. L'un de ceux-ci est égal à *un. La condition nécessaire* (1) *et suffisante de stabilité est que les* $m-1$ *décréments autres que* 1 *aient un module* <1.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons cette condition remplie.

2. *Forces perturbatrices.* — Ajoutons aux forces principales des *forces perturbatrices, très petites* par rapport aux premières. Les équations différentielles du *mouvement perturbé* sont de la forme

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z) + \lambda g_i(z, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

Les f_i correspondent aux forces principales, les λg_i aux forces perturbatrices. Le facteur λ est très petit et sera considéré comme un infiniment petit du premier ordre. Nous conviendrons de le supposer positif, ce qu'on peut toujours obtenir en changeant de signe les g_i. Il mesure en quelque sorte *l'intensité des forces perturbatrices*.

Si les g_i dépendent de t, *elles admettent la période* T par rapport à cette variable. Les forces correspondantes seront alors dites *forces synchronisantes*.

Les mouvements correspondant à $\lambda = 0$ seront appelés les *mouvements autonomes*.

Le système (1) ci-dessus rentre dans le type étudié au n° 26,I. D'après le théorème du n° 34,I, nous pouvons énoncer :

Théorème. — *Si les forces perturbatrices sont assez petites, il existe un mouvement périodique obéissant à l'ensemble de toutes les forces.*

(1) Dans (I), j'ai seulement démontré que la condition est suffisante. Dans (II), j'ai démontré qu'elle est nécessaire et suffisante. Il suffit d'appliquer le théorème du n° 4,II à la transformation ponctuelle faisant correspondre au point P_0 la position P_1 de P au temps T.

Ce théorème résulte aussi des nos 9 à 11, II.

Sa valididé est toutefois subordonnée à l'existence d'au moins une racine de *l'équation en* μ. Voici la signification concrète de cette équation.

Supposons *qu'on ait choisi l'origine des temps pour le mouvement périodique autonome*, en fixant le point P_0 correspondant (n° 1). L'instant t du passage de P en un point quelconque P_t de (C) est déterminé, à un multiple de T près. Nous l'appellerons la *phase* en ce point, par analogie avec la terminologie des mouvements sinusoïdaux. Les coordonnées de P_t sont des fonctions périodiques *déterminées* $Z_i(t)$.

Quand on se donne les fonctions g_i, l'origine des temps est *imposée à l'avance;* le temps t correspondant sera appelé la *phase de la force synchronisante*. La même origine sert pour la définition du mouvement périodique perturbé.

Soit $Q_t(\lambda)$ la position au temps t du point P correspondant à ce mouvement. Lorsque λ tend vers zéro, le mouvement perturbé tend vers le mouvement autonome. Le point $Q_0(\lambda)$ tend vers un point P_μ déterminé de (C). Plus généralement, $Q_t(\lambda)$ tend vers $P_{t+\mu}$. On peut donc dire que μ représente *l'avance de phase du mouvement limite sur la force synchronisante*.

Posons, avec les notations de (I) :

$$G(\mu) = A_1(T, g) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^T H_k'(t) g_k[Z(t), t-\mu]\, dt. \tag{2}$$

L'équation en μ est, d'après (75, I),

$$G(\mu) = 0. \tag{3}$$

A chaque racine de cette équation et à chaque valeur suffisamment petite de λ correspond un mouvement perturbé périodique.

Comme au n° 1, ce mouvement n'est *physiquement* réalisable que s'il est stable. *La condition nécessaire et suffisante de stabilité, pour λ suffisamment petit, est que l'indice de stabilité σ soit* < 0 (*cf.* nos 35 et 36, I; 12 et 13, II).

Nous appellerons A la *limite supérieure des valeurs de λ pour lesquelles le mouvement périodique stable existe*. Il serait évidemment désirable de pouvoir la déterminer. Mais, c'est là un problème qui paraît fort difficile. D'après la démonstration des nos 29 à 36, I, nous sommes seulement en mesure de calculer un nombre $A' < A$. Il est d'ailleurs possible que A n'existe pas ou, plus exactement, soit infini (*cf.* n° 19, 5).

3. *Calcul de l'indice de stabilité.* — D'après (105, I), on a $\sigma = K_1'$. Son calcul par la formule (104, I) peut être poussé plus loin et considérablement simplifié.

Commençons par expliciter les fonctions φ_i définies par (78, I). Le groupe constitué par la solution fondamentale périodique $y_i' = Z_i'(t)$ est nécessairement

un groupe simple, puisque $S_1 = 1$ est une racine simple. Nous avons donc (n° 13, I)

$$(4) \qquad \varphi_i = \sum_{q=1}^{m} A_q(t, g)\, y_i^q(t) + \sum_{q=2}^{m} \frac{S_q}{1 - S_q} A_q(T, g)\, y_i^q(t).$$

La partie de K_1^1 provenant des φ_i s'écrit $K' + K''$, avec (1)

$$K' = \int_0^T \left[\sum_q A_q(t, g) X_q \right] dt, \qquad K'' = \sum_{q=2}^{m} \frac{S_q}{1 - S_q} A_q(T, g) \int_0^T X_q\, dt,$$

$$X_q = \sum_k \sum_h \sum_i H_k^1\, p_{khi}\, y_h^1\, y_i^q.$$

On a, d'après (1, I),

$$\frac{dy_k^q}{dt} = \sum_i p_{ki}\, y_i^q;$$

d'où

$$\frac{d^2 y_k^q}{dt^2} = \sum_i p_{ki} \frac{dy_i^q}{dt} + \sum_i y_i^q \frac{d}{dt}(p_{ki}).$$

Or, p_{ki} est la fonction obtenue en remplaçant les z par les Z dans $f_{ki} = \dfrac{\partial f_k}{\partial z_i}$. Comme f_k ne dépend pas de t, on a

$$\frac{d}{dt}(p_{ki}) = \sum_h p_{kih} Z_h' = \sum_h p_{khi}\, y_h^1.$$

On déduit de ces deux formules

$$X_q = \sum_k H_k^1 \left(\frac{d^2 y_k^q}{dt^2} - \sum_i p_{ki} \frac{dy_i^q}{dt} \right)$$

ou, d'après (17, I),

$$X_q = \sum_k H_k^1 \frac{d^2 y_k^q}{dt^2} + \sum_i \frac{dH_i^1}{dt} \frac{dy_i^q}{dt} = \frac{dY_q}{dt},$$

en posant

$$(5) \qquad Y_q = \sum_k H_k^1 \frac{dy_k^q}{dt}.$$

Soit maintenant $F(t)$ une fonction quelconque de t; on a

$$(6) \qquad \int_0^T X_q F(t)\, dt = \left| Y_q F \right|_0^T - \int_0^T Y_q F'(t)\, dt.$$

---

(1) Pour simplifier l'écriture, nous convenons que, dans les sommations où l'indice est seulement écrit sous $\sum$, cet indice doit prendre toutes les valeurs de 1 à m.

Prenons $F = A_q(t, g)$. Nous avons, en nous reportant à (24, I), remarquant que $A_q(o, g) = o$ et tenant compte de (3),

$$K' = \sum_{q=2}^{m} Y_q(T) A_q(T, g) - \sum_q \int_0^T \left(\sum_i H_i^q g_i \right) Y_q \, dt.$$

L'intégrale ci-dessus s'écrit, d'après (5),

$$\int_0^T \left[\sum_i \sum_k H_i^q H_k^1 g_i \frac{dy_k^q}{dt} \right] dt.$$

Or,

$$\sum_k H_k^1 \frac{dy_k^q}{dt} = -\sum_k y_k^q \frac{dH_k^1}{dt}, \qquad \text{car} \quad \sum_k H_k^1 y_k^q = o \quad \text{ou} \quad 1.$$

Le crochet s'écrit donc

$$-\sum_i \sum_k H_i^q g_i y_k^q \frac{dH_k^1}{dt}.$$

D'où

$$K' = \sum_{q=2}^{m} Y_q(T) A_q(T, g) + \int_0^T \left[\sum_q \sum_i \sum_k H_i^q g_i y_k^q \frac{dH_k^1}{dt} \right] dt.$$

Or, $\sum_q H_i^q y_k^q = o$ si $i \neq k$ et 1 si $i = k$. Donc,

$$K' = \sum_{q=2}^{m} Y_q(T) A_q(T, g) + \int_0^T \left(\sum_k g_k \frac{dH_k^1}{dt} \right) dt. \tag{7}$$

4. Prenons maintenant $F(t) = 1$. Nous avons

$$\int_0^T X_q \, dt = Y_q(T) - Y_q(o).$$

Or, $H_k^1(T) = H_k^1(o)$, d'après (19, I). Puis, d'après (18, I) et en supposant tous les groupes simples, $y_k^q(t+T) = S_q y_k^q(t)$. En dérivant par rapport à t, puis faisant $t = o$, on voit que

$$Y_q(T) - Y_q(o) = \frac{S_q - 1}{S_q} Y_q(T).$$

D'où

$$K'' = \sum_{q=2}^{m} A_q(T, g) Y_q(T).$$

Nous avons donc

$$K_1^1 = \int_0^T \left(\sum_k g_k \frac{dH_k^1}{dt} \right) dt + \int_0^T \left(\sum_i \sum_k H_i^1 y_k^1 q_{ik} \right) dt.$$

La première intégrale s'écrit, en intégrant par parties,

$$\left[\sum_k g_k \Pi_k'\right]_0^T - \int_0^T \sum_k \Pi_k' \left(\sum_h q_{kh} y_h' + \frac{\partial g_k}{\partial t}\right) dt.$$

Le terme intégré est nul, car la fonction entre crochets admet la période T. Il reste finalement $\sigma = -\Lambda_1\left(T, \frac{\partial g}{\partial t}\right)$, soit

$$\sigma = G'(\mu). \tag{8}$$

Nous appellerons *racine stable* de l'équation (3) toute racine μ_1 vérifiant la condition $G'(\mu_1) < 0$. C'est une racine *simple* et telle que $g(\mu)$ *passe du signe* + *au signe* — *quand* μ *traverse* μ_1 *en croissant*.

5. *Domaine de stabilité.* — Nous appelons ainsi *le domaine* (D_0) *dans lequel doit se trouver la position initiale* P_0 *pour que le mouvement tende asymptotiquement vers le mouvement périodique*. Physiquement, il détermine l'ensemble des *conditions de lancement du système* donnant asymptotiquement lieu à un mouvement périodique. Sa connaissance a donc une grande importance pratique. Malheureusement, sa détermination *exacte* est un problème généralement fort difficile et non résolu. Nous pouvons seulement préciser un domaine $(\overline{D}_0)$, que nous appellerons *domaine réduit*, qui est certainement inclus dans (D_0).

Supposons d'abord qu'il s'agisse des *mouvements autonomes*, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de forces perturbatrices. Supposons en outre que la condition de stabilité donnée à la fin du n° 1 soit satisfaite. Dans ce cas, $(\overline{D}_0)$ est une sorte de tube entourant le cycle (C) et dont les dimensions transversales sont d'autant plus petites que le maximum s des modules des décréments est plus voisin de *un*. Par exemple, si $n = 1$, $(\overline{D}_0)$ est la bande comprise entre les courbes (C) et (C'). Mais, bien entendu, le domaine *complet* (D_0) peut être plus étendu. Nous verrons (n° 19.5) qu'il peut comprendre tout le plan.

Si P_0 appartient à (D_0), le point P_n correspondant au temps nT tend, pour $n = -\infty$, vers un certain point Q de (C); ce point détermine la *phase limite du mouvement*. Les points P_0 correspondant à un même point Q constituent, dans (D_0), une surface (S_Q) de (E_m). (Sur la figure 1, cette surface est une ligne). Si P_0 est sur (S_Q), il en est évidemment de même de tous les P_n: la surface (S_Q) est invariante pour la transformation (P_0, P_1).

Supposons maintenant que p décréments aient un module > 1. La surface (S_Q) devient une multiplicité à $m - p - 1$ dimensions. Le domaine (D_0) constitué par toutes les (S_Q) n'a plus que $m - p$ dimensions; c'est un *domaine restreint de stabilité*. Son interprétation concrète est la suivante. Il est impossible de réaliser *physiquement* des conditions initiales amenant P_0 sur (D_0); mais on peut s'en approcher beaucoup. Dans ce cas, P_0 est très voisin d'une (S_Q). Le

point P_n commence par se rapprocher de Q et semble, pendant un temps très long, tendre vers lui; le mouvement semble tendre vers le mouvement périodique. Mais si n augmente indéfiniment, P_n finit par s'éloigner de Q et le mouvement s'écarte de plus en plus du mouvement périodique. Ceci prouve que, *dans les vérifications expérimentales, il faut attendre longtemps pour être assuré de la stabilité d'un mouvement périodique.* (*Cf.* n° 7, III.)

Supposons que les décréments puissent varier avec un certain paramètre et que p d'entre eux aient un module tendant vers 1 par valeurs < 1, les $m-p-1$ autres modules restant inférieurs à un nombre fixe < 1. Le domaine (D_0) a

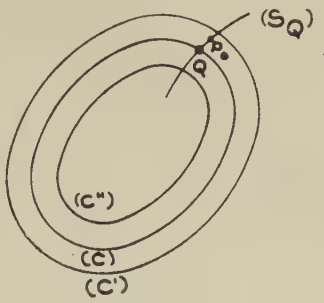

Fig. 1.

toujours m dimensions, mais tend vers une multiplicité à $m-p$ dimensions comprenant le cycle (C); il s'aplatit de plus en plus. Dans le cas de la figure 1, il se réduit à la limite au cycle (C) lui-même.

6. Considérons maintenant le *cas où il y a des forces perturbatrices périodiques* et supposons *l'indice de stabilité négatif* pour une certaine racine γ de l'équation (3), à laquelle correspond le point Q_γ, que nous appellerons *point de synchronisation*. Pour toute valeur suffisamment petite de λ, nous avons un cycle (C_λ). Sur ce cycle, le point $Q_0(\lambda)$ a une position déterminée, qui tend vers Q_γ quand λ tend vers zéro.

Autour de $Q_0(\lambda)$ existe un domaine de stabilité $D_0(\lambda)$, à m dimensions, qui est l'ensemble des positions initiales P_0 donnant lieu à un mouvement tendant vers le mouvement périodique. La trajectoire issue d'un tel point P_0 admet (C_λ) pour courbe asymptote.

Quelle est la limite de $D_0(\lambda)$ quand λ tend vers zéro? On peut être tenté de croire que c'est la multiplicité (S_Q) du n° 5 correspondant au point Q_γ, puisque, pour $\lambda = 0$, il faut que P parte d'un point de cette multiplicité pour que P_n tende vers Q_γ pour n infini. Mais ce raisonnement n'est pas correct.

Dans la réalité, λ a une valeur déterminée, aussi petite qu'on veut, mais fixe; et l'on doit chercher la limite de P_n pour $n = \infty$ *avant de faire tendre* λ *vers zéro*. Il est possible (*cf.* n° 18.5) que le domaine $D_0(\lambda)$, au lieu d'être aplati comme

sur la figure 2, comprenne au contraire tout le cycle (C_λ). On peut imaginer par exemple que, quel que soit le point de départ P_0, voisin de ce cycle, les points P_1, P_2, ... restent toujours dans ce voisinage et que l'un d'eux finisse par pénétrer dans le domaine *réduit* couvert de hachures, après quoi le point P_n tend nécessairement vers $Q_0(\lambda)$. S'il en est ainsi, la limite de $D_0(\lambda)$ pour $\lambda = 0$ est le domaine de stabilité des mouvements autonomes (n° 5).

On peut encore présenter ceci sous une autre forme, plus analytique. Admettons que $D_0(\lambda)$ comprenne toute la courbe (C_λ). Puis, prenons sur (C_λ) un point $H_0(\lambda)$, position de P au temps $0 \neq n\mathrm{T}$ dans le mouvement périodique.

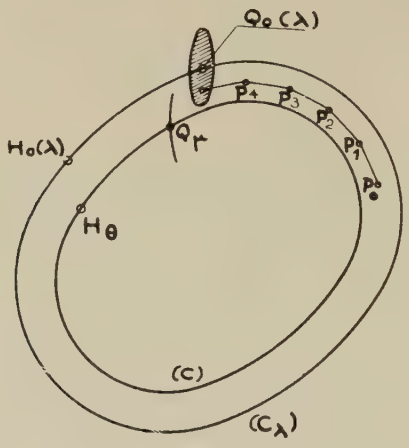

Fig. 2.

Si, 0 restant constant, λ tend vers zéro, $H_0(\lambda)$ tend vers un certain point H_0 de (C). Cela posé, faisons partir, au temps zéro, deux points P et P′, le premier de $Q_0(\lambda)$ et le second de $H_0(\lambda)$. La distance PP′ au temps t est une fonction $D(t, \lambda)$. On a

$$\lim_{t=\infty} D(t, \lambda) = 0 \qquad \text{(quel que soit } \lambda\text{)};$$

donc,

$$\lim_{t=0}\left[\lim_{t=\infty} D(t, \lambda)\right] = 0.$$

Au contraire, la limite de $D(t, \lambda)$ pour $\lambda = 0$ est une fonction périodique déterminée de t, qui n'a pas de limite pour $t = \infty$. On n'a donc *pas le droit d'intervertir l'ordre des passages à la limite*.

7. *Cas où les forces perturbatrices ont une période* T′ *voisine de la période propre* T. — Ce cas a été traité au n° 39, I en supposant que l'oscillateur et sa période propre dépendaient d'un certain paramètre. Mais cette hypothèse est inutile et l'on peut exposer la solution d'une manière plus simple.

Posons

$$T = T'(1 + \lambda\beta). \tag{9}$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{dz_i}{dt} = (1 + \lambda\beta) f_i(z) + \lambda \bar{g}_i(z, t), \tag{10}$$

avec

$$\bar{g}_i(z, t) = g_i(z, t) - \beta f_i(z). \tag{11}$$

Faisons jouer aux $\bar{g}_i$ le rôle de fonctions perturbatrices; elles admettent, comme les g_i, la période T′ par rapport à t. Quant au système principal, obtenu en supprimant les g_i dans (10), il admet la solution $Z_i[(1 + \lambda\beta)t]$, de période T′, car si t augmente de T′, $(1 + \lambda\beta)t$ augmente de T, d'après (9). Nous rentrons donc dans le cas examiné précédemment (¹).

8. Appelons $G(\mu)$ ce que devient la formule (2) quand on y remplace les g_i par les $\bar{g}_i$. On a

$$\bar{G}(\mu) = A_1(T, g) - \beta A_1(T, f).$$

Or, $f_k(t) = Z_k'(t) = y_k^1(t)$. Donc,

$$A_1(T, f) = \int_0^T \left[\sum_k H_k^1(t) y_k^1(t) \right] dt = T,$$

puisque le crochet vaut *un*. D'où

$$\bar{G}(\mu) = G(\mu) - \beta T, \qquad \bar{G}'(\mu) = G'(\mu). \tag{12}$$

L'équation en μ s'écrit

$$\beta T = G(\mu). \tag{13}$$

Elle est identique à (109, I), car $\frac{\Delta T}{\lambda}$ vaut ici $\frac{T - T'}{\lambda} = \beta T'$, dont la limite pour $\lambda = 0$ est βT.

Quant à l'*indice de stabilité*, il est toujours donné par la formule (8).

9. Cette formule peut être établie *directement*, en utilisant (II). Dans le voisinage du point Q du cycle (C), prenons un point quelconque de coordonnées $z_1 = Z_1$, $z_i = Z_i + x_i$ pour $i > 1$. Supposons que P parte de ce point au moment où la phase de la force synchronisante a la valeur x_1. Au bout d'un

(¹) Signalons toutefois que les fonctions principales $(1 + \lambda\beta) f_i(z)$ dépendent ici de λ, tandis qu'elles n'en dépendaient pas au n° 2. Mais on se rend aisément compte que la démonstration des nos 26 à 36, I subsiste intégralement si les f_i dépendent de λ. Les fonctions Z_i en dépendent aussi et il suffit d'admettre qu'elles sont continues pour $\lambda = 0$, ainsi que leurs dérivées. Dans les équations (76, I) et (105, I), on doit remplacer les Z_i par leurs valeurs pour $\lambda = 0$.

temps $t = F(x, \lambda)$, voisin de T', P est de nouveau dans le voisinage de Q. Nous déterminons t par la condition que z_1 reprenne la valeur Z_1 et nous appelons $Z_i + X_i$ les valeurs des autres z_i à cet instant. Posons

$$(4) \qquad X_1 = x_1 + F(x, \lambda) - T' = F_1(x, \lambda), \qquad X_i = F_i(x, \lambda) \quad \text{pour} \quad i > 1.$$

Les fonctions F_i sont parfaitement déterminées et satisfont aux conditions imposées aux fonctions f_i de (II), sous réserve que les f_i, g_i du n° 1 ci-dessus satisfassent à certaines conditions classiques, résultant de la théorie des équations différentielles.

Les formules (14) définissent une *transformation ponctuelle* dans l'espace (x), dépendant du paramètre λ. Pour $\lambda = 0$, les fonctions $F, F_2, \ldots, F_n$ dépendent uniquement des variables x_i d'indice $i > 1$. Si ces x_i sont nuls, il en est de même des X_i correspondants; de plus, on a $F(0, 0) = T = T'$; donc, $X_1 = x_1$ quel que soit x_1. Nous avons donc, pour $\lambda = 0$, la *multiplicité invariante* $x_i = 0$ pour $i > 1$.

Avec les notations du n° 6, II, nous avons identiquement $\frac{\partial z_i}{\partial x_1} = 0$ pour $i > 1$. Donc, en faisant une substitution linéaire convenable sur les z_i d'indice > 1, nous pouvons supposer que les x_i sont *variables canoniques*. Dans ces conditions, l'équation (34, II) s'écrit, en se reportant au n° 15, II : $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} = 0$, soit

$$\delta T + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0.$$

Si l'on y remplace x_1 par $-\mu$, on obtient l'équation en μ; de sorte que

$$G(\mu) = -\frac{\partial F}{\partial \lambda}.$$

L'indice de stabilité est, d'après (44, II), $\sigma = c_{11}$. Utilisons maintenant les formules (45, II). La fonction F étant indépendante de x_1 pour $\lambda = 0$, les dérivées $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_i}$ sont nulles et il reste

$$\sigma = -\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x_1} = -\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \mu} = G'(\mu),$$

c'est-à-dire la formule (8) ci-dessus.

10. Dans la pratique, le problème se pose de la manière suivante. *Les périodes* T *et* T' *sont données et l'on peut faire varier à volonté l'intensité des forces synchronisantes.* Ceci revient à se donner le rapport

$$(15) \qquad \frac{T}{T'} = 1 + \gamma,$$

γ étant petit vis-à-vis de l'unité; et à faire varier le facteur λ, qui règle l'inten-

sité des forces synchronisantes. Il s'agit alors de savoir s'il existe des valeurs de λ permettant de réaliser la synchronisation.

En comparant (9) et (15), on a $\beta = \frac{\gamma}{\lambda}$. Si λ tend vers zéro, β tend vers l'infini et l'équation (13) n'a plus de racines, car son second membre est une fonction périodique et bornée de μ. On peut donc affirmer que *la synchronisation est impossible pour des valeurs infiniment petites de* λ, *sauf si* γ *est rigoureusement nul.*

Supposons que l'on connaisse la limite supérieure Λ du n° 2 en fonction de β, soit $\Lambda = F(\beta)$. Si l'inégalité $\lambda < F\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)$ peut être vérifiée pour certaines valeurs de λ, la synchronisation est possible. Mais, *elle exige que l'intensité des forces synchronisantes dépasse une certaine limite* λ_0, d'autant plus élevée que γ est plus grand, c'est-à-dire que le rapport des périodes est plus éloigné de l'unité. Si cet éloignement est trop grand, il peut arriver que la fonction $F\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)$ soit $> \lambda$ quel que soit λ; dans ce cas; la synchronisation est impossible.

On aperçoit ici une *différence essentielle avec la synchronisation d'un oscillateur linéaire*, du fait que celle-ci peut être, en principe, obtenue avec une force synchronisante arbitrairement petite (1).

Les considérations qui précèdent manquent évidemment de précision, parce que nous ne connaissons pas la fonction $F(\beta)$. Nous les rendrons plus claires, au Chapitre V, sur un exemple concret, pour lequel nous calculerons numériquement la limite λ_0.

11. *Synchronisation sous-harmonique.* — Supposons que $\frac{T}{T'}$ soit *rigoureusement* égal à la fraction irréductible $\frac{N}{N'}$. Le mouvement périodique autonome et les forces perturbatrices admettent la période commune $T'' = N'T = NT'$. Par conséquent, on peut appliquer les résultats des n^{os} 2 à 4.

Dans la formule (2), on doit intégrer de zéro à $N'T$. Voyons ce que cela donne.

Posons $\frac{2\pi}{T} = \omega$, $\frac{2\pi}{T'} = \omega'$. Les fonctions $g_i(z, z', t)$ peuvent être développées en séries de Fourier de la variable $\omega' t$; les coefficients de ces séries sont des fonctions des z_i, z'_i. En portant dans (2), on obtient, sous le signe $\int$, une série analogue, mais dont les coefficients sont maintenant des fonctions de t, de période T et peuvent à leur tour être développées en séries de Fourier de la variable ωt. Nous avons alors à calculer des intégrales telles

(1) En supposant qu'il n'existe pas d'autres forces perturbatrices, en particulier pas de frottement constant (*cf.* n° 21, III).

que $\int_0^{T''} \cos p\omega t \cos p'\omega' t\, dt$. Comme $p\omega T'' = 2\pi p N'$ et $p'\omega' T'' = 2\pi p' N$ sont multiples de 2π, cette intégrale n'est différente de zéro que si $p\omega = p'\omega'$, soit $\frac{p}{p'} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{T}{T'} = \frac{N}{N'}$. Donc, $p = qN$, $p' = qN'$, q entier. On en conclut que *les forces synchronisantes peuvent être réduites à leurs harmoniques de rang multiple de* N'. Elles admettent alors la période T. Donc, au lieu de calculer $G(\mu)$ en intégrant de zéro à T'', on peut *intégrer seulement de zéro à* T, ce qui donne la fonction $H(\mu)$. On a ensuite

$$G(\mu) = N' H(\mu). \tag{16}$$

12. Si $\frac{T}{T'}$ est seulement *très voisin de* $\frac{N}{N'}$, soit

$$\frac{T}{T'} = \frac{N}{N'}(1 + \lambda\beta), \tag{17}$$

on peut appliquer les résultats du n° 8, sous réserve de remplacer T par T'' dans l'équation (13). En tenant compte de (16), on obtient *l'équation en* μ

$$\beta T = H(\mu). \tag{18}$$

L'indice de stabilité est

$$\sigma = N' H'(\mu). \tag{19}$$

Dans le cas particulier où $N' = 1$, c'est-à-dire *si la fréquence propre est sous-multiple de la fréquence de la force synchronisante*, on obtient la *synchronisation sous-harmonique*. On doit alors garder tous les harmoniques de la force. *Si la force est sinusoïdale, on est nécessairement dans ce cas.*

Remarquons encore que si $N' > 1$, la période T'' du mouvement synchronisé est un multiple de la période propre T. Le cycle (C_γ) comporte, avant sa fermeture, N' boucles voisines du cycle (C).

Comme au n° 10, *si le rapport* $\frac{T}{T'}$ *n'est pas exactement égal à* $\frac{N}{N'}$, soit $\frac{T}{T'} = \frac{N}{N'}(1 + \gamma$, *la synchronisation n'est possible que si l'intensité des forces synchronisantes est assez grande.*

13. *Limitation des nombres* N *et* N'. — Quel que soit le rapport $\frac{T}{T'}$, on peut l'approcher autant qu'on veut par une fraction $\frac{N}{N'}$. On peut être *tenté d'en conclure que la synchronisation est possible quelle que soit la période* T' *de la force synchronisante*. Voyons si cette conclusion est justifiée.

Supposons que l'on calcule $\frac{N}{N'}$ par la méthode des fractions continues. On est assuré que le nombre γ du n° 11 est, en valeur absolue, inférieur à $\frac{1}{NN'}$. Il peut

être évidemment beaucoup plus petit, même nul. Mais, il peut aussi être de l'ordre de $\frac{1}{NN'}$. Soit β_0 le maximum imposé à β pour que l'équation (18) ait des racines. Il lui correspond une limite inférieure λ_0 de λ, qui vaut $O\left(\frac{1}{\beta_0 NN'}\right)$.

Par ailleurs (n° 11), la fonction $H(\mu)$ se calcule en réduisant chaque fonction $g_k(z, z', t)$ à ses harmoniques de rang multiple de N'. Les produits par $H_k^1(t)$ des coefficients de ces harmoniques doivent, à leur tour, être réduits à leurs harmoniques de rang multiple de N. Or, on sait (1) que les coefficients de Fourier de rang n valent au plus $O\left(\frac{1}{n}\right)$ si la fonction est à variation bornée et $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si la dérivée de cette fonction est à variation bornée. Dans le premier cas, on aura $\beta_0 = O\left(\frac{1}{NN'}\right)$ et, dans le second cas, $\beta_0 = O\left(\frac{1}{N^2N'^2}\right)$. Donc, $\lambda_0 = O(1)$ ou $O(NN')$. Il peut alors arriver, surtout dans le deuxième cas, que λ_0 dépasse la limite supérieure Λ (n° 2), auquel cas la synchronisation sera impossible.

Nous ne connaissons pas Λ, mais seulement le nombre $\Lambda' < \Lambda$ (n° 2). En reprenant la discussion du n° 47, I et remarquant que les fonctions $A_i(t, f)$ et φ_i sont ici multipliées par N', on voit que $\Lambda' = O\left(\frac{1}{N'^3}\right)$. Si N' est très grand, Λ' est $< \lambda_0$ et nous ne pouvons pas affirmer que la synchronisation soit possible. Il en est de même pour $N' = 1$, si $\lambda_0 = O(N)$ et si N est très grand.

Observons enfin que, si λ est grand, on ne sera pas assuré que le décrément ait un module < 1, même si l'indice de stabilité est < 0.

Pour ces diverses raisons, il y a lieu de penser que *la synchronisation n'est possible que si le rapport* $\frac{T}{T'}$ *est voisin d'une fraction dont le numérateur et surtout le dénominateur sont assez petits.*

Mais, bien entendu, il s'agit là d'une simple présomption et non d'une certitude. Nous verrons d'ailleurs (n° 19.5) un exemple pour lequel la synchronisation est toujours possible, à condition que la force synchronisante soit assez grande.

14. *Synchronisation par une force sinusoïdale.* — Nous avons vu (n° 12) que *la synchronisation harmonique ou sous-harmonique est seule possible.*

Soit $g_k(t) = R_k \cos(\omega' t + \alpha_k)$. Nous avons

$$G(\mu) = L \cos \omega' \mu + M \sin \omega' \mu, \tag{20}$$

(1) *Cf.* VALIRON, *Théorie des fonctions*, p. 182 et 183.

avec

$$(21)\qquad \begin{cases} L = \sum_{k=1}^{m} R_k \int_0^T H_k^1(t) \cos(\omega' t + \alpha_k)\, dt, \\ M = \sum_{k=1}^{m} R_k \int_0^T H_k^1(t) \sin(\omega' t + \alpha_k)\, dt. \end{cases}$$

L'équation (18) devient, en posant $\omega' \mu = \nu$,

$$(22)\qquad \Im T = L \cos\nu + M \sin\nu.$$

Le nombre λ_0 du n° 13 vaut

$$(23)\qquad \lambda_0 = \frac{\nu'\, T}{\sqrt{L^2 + M^2}}.$$

L'amplitude de la force synchronisante doit dépasser une limite d'autant plus élevée que le rapport $\frac{T}{T'}$ *est plus éloigné de* N.

Si cette condition est remplie, l'équation (22) admet deux racines ν_0 et ν_1 entre 0 et 2π. Il est inutile de leur ajouter des multiples de 2π, car cela équivaut à augmenter la phase de la force synchronisante d'un tel multiple.

L'indice de stabilité est, d'après (19),

$$(24)\qquad \sigma = \omega'(-L \sin\nu + M \cos\nu).$$

Il a un signe différent pour $\nu = \nu_0$ et $\nu = \nu_1$. La racine stable est celle qui le rend négatif.

15. *Forces perturbatrices indépendantes de t.* — Dans ce cas, la fonction $G(\mu)$ est une constante G; l'inconnue μ n'existe plus. Mais, nous en avons une autre, qui est la période T' du *mouvement perturbé périodique*. Cette période est donnée, en première approximation, c'est-à-dire à $O(\lambda^2)$ près, par les formules (9) et (13). Appelons $\Delta T = T' - T$ *l'accroissement de période dû aux forces perturbatrices*. On a

$$(25)\qquad \Delta T = -\lambda G.$$

Ceci est une *généralisation de la formule d'Airy*, classique en Chronométrie pour les oscillateurs linéaires utilisés en Horlogerie.

Notre système perturbé peut évidemment être considéré comme un système oscillant (n° 1). Il admet un décrément égal à *un*; les $m - 1$ autres décréments sont voisins de ceux du système non perturbé. Comme ceux-ci ont, par hypothèse, un module < 1, il en est de même des nouveaux décréments, pourvu que λ soit assez petit.

En résumé, *si les forces perturbatrices sont assez petites, il existe un mouvement perturbé périodique stable, dont la période est donnée, en première approximation, par la formule* (25).

16. Revenons au n° 14, en supposant que *des forces telles que les précédentes s'ajoutent aux forces synchronisantes*. L'équation (22) devient

$$\beta T - G = L\cos\nu + M\sin\nu \tag{26}$$

et la condition de synchronisation est remplacée par

$$L^2 + M^2 > (\beta T - G)^2. \tag{27}$$

Si G est assez grand, *il peut se faire que l'intensité de la force synchronisante doive être augmentée.*

17. *Couplage de plusieurs systèmes.* — Considérons n systèmes oscillants stables (Σ_α) $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Nous appelons $z_{\alpha i}$ les variables correspondant à (Σ_α), i variant entre 1 et le double du nombre des degrés de liberté. La solution périodique, de période T_α, sera désignée par $Z_{\alpha i}(t + \mu_\alpha)$, μ_α désignant une constante arbitraire. Les solutions fondamentales du système associé seront $y^j_{\alpha i}(t + \mu_\alpha)$, l'indice $j = 1$ étant réservé à $Z'_{\alpha i}(t + \mu_\alpha)$. Il leur correspond les fonctions $H^j_{\alpha i}(t + \mu_\alpha)$.

Cela posé, soumettons nos n systèmes à un *léger couplage* (par inertie ou dynamique). Nous obtenons le système (S), dont le mouvement est déterminé par les équations différentielles

$$\frac{dz_{\alpha i}}{dt} = f_{\alpha i}(z) + \lambda g_{\alpha i}(z). \tag{28}$$

Les fonctions principales $f_{\alpha i}$ ne contiennent que les variables $z_{\alpha j}$: mais les fonctions perturbatrices $g_{\alpha i}$ contiennent toutes les variables $z_{\beta j}$.

Supposons maintenant que *les périodes propres* T_α *admettent approximativement un multiple commun* T' et posons

$$T_\alpha = \frac{T'}{N_\alpha}(1 - \lambda\gamma_\alpha) \qquad (N_\alpha \text{ entier}). \tag{29}$$

Nous allons chercher *si notre nouveau système admet un mouvement périodique stable de période* T *voisine de* T', soit

$$T = \frac{T'}{1 - \lambda\rho}, \tag{30}$$

ρ étant inconnu pour le moment.

Portant dans (29), nous posons

$$T_\alpha = \frac{T}{N_\alpha}(1 + \lambda\varepsilon_\alpha), \qquad \varepsilon_\alpha = \gamma_\alpha - \rho(1 - \lambda\gamma_\alpha). \tag{31}$$

Nous pouvons écrire, comme au n° 7,

$$\frac{dz_{\alpha i}}{dt} = (1 + \lambda\varepsilon_\alpha) f_{\alpha i}(z) + \lambda\bar{g}_{\alpha i}(z), \tag{32}$$

$$\bar{g}_{\alpha i} = g_{\alpha i} - \varepsilon_\alpha f_{\alpha i}. \tag{33}$$

Les $\overline{g}_{\alpha i}$ sont les nouvelles fonctions perturbatrices. Le nouveau système principal admet la solution périodique $Z_{\alpha i}[(1+\lambda\varepsilon_\alpha)t+\mu_\alpha]$, laquelle admet la période T. Nous pouvons donc appliquer la théorie générale au système (32).

18. La solution périodique ci-dessus dépend des n paramètres μ_α; nous aurons donc n équations en μ (n^{os} 26 et 28, I). Posons

$$(34) \qquad G_\alpha(\mu)=\sum_k \int_0^T H^1_{\alpha k}(t+\mu_\alpha)\, g_{\alpha k}(Z)\, dt.$$

les Z figurant dans $g_{\alpha k}$ étant les fonctions $Z_{\beta i}(t+\mu_\beta)$. La fonction $G_\alpha(\mu)$ dépend donc des n variables $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. En répétant le calcul du n° 8, on voit que les *équations en* μ s'écrivent

$$(35) \qquad \varepsilon_\alpha T = G_\alpha(\mu) \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, n).$$

Dans ces équations figurent les $n+1$ inconnues μ_α et T. Le système est donc indéterminé et il semble, au premier abord, que l'on ne puisse pas calculer T. Mais, si l'on change, dans la formule (34), t en $t+C$ et les μ en $\mu-C$, C désignant une constante arbitraire, on voit, en tenant compte de la périodicité de la fonction sous le signe $\int$, que la fonction $G_\alpha(\mu)$ ne change pas (1). Dès lors, on peut choisir C pour annuler par exemple μ_1 et l'on n'a plus que les n inconnues T, $\mu_2, \ldots, \mu_n$. En éliminant les μ et remplaçant T par (30), *on obtient une équation ne contenant plus que l'inconnue* ρ, ce qui *détermine la période du mouvement du système* (S).

Ayant ρ, on en déduit les μ_α.

19. Il nous reste maintenant à voir si ce mouvement est stable. Les *indices de stabilité* sont donnés par l'équation (105, I). Mais, le calcul des K^α_β est ici plus compliqué qu'au n° 3.

Nous avons toujours la formule (4), avec cette seule différence que l'on remplace l'indice i par le double indice αi et que q doit prendre les valeurs du groupe (α). De plus, S_q doit être remplacé par $S'_{\alpha q}=S^{N_\alpha}_{\alpha q}$, du fait que la période (2) est $T=N_\alpha T_\alpha$. Enfin, les g_i sont remplacés par les $\overline{g}_i$.

La formule (104, I) devient

$$K^\alpha_\beta=\sum_k\sum_h\int_0^T H^1_{\beta k}\left(\sum_i p_{khi}\varphi_{\beta i}+\overline{q}_{\beta kh}\right)y^1_{\alpha h}\, dt.$$

Le facteur p_{khi} n'est $\neq 0$ que si les indices h, k, i appartiennent au même

(1) *Voir* un raisonnement analogue au n° 10, III.

(2) Il s'agit de la période limite pour $\lambda=0$.

groupe, ce qui n'est possible que si $\alpha = \beta$. Donc, pour $\alpha \neq \beta$, on a $K_\beta^\alpha = L_\beta^\alpha$, en posant

$$L_\beta^\alpha = \sum_k \sum_h \int_0^T \frac{\partial g_{\beta k}}{\partial z_{\alpha h}} H_{\beta k}^1 y_{\alpha h}^1 \, dt \tag{36}$$

et remarquant que $\frac{\partial f_{\beta k}}{\partial z_{\alpha h}} = 0$.

Pour $\alpha = \beta$, on a toujours le terme L_α^α, calculé avec les $g_{\alpha k}$. On a en plus le terme $K'_\alpha + K''_\alpha$, K'_α et K''_α désignant les expressions analogues à K′ et K″ du n° 3. En se reportant aux calculs des n^{os} 3 et 4, on a

$$K_\alpha^\alpha = \int_0^T \left(\sum_k \bar{g}_{\alpha k} \frac{dH_{\alpha k}^1}{dt} \right) dt + \int_0^T \left(\sum_h \sum_k H_{\alpha k}^1 y_{\alpha h}^1 \frac{\partial \bar{g}_{\alpha k}}{\partial z_{\alpha h}} \right) dt.$$

En effectuant une intégration par parties sur la première intégrale, il vient

$$K_\alpha^\alpha = - \sum_{\beta \neq \alpha} L_\alpha^\beta. \tag{37}$$

en tenant compte de ce que $f_{\alpha k}$ ne contient pas les $z_{\beta i}$.

20. L'équation de stabilité est de degré n. Mais, elle admet *a priori* la racine $\sigma = 0$, puisque (S) est un système oscillant et admet par conséquent le décrément $S = 1$ (n° 1). On le vérifie d'ailleurs immédiatement en additionnant toutes les colonnes du déterminant (105, I) et tenant compte de (37). *La condition de stabilité est que les $n - 1$ racines non nulles aient une partie réelle négative.*

S'il en est ainsi, on est assuré que *le système* (S) *admet un mouvement périodique stable, pourvu que* λ soit assez petit, c'est-à-dire que *le couplage soit assez faible et que les périodes propres admettent un multiple commun avec une approximation suffisante.*

Ceci *généralise la théorie du couplage des oscillateurs linéaires.*

21. *Oscillateurs quasi linéaires.* — Nous pouvons obtenir à volonté des systèmes oscillants du type défini au n° 1, en utilisant la théorie générale de (III). Il nous suffit en effet de prendre le système du n° 2, III dans le cas où les Q_i sont indépendants de t, en nous arrangeant pour qu'il existe un mouvement périodique stable (n^{os} 10 et 11, III). Citons comme exemples simples le pendule ou le balancier de montre, munis d'un échappement.

L'oscillateur ainsi constitué peut, à son tour, être soumis à des forces perturbatrices telles que celles introduites au n° 2 et proportionnelles au facteur infiniment petit λ; nous pouvons évidemment lui appliquer la méthode générale qui vient d'être exposée.

Il convient toutefois d'observer que la détermination du présent oscillateur comporte aussi un autre facteur λ (n° 2. III), que l'on peut appeler ρ pour éviter toute confusion, mais qui n'en est pas moins un facteur très petit (¹). Dès lors, les nouvelles forces perturbatrices peuvent être purement et simplement incorporées dans les anciennes; ce qui nous ramène à la théorie des oscillateurs linéaires. Pour cette raison, l'oscillateur que nous venons d'imaginer peut être appelé un oscillateur *quasi linéaire*.

On peut lui appliquer indifféremment la théorie générale de (III) en groupant toutes les forces perturbatrices (anciennes et nouvelles), ou bien la présente théorie, en considérant ρ comme fixe et λ comme infiniment petit. Il est bien évident que les deux points de vue doivent conduire au même résultat.

Les variables les plus commodes sont les variables (x_i, y_i) définies par (10, III), qui déterminent l'amplitude et la phase instantanées correspondant à chaque période propre. En utilisant ces variables, j'ai vérifié effectivement l'identité annoncée ci-dessus. Mais, ce calcul ne comportant d'autre intérêt que le contrôle mutuel des deux théories, je ne le reproduirai pas, afin de ne pas trop allonger le présent Mémoire. Nous en verrons toutefois un exemple (Chap. III), concernant l'oscillateur de M. Abelé.

CHAPITRE II.

OSCILLATEUR A UN SEUL DEGRÉ DE LIBERTÉ.

1. *Oscillations autonomes.* — Soit

$$x'' = f(x, x') \tag{1}$$

l'équation différentielle du mouvement. On peut ramener cette équation à un système de deux équations du premier ordre en posant, d'une manière générale,

$$x = h_1(z_1, z_2), \qquad x' = h_2(z_1, z_2),$$

les h_i désignant des fonctions continues, ainsi que leurs dérivées premières et secondes. On suppose de plus que leur jacobien est $\neq 0$ dans le domaine où l'on fera varier x et x'.

Le changement de variables le plus simple, mais pas nécessairement le plus avantageux, est

$$x = z_1, \qquad x' = z_2. \tag{2}$$

(¹) On pourrait s'affranchir de cette restriction, en considérant par exemple un pendule muni d'un échappemnt puissant, susceptible d'entretenir des oscillations de grande amplitude, 90° par exemple. Mais la théorie de (III) ne serait plus applicable: seule la théorie du présent Chapitre pourrait être utilisée pour l'étude des petites perturbations d'un tel oscillateur.

Il donne

$$z_1' = z_2, \qquad z_2' = f(z_1, z_2). \tag{3}$$

L'intégration de ce système se ramène à l'équation différentielle du premier ordre

$$z_2\, dz_2 = f(z_1, z_2)\, dz_1 \tag{4}$$

et à la quadrature

$$t = \int \frac{dz_1}{z_2}. \tag{5}$$

Nous supposons l'existence d'un *mouvement périodique autonome*, défini par la fonction $X(t)$, de période T. Avec la notation du n° 17, I, nous avons

$$p_{11} = 0, \qquad p_{12} = 1, \qquad p_{21} = f'_x(X, X'), \qquad p_{22} = f'_{x'}(X, X'). \tag{6}$$

La formule (122, I) se réduit à

$$\Delta(t) = \int_0^t f'_{x'}(X, X')\, dt. \tag{7}$$

La *condition de stabilité* est $\Delta(T) < 0$, soit

$$\int_0^T f'_{x'}(X, X')\, dt < 0. \tag{8}$$

Le décrément autre que *un* est $S = e^{\Delta T}$.

2. On peut retrouver ceci par la représentation géométrique du n° 1.1. Pour simplifier l'écriture, remplaçons z_1 et z_2 par x et y. Au mouvement périodique correspond un *cycle* (C), décrit, dans le sens rétrograde, par le point P(X, Y), quand t croît de zéro à T. Nous appellerons P_0 la position de P au temps zéro, qui peut être choisie arbitrairement sur (C).

Considérons maintenant un mouvement quelconque. Le point $M(x, y)$ décrit une trajectoire quelconque issue de M_0. Soient u et v les composantes du vecteur $\overrightarrow{PM}$. On a

$$u' = v, \qquad v' = f(X + u, Y + v) - f(X, Y).$$

Développons le second membre de la deuxième équation par la formule de Taylor; nous avons, en appelant p et q les fonctions p_{21} et p_{22} du n° 1 :

$$v' = up + vq + R.$$

R désignant une forme quadratique en u, v, à coefficients bornés (1). Appelons

(1) Nous supposons que f admet des dérivées premières et secondes continues et bornées dans le voisinage de (C).

maintenant r et θ les coordonnées polaires de PM. Des équations précédentes, on déduit

$$\theta' = p\cos^2\theta + q\sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta + \frac{R}{r}\cos\theta. \tag{9}$$

$$\frac{r'}{r} = (p+1)\sin\theta\cos\theta - q\sin^2\theta + \frac{R}{r}\sin\theta. \tag{10}$$

Pour $0 < t < T$, le dernier terme de chacune de ces équations a un module $< Mr_0$, M désignant une constante (1).

Si l'on néglige le dernier terme de (9), on commet sur θ une erreur de module $< Nr_0$, N désignant une autre constante (2). Or, si l'on pose $\operatorname{tg}\theta = m$, l'équation obtenue devient une équation de Riccati. Si l'on écrit $m(T) = m(0)$, on obtient une équation du second degré par rapport à la constante d'intégration. Il y a donc deux solutions pour lesquelles on a $\theta(T) = \theta(0)$, à $k\pi$ près. Mais, l'une d'elles est connue; c'est l'angle polaire α de la tangente PT. En effet, on a $Y' = f(X, Y)$; d'où $Y'' = pY + qY'$. En tenant compte de $Y' = Y\operatorname{tg}\alpha$, on obtient

$$\alpha' = p\cos^2\alpha + q\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha. \tag{11}$$

Il y a donc une direction $P_0\lambda$ telle que, si M_0 est sur cette droite, la position M_1 de M au temps T s'y trouve aussi, avec une erreur angulaire $\widehat{\lambda P_0 M_1} = o(r_0)$.

3. L'équation (10) s'écrit, en tenant compte de (9) et à $o(r_0)$ près

$$\frac{r'}{r} = (\theta' + 1)\operatorname{tg}\theta.$$

D'autre part, soit V la vitesse de P. On a $V\cos\alpha = X' = Y$, $V\sin\alpha = Y'$. Dérivant logarithmiquement la première formule et tenant compte de la seconde, on obtient

$$\frac{V'}{V} = (\alpha' + 1)\operatorname{tg}\alpha.$$

---

(1) D'après l'hypothèse faite sur la fonction f, r admet une dérivée par rapport à r_0 et cette dérivée est continue (*cf.* Valiron, t. II, p. 313). Donc $r = o(r_0)$; d'où $R = o(r_0^2)$, ce qui justifie la conclusion ci-dessus.

(2) D'une façon générale, soit $x' = f(x, t) + \lambda$ une équation différentielle où λ désigne une fonction inconnue de t, mais dont le module est $< \varepsilon$. Soit X la solution correspondant à la valeur initiale x_0, pour $\lambda = 0$. Posons $x = X + u$. On a, en supposant l'existence et la continuité de f'_x, $u' = up + \lambda$, avec $p = f'_x(X + \xi u, t)$ $(0 < \xi < 1)$. Comme $u_0 = 0$, on en déduit

$$u = \int_0^t \lambda(t')\, e^{q(t)-q(t')}\, dt', \qquad q(t') = \int_{t'}^t p(t'')\, dt''.$$

Supposons $|f'_x| < m$, quels que soient x et t. On a $|q(t')| < m(t - t')$. D'où

$$u < \varepsilon \int_0^t e^{m(t-t')}\, dt' = \frac{\varepsilon}{m}(e^{mt} - 1).$$

Éliminant p entre (9) et (11), on a, à $o(r_0)$ près,

$$q(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\alpha) = \frac{\theta'+1}{\cos^2\theta} - \frac{\alpha'+1}{\cos^2\alpha} = (\operatorname{tg}\theta' - \operatorname{tg}\alpha)\left(\frac{r'}{r} + \frac{V'}{V}\right) + (\theta' - \alpha')(1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\alpha).$$

D'où

$$q = \frac{r'}{r} + \frac{V'}{V} + (\theta' - \alpha')\operatorname{cotg}(\theta - \alpha).$$

Intégrant de zéro à T et tenant compte de la périodicité de V, α et θ, nous obtenons, à $o(r_0)$ près,

$$\log\frac{r_1}{r_0} = \int_0^T q\,dt = \Delta(T).$$

On retrouve les résultats du n° 1.

4. D'après le n° 9, II, il existe une courbe (γ_0), issue de P_0, telle que si M_0

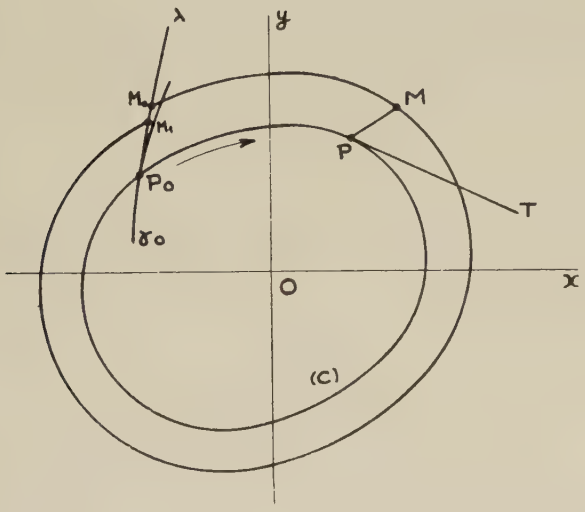

Fig. 3.

est sur cette courbe, le point M_n correspondant à $t = nT$ tende vers P_0 pour $n = \infty$. Ces points M_n sont évidemment tous sur (γ_0). La démonstration précédente nous montre que la tangente en P_0 à (γ_0) est la droite $P_0\lambda$ et que la distance P_0M_n décroît asymptotiquement en progression géométrique de raison S.

5. Revenons au système (3). Les solutions fondamentales du système linéaire associé sont (n° 49, I) $X'(t)$, $X''(t)$ et $U_1 = X'V_1$, $U_2 = X'V_2$, en posant

$$V_1 = \int \frac{e^{\Delta}}{X'^2}\,dt, \qquad V_2 = \int \frac{e^{\Delta}}{X'^2} f(X, X')\,dt$$

et choisissant les constantes d'intégration de telle manière que l'on ait

$$X'X''(V_2 - V_1) = e^{\Delta}$$

et

$$V_1(t - T) = SV_1(t), \qquad V_2(t + T) = SV_2(t).$$

On a ensuite

$$H_1^1(t) = U_2 e^{-\Delta}, \qquad H_2^1(t) = -U_1 e^{-\Delta}.$$

6. *Synchronisation.* — Soit $J = \lambda g(x, x', t)$ l'*accélération perturbatrice*, admettant la période $T' = \frac{T}{1 - \lambda\beta}$, conformément à la formule (9.1). En se reportant aux équations (3), on voit que $g_1 = 0$, $g_2 = g(x, x', t)$. La fonction $G(\mu)$ est, d'après (2.1),

$$G(\mu) = -\int_0^T U_1(t)\, g(X, X', t - \mu)\, e^{-\Delta t}\, dt. \tag{12}$$

On en déduit l'équation en μ et l'indice de stabilité par (13.1) et (8.1).

Si la force perturbatrice ne dépend pas de t, on a, à $O(\lambda^2)$ près :

$$\Delta T = T' - T = \int_0^T U_1 J e^{-\Delta t}\, dt. \tag{13}$$

Cette formule *généralise la formule d'Airy*.

Le mouvement périodique perturbé est *stable* si la force perturbatrice est assez petite (n° 15.1).

CHAPITRE III.

L'OSCILLATEUR DE M. ABELÉ (1).

1. *Étude préalable d'un cas plus général.* — Supposons que la fonction f du Chapitre II soit de la forme (2)

$$f(z, z') = 2z' G(y) F(z, z') - z. \qquad y = \sqrt{z^2 + z'^2}. \tag{1}$$

La fonction $G(y)$ s'annule pour $y = \rho > 0$ et la dérivée $G'(\rho)$ est < 0. On a la solution périodique évidente $X = \rho \cos t$. La condition (8.2) devient

$$I = \int_0^{2\pi} F(\rho \cos t, -\rho \sin t) \sin^2 t\, dt > 0. \tag{21}$$

---

(1) *Ann. franç. Chron.*, 1942, p. 105 à 195.

(2) Cette formule non homogène suppose qu'on a choisi l'unité de temps. Si celle-ci était arbitraire, on devrait faire précéder le dernier terme du facteur ω^2. Nous ne le faisons pas, pour simplifier l'écriture. De plus, nous remplaçons la lettre x par z.

Il y a évidemment une infinité de fonctions F remplissant cette condition et par suite une *infinité d'oscillateurs admettant une oscillation sinusoïdale stable, dont l'amplitude et la période sont choisies à l'avance.*

En particulier, la condition (2) est certainement remplie si la fonction F est identiquement positive.

2. Employons les variables signalées au n° 21.1; elles sont définies par les formules

$$z = y\cos\varphi, \qquad z' = -y\sin\varphi, \qquad \varphi = t + x. \tag{3}$$

Les fonctions x et y vérifient le système

$$\frac{dx}{dt} = 2\,\mathrm{GF}\sin\varphi\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{dt} = 2y\,\mathrm{GF}\sin^2\varphi \quad (1). \tag{4}$$

On a, en posant $\mathrm{G}'(\varphi) = m$,

$$\begin{cases} p_{11} = 0, & p_{12} = 2m\mathrm{F}(\varphi\cos t, -\varphi\sin t)\sin t\cos t, \\ p_{21} = 0, & p_{22} = 2\varphi m\mathrm{F}(\varphi\cos t, -\varphi\sin^2 t)\sin t. \end{cases} \tag{5}$$

Le système linéaire associé est, en appelant u et v les fonctions inconnues :

$$u' = vm\,\mathrm{F}\sin 2t, \qquad v' = 2v\varphi m\,\mathrm{F}\sin^2 t. \tag{6}$$

Son intégrale générale est

$$u = \mathrm{A}\mathrm{V}(t) + \mathrm{B}, \qquad v = \mathrm{A}e^{\Delta(t)}, \tag{7}$$

avec

$$\Delta(t) = 2\varphi m\int_0^t \mathrm{F}\sin^2 t\,dt, \qquad \mathrm{V}(t) = m\int_0^t e^{\Delta}\,\mathrm{F}\sin 2t\,dt. \tag{8}$$

Le *décrément* est

$$\mathrm{S} = e^{\Delta(2\pi)}, \tag{9}$$

ce qu'on aurait pu obtenir aussi par le n° 1.2.

Les solutions fondamentales sont

$$y_1^1 = 1, \quad y_2^1 = 0; \qquad y_1^2 = \mathrm{V}(t) - c, \quad y_2^2 = e^{\Delta}, \qquad c = \frac{\mathrm{V}(2\pi)}{\mathrm{S} - 1}. \tag{10}$$

D'où l'on déduit

$$\mathrm{H}_1^1 = 1, \qquad \mathrm{H}_1^2 = -e^{-\Delta}[\mathrm{V}(t) - c]. \tag{11}$$

3. *Synchronisation.* — Soit $\lambda g(z, z', t)$ l'accélération perturbatrice. En revenant au changement de variables (3), on voit que les fonctions perturbatrices du système (4) sont

$$g_1 = -\frac{g}{y}\cos\varphi, \qquad g_2 = -g\sin\varphi. \tag{12}$$

(1) De ces équations on peut déduire facilement que si l'on suppose $0 < m < \mathrm{F} < \mathrm{M}$ et $\mathrm{M}\,\mathrm{G} < h < 1$, pour $0 < \varphi - \mathrm{R} < y < \varphi + \mathrm{R}$; $g(y) > 0$ pour $\varphi - \mathrm{R} < y < \varphi$, $g(y) < 0$ pour $\varphi < y < \varphi + \mathrm{R}$; $\varphi - \mathrm{R} < y_0 < \varphi + \mathrm{R}$; y tend vers φ et x' vers zéro pour $t = +\infty$; le mouvement tend vers le mouvement sinusoïdal (*cf. C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1567-68).

Portant dans (2.1), on a

$$(13)\qquad G(\mu)=\int_0^{2\pi} g(\rho\cos t,\ -\rho\sin t,\ t-\mu)\left[e^{-\Delta}(V+c)\sin t-\frac{\cos t}{\rho}\right]dt.$$

D'où l'équation en μ et l'indice de stabilité.

Si l'on connaît explicitement la fonction $F(z, z')$ et si les données sont entièrement numériques, on peut continuer l'application de la méthode générale. Nous allons le faire pour l'oscillateur conçu et réalisé par M. Abelé.

4. *Oscillateur de M. Abelé.* — Les fonctions G et F ont les expressions suivantes (1) :

$$(14)\qquad G(y)=\rho^2-y^2,\qquad F(z,z')=\frac{a}{\rho^2-azz'+\sqrt{(\rho^2-azz')^2-\rho^2(y^2-\rho^2)}},$$

où a désigne une constante positive (2).

La fonction F est compliquée. Mais, la constante a vaut (3) $1{,}81\cdot10^{-5}$; elle est très petite. Comme $|zz'|<y^2<\rho^2$, on peut négliger azz' devant ρ^2 et l'on a, avec une erreur relative de l'ordre de 10^{-5},

$$(15)\qquad F=\frac{a}{\rho(\rho+y)}.$$

Comme $m=-2\rho$, la première formule (8) donne immédiatement

$$(16)\qquad \Delta(t)=-aw,\qquad w=t-\sin t\cos t.$$

D'où

$$(17)\qquad S=e^{-2\pi a}=1-2\pi a+O(a^2).$$

La deuxième formule (8) donne ensuite, à $O(a^2)$ près,

$$(18)\qquad V(t)=-\frac{a}{\rho}\sin^2 t.$$

La constante c est nulle et la formule (13) devient, à $O(a^2)$ près,

$$(19)\qquad G(\mu)=-\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi} g(\rho\cos t,\ -\rho\sin t,\ t-\mu)(\cos t+a\sin^3 t)\,dt.$$

5. Examinons le cas où l'on synchronise par une *force sinusoïdale*. Soit

---

(1) *Loc. cit.*, p. 139.

(2) Sa signification physique est la suivante. En régime de démarrage, le décrément logarithmique des oscillations est $2\pi a$; il doit être positif pour que l'amplitude augmente.

(3) *Loc. cit.*, p. 188.

$g = \cos\omega t$, avec $\omega = 1 + \lambda\beta$. Comme on doit faire $\lambda = 0$ sous le signe $\int$ de (19), on peut prendre $g = \cos t$ et l'on a

$$G(\mu) = -\frac{\pi}{\rho}\left(\cos\mu - \frac{3a}{4}\sin\mu\right). \tag{20}$$

L'équation en μ est

$$2\beta\rho = -\cos\mu - \frac{3a}{4}\sin\mu. \tag{21}$$

On peut pratiquement négliger le second terme du second membre. *Pour que la synchronisation soit possible, il faut que l'on ait*

$$-1 < 2\beta\rho < 1. \tag{22}$$

L'indice de stabilité est

$$\sigma = \frac{\pi}{\rho}\left(\sin\mu - \frac{3a}{4}\cos\mu\right) \simeq \frac{\pi}{\rho}\sin\mu.$$

La *racine stable* est comprise entre 0 et $-\pi$. *Le mouvement est en retard sur la force.*

Dans le cas d'une *force perturbatrice indépendante du temps*, la formule (25.1) donne, à $O(\lambda^2)$ et $O(\lambda a)$ près,

$$\Delta T = 2\pi\frac{\lambda}{\rho}\int_0^{2\pi} g(\rho\cos t, -\rho\sin t)\cos t\, dt. \tag{23}$$

6. *Oscillateur Abelé considéré comme un oscillateur quasi linéaire.* — Le premier terme du second membre de (1) vaut approximativement $2a\frac{z'}{\rho}(\rho - y)$: il est très petit. *On peut donc considérer l'oscillateur de M. Abelé comme un oscillateur linéaire soumis à l'accélération perturbatrice* $2a\frac{z'}{\rho}(\rho - y)$. Dès lors, *on peut lui appliquer la théorie* générale de (III).

Revenons à la *synchronisation par une force sinusoïdale*. Avec les notations du n° 13, III, nous avons (1)

$$\omega = 1, \qquad h = \lambda, \qquad F(q, q') = \frac{2aq'(\rho - y)}{\rho}.$$

Les formules (20, III) donnent immédiatement

$$H(y) = 0, \qquad J(y) = \frac{2a}{\rho}y(y - \rho);$$

Les équations (21, III) s'écrivent ensuite, en remarquant que x et ε sont ici μ et $-2\lambda\beta + O(\lambda^2)$,

$$\cos\mu = -2\beta y, \qquad \lambda\sin\mu = 2a(\rho - y)\frac{y}{\rho}; \tag{24}$$

(1) Nous remplaçons ici le facteur λ du n° 13, III par 1.

d'où

$$\lambda^2 = 4\gamma^2[\lambda^2\beta^2 + \alpha(\gamma-\rho)^2], \qquad \alpha = \frac{a^2}{\rho^2}. \tag{25}$$

Cette équation *détermine l'amplitude du mouvement synchronisé*. Les conditions (25, III) s'écrivent

$$\gamma > \frac{2}{3}\rho, \qquad \alpha(\gamma-\rho)(2\gamma-\rho) + \lambda^2\beta^2 > 0. \tag{26}$$

Posons

$$2\beta\gamma = z, \qquad \frac{\lambda^2\beta^2 k^2}{a^2} = u, \qquad 2\beta\rho = k. \tag{27}$$

L'équation (25) et les inégalités (26) deviennent

$$u = \frac{z^2(z-k)^2}{1-z^2}, \tag{28}$$

$$z > \frac{2k}{3}, \qquad u > (2z-k)(k-z). \tag{29}$$

Il faut que u soit >0; donc, $z<1$. La première condition (29) exige alors $k<\frac{3}{2}$, ce que nous supposons. La deuxième inégalité (29) s'écrit, d'après (28),

$$(k-z)(z^3-2z+k) > 0. \tag{30}$$

On peut interpréter graphiquement en construisant la courbe (z, u) pour $\frac{2k}{3} < z < 1$. On a

$$\frac{du}{dz}(1-z^2)^2 = 2z(k-z)(z^3-2z+k).$$

D'après (30), *les arcs stables sont les arcs ascendants*. Une discussion élémentaire, que nous ne reproduisons pas, conduit aux conclusions suivantes :

La synchronisation est possible si petit que soit λ, pour $\beta < \frac{1}{2\rho}$; pour $\frac{1}{2\rho} < \beta < \frac{3}{4\rho}$, elle n'est possible que si λ dépasse une certaine limite: pour $\beta > \frac{3}{4\rho}$, elle est impossible.

7. Si λ tend vers zéro, les formules (24) donnent, à la limite, $\gamma = \rho$ et $\cos\mu = -2\rho\beta$. La deuxième formule diffère de (21) par le terme en $a\sin\mu$. Mais, il ne faut pas oublier que les fonctions $H(\gamma)$ et $J(\gamma)$ du n° 14, III doivent être calculées en supposant x et y constants, c'est-à-dire en supprimant les forces perturbatrices. Dans le cas actuel, on doit donc faire $a=0$ et la différence ci-dessus disparaît.

L'équation (21) est théoriquement plus exacte; pratiquement, la différence est insignifiante, vu la petitesse de a.

En ce qui concerne la stabilité, nous devons retrouver la condition $\sin\mu < 0$ du n° 5. Effectivement, si l'on se reporte à la discussion mentionnée au n° 6, on constate que dans le premier cas, qui seul convient pour λ infiniment petit, z est $> k$ sur l'arc stable; donc $y > \xi$. La deuxième formule (24) nous montre alors que $\sin\mu$ est bien négatif. *La concordance entre les deux méthodes est parfaite.*

8. *Si la force perturbatrice est indépendante du temps*, on a, d'après (26, III):

$$\beta = \frac{-1}{2\pi y\lambda}\int_0^{2\pi} g(y\cos\varphi, -y\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi, \tag{31}$$

$$\int_0^{2\pi} g(y\cos\varphi, -y\sin\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = 0. \tag{32}$$

La deuxième équation détermine l'amplitude et la première donne la perturbation de période. Ces deux formules mettent en évidence *l'intérêt de l'oscillateur de M. Abelé considéré comme appareil horaire.*

Dans un appareil horaire ordinaire (montre ou pendule), le mouvement est entretenu par l'échappement, lequel introduit généralement un défaut d'isochronisme. Si les résistances passives ou le couple moteur varient, l'amplitude des oscillations varie également; d'où résulte une variation de marche (avance aux petites amplitudes).

Avec l'appareil de M. Abelé, l'entretien du mouvement est assuré par l'appareil lui-même et la perturbation de période résultant d'une force perturbatrice quelconque est donnée par la formule (31), la perturbation d'amplitude étant donnée par (32). Si la force perturbatrice est une résistance passive, donc une fonction impaire de $\sin\varphi$, la formule (31) donne $\beta = 0$; la perturbation de marche est nulle, malgré la perturbation subie par l'amplitude.

En somme, *l'oscillateur de M. Abelé fonctionne comme un chronomètre qui serait entretenu par un échappement isochrone*, tel que l'échappement à détente; ce qui est un avantage très appréciable.

CHAPITRE IV.

OSCILLATEUR DE RELAXATION.

1. *Formules générales.* — Dans (IV) et (V), nous avons fait une étude approfondie du mouvement autonome. Les résultats de cette étude devant être constamment utilisés dans le présent Chapitre, nous allons d'abord rappeler quelques notations et formules essentielles.

L'équation différentielle du mouvement perturbé est (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f(x)}{\varepsilon}\frac{dx}{dt} - x + \lambda F(x, x', t). \tag{1}$$

Nous avons appelé *courbe fondamentale* la courbe (Γ) représentant la fonction (2)

$$\varphi(x) = \int_0^x f(x)\,dx. \tag{2}$$

En ce qui concerne cette courbe, nous nous bornerons à considérer les deux cas suivants :

Cas I. — La courbe est *analytique* dans toute sa partie utile et a la forme indiquée sur la figure 4.

Cas II. — Elle comprend trois arcs analytiques ayant la forme indiquée sur la figure 5.

Dans les deux cas, nous admettrons que *l'origine est centre de symétrie*.

Nous appellerons (a, φ_A) les coordonnées du *point terminal* A du cycle et nous poserons au voisinage de ce point

$$x = a - \xi, \qquad \varphi = \varphi_A - A\xi + O(\xi^2). \tag{3}$$

Nous appellerons (b, φ_B) les coordonnées du point le plus bas de (Γ).

Dans le cas I, nous poserons, au voisinage de ce point,

$$x = b + \xi, \qquad \varphi = \varphi_B + B\xi^2 + O(\xi^3). \tag{4}$$

Dans le cas II, nous poserons

$$\begin{cases} x = b + \xi, & \varphi = \varphi_B + B\xi + O(\xi^2) \quad \text{(à droite de B)}; \\ x = b - \xi, & \varphi = \varphi_B + C\xi + O(\xi^2) \quad \text{(à gauche de B)}. \end{cases} \tag{5}$$

Les coefficients A, B, C sont des constantes positives.

2. Pour transformer l'équation (1) en un système de deux équations du premier ordre, on pourrait utiliser indifféremment les variables du Chapitre II, ou celles du Chapitre III, ou les *variables de Liénard*. Nous adopterons celles-ci, parce que ce sont celles que nous avons employées dans (IV) et (V). Rappelons leur définition.

La première est x; la deuxième est la variable y définie par les formules suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{u}{\varepsilon}, \qquad y = \varphi - u. \tag{6}$$

---

(1) Nous supposons qu'on a choisi l'unité de temps de telle manière que $\omega = 1$.

(2) Dans (IV) et (V), nous avions λ au lieu de φ.

Rappelons la formule

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x) - \frac{\varepsilon^2 x}{u}. \tag{7}$$

Au mouvement périodique autonome correspond, dans le plan (x, y), le *cycle* (C) représenté schématiquement sur les figures 4 et 5. Ce cycle est *symétrique* par rapport à O. Il est parcouru dans le *sens rétrograde* quand t croît.

Nous prendrons pour *origine des temps*, dans le mouvement périodique autonome, l'instant où le point $M(x, y)$ traverse S de gauche à droite, c'est-à-dire *l'instant où l'oscillateur passe à sa position d'équilibre dans le sens positif*.

Si l'on pose $z_1 = x$, $z_2 = y$, on a, en introduisant tout de suite le déphasage μ :

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{z_2 - \varphi(z_1)}{\varepsilon}, \qquad \frac{dz_2}{dt} = -\varepsilon z_1 + \lambda\varepsilon F\left(z_1, \frac{z_2 - \varphi}{\varepsilon}, t - \mu\right). \tag{8}$$

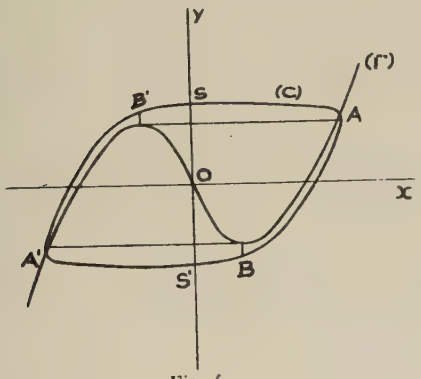

Fig. 4.

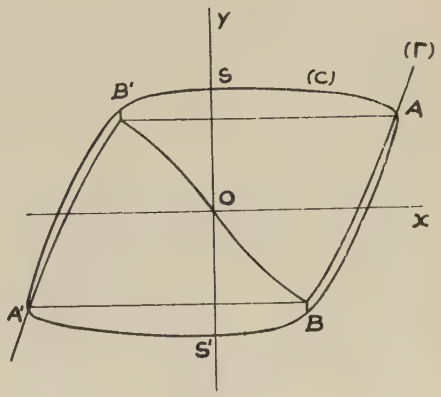

Fig. 5.

Les coefficients du *système linéaire associé* sont, en convenant une fois pour toutes que *les lettres x, y se rapportent à un point de* (C),

$$p_{11} = -\frac{\varphi'(x)}{\varepsilon}, \qquad p_{12} = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad p_{21} = -\varepsilon, \qquad p_{22} = 0. \tag{9}$$

Les *fonctions perturbatrices* sont

$$g_1 = 0, \qquad g_2 = \varepsilon F\left(x, -\frac{u}{\varepsilon}, t - \mu\right). \tag{10}$$

En appliquant la formule (122, I) et tenant compte de (6), on a, en appelant M un *point quelconque de l'arc* SAS',

$$\Delta(M) = \int_S^M \frac{d\varphi}{u}. \tag{11}$$

Grâce à la symétrie de la courbe fondamentale, le *décrément* est $S = e^{\varepsilon\Delta}$, en posant $\Delta' = \Delta(S')$.

3. *Solutions fondamentales du système linéaire associé.* — On en connait une *a priori* (n° 38, 1) :

$$y_1^1 = \frac{dx}{dt} = -\frac{u}{\varepsilon}, \qquad y_2^1 = \frac{dy}{dt} = -\varepsilon x; \tag{12}$$

ce qu'on peut vérifier directement au moyen de (7) et (9).

La deuxième s'écrit

$$y_1^2 = \varepsilon u V_1, \qquad y_2^2 = \varepsilon x V_2, \tag{13}$$

les fonctions V_1 et V_2 étant déterminées, sur l'arc SAS', de la manière suivante. Nous posons d'abord, *pour tout point* M *de l'arc* SA, sauf le point A :

$$V_1(M) = \int_S^M \frac{e^{\Delta}}{u^2}\, dx + C, \tag{14}$$

$C = V_1(S)$ désignant une constante *inconnue*. De l'identité

$$y_1^1(t) y_2^2(t) - y_2^1(t) y_1^2(t) = e^{\Delta t}, \tag{15}$$

on déduit

$$\varepsilon^2 V_1(M) - V_2(M) = \frac{e^{\Delta M}}{ux}. \tag{16}$$

Cette formule nous permet de calculer $V_2(M_1)$ en un point M_1 arbitrairement choisi sur SA. Nous avons ensuite, de M_1 à A *inclus* (1)

$$V_2(M) = V_2(M_1) + \int_{M_1}^M \frac{e^{\Delta}}{ux^2}\, dx. \tag{17}$$

4. On a, par hypothèse, en appelant T la période

$$y_i^2(t + T) = S y_i^2(t).$$

D'autre part, si l'on change t en $t + \frac{T}{2}$, $x(t)$ se change en $-x(t)$; comme $\varphi(x)$ est une fonction paire, les p_{ij} des formules (9) sont invariants. Il s'ensuit que $y_i^2\left(t + \frac{T}{2}\right)$ est une solution du système associé et l'on peut poser

$$y_i^2\left(t + \frac{T}{2}\right) = C_1 y_i^1(t) + C_2 y_i^2(t).$$

D'où

$$y_i^2(t + T) = S y_i^2(t) = -C_1 y_i^1(t) + C_2[C_1 y_i^1(t) + C_2 y_i^2(t)].$$

Donc, $C_1(C_2 - 1) = 0$, $C_2^2 = S$; d'où $C_1 = 0$, puisque $C_2 \neq 1$.

Remplaçant t par $t + \frac{T}{2}$ dans (15), il vient

$$-C_2 e^{\Delta t} = e^{\Delta\left(t + \frac{T}{2}\right)}.$$

Donc, $C_2 = -e^{\Delta}$.

(1) Et même, si l'on veut, jusqu'à S' exclu.

Les formules (13) nous montrent ensuite que *les fonctions* $V_i(M)$ *doivent être multipliées par* $e^{\lambda'}$ *quand* M *décrit un demi-cycle dans le sens rétrograde.*

Cela étant, posons, *pour tout point* M *de l'arc* S'A, sauf A :

$$V_1(M) = \int_{S'}^{M} \frac{e^{\lambda}}{u^3}\, dx - C'. \qquad C' = C e^{\lambda'}. \tag{18}$$

En utilisant la formule (16), nous pouvons donc calculer $V_2(M_2)$ pour un point M_2 arbitrairement choisi sur S'A. Nous avons ensuite $V_2(M)$, de M_2 à A inclu (1), par la formule (17), où M_1 est simplement remplacé par M_2.

Cette méthode et celle du n° 3 nous permettent de calculer $V_2(A)$ de deux manières différentes. En égalant les deux résultats, *on aura la constante* C.

5. *Calcul de la fonction* $G(\mu)$. — Elle est donnée par la formule (2.1). Posons

$$X_1 = V_1 e^{-\lambda}. \tag{19}$$

Nous avons $H_2' = -\varepsilon u X_1$; puis, d'après (10) :

$$G(\mu) = -\varepsilon^2 \int_0^T u X_1 F\, dt = \varepsilon^3 \int_C X_1(M) F(M)\, dx, \tag{20}$$

le cycle (C) devant être parcouru dans le sens rétrograde.

Soit M un point quelconque de l'arc SAS' et M' le point symétrique par rapport à O. D'après la propriété établie au n° 4, on a $X_1(M') = X_1(M)$; nous dirons que $X_1(M)$ est une *fonction paire*.

Posons

$$D(F) = \int_{(SAS')} X_1(M) F(M)\, dx, \tag{21}$$

F(M) désignant ce que devient la fonction $F\left(x, -\frac{u}{\varepsilon}, t-\mu\right)$ pour les valeurs de x, u, t correspondant au point M. Appelons $\bar{F}(M)$ la fonction égale à $-F(M')$. La formule (20) s'écrit

$$G(\mu) = \varepsilon^3 \left[D(F) + D(\bar{F})\right]. \tag{22}$$

En particulier, *si* F(M) *est une fonction paire, la fonction* $G(\mu)$ *est identiquement nulle : la synchronisation est impossible* si la force perturbatrice dépend de t ; si elle n'en dépend pas, *elle ne perturbe pas la période* (2).

(1) Et même, si l'on veut, jusqu'à S exclu.

(2) Plus exactement, la perturbation de période vaut au plus $O(\lambda^2)$. De même, dans le cas d'une force périodique, nous ne pouvons affirmer l'impossibilité de la synchronisation, pour λ infiniment petit, que si la fréquence de la force n'est pas exactement un multiple de la fréquence propre, ce qui est toujours le cas dans la pratique. Dans le cas théorique où le rapport des fréquences serait rigoureusement entier, nous ne pouvons rien dire. Pour savoir ce qui se passe, il faudrait reprendre la théorie générale de (1) dans le cas où la fonction $G(\mu)$ est identiquement nulle.

Si F(M) *est une fonction impaire*, on a, au contraire,

$$G(\mu) = 2\varepsilon^3 D(F). \tag{23}$$

6. *Cas où* ε *est très petit.* — En considérant ε comme un *infiniment petit principal* et utilisant les développements asymptotiques calculés dans (IV), on peut *démontrer l'existence et indiquer le moyen de calcul* des développements asymptotiques des diverses fonctions ou nombres intervenant dans la présente théorie. Si l'on en juge par la complexité des calculs concernant l'oscillation autonome, il faut s'attendre à des calculs laborieux. Pour ne pas trop allonger le présent travail, nous ne reproduirons pas les démonstrations auxquelles il vient d'être fait allusion. De plus, nous nous contenterons de calculer *le premier terme* du développement asymptotique de la fonction $G(\mu)$.

En ce qui concerne l'ordre infinitésimal, nous adopterons la définition donnée au n° 8, IV. L'ordre exponentiel sera représenté par le symbole O(exp).

Rappelons que les développements asymptotiques calculés dans (IV) sont de nature différente suivant qu'on se trouve sur l'arc SA, l'arc AB, ou l'arc BS'. On passe de l'un à l'autre par des développements intermédiaires, utilisant les *variables de raccordement*. Le *point de raccordement* M_1 peut être choisi arbitrairement entre certaines limites. Nous rappelons ci-dessous les limites entre lesquelles doit être compris l'ordre α de l'*écart* ξ_1 :

Avant A : $0 \leq \alpha < 2$ (n^{os} 24 et 10, IV);

Après A : $1 < \alpha < 2$ (n° 29, IV);

Avant B : $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$, cas I (n° 33, IV); M_1 en B, cas II (n° 32, IV);

Après B : $0 \leq \alpha < \frac{2}{3}$, cas I; $0 \leq \alpha < 2$, cas II (n^{os} 36 et 10, IV).

Rappelons aussi le principe suivant lequel s'effectuent les raccordements. On connaît le développement *avant*. Le développement *après* est connu à une constante additive près. Cette constante se calcule en égalant les termes constants (c'est-à-dire indépendants de ξ) des deux développements.

I. — Calcul de Δ.

7. *Arc* SA. — On a (n° 27, IV)

$$u = \varphi - \varphi_A + O(\varepsilon^2); \tag{24}$$

d'où

$$\Delta = \log \frac{\varphi_A - \varphi}{\varphi_A} + O(\varepsilon^2). \tag{25}$$

8. *Voisinage de* A. — Nous utilisons les *variables de raccordement* définies par (nos 19, 21, 24, IV) (1)

$$(26)\qquad \xi = \theta s, \qquad s = Z - W, \qquad W = 1 - e^{-Z}, \qquad ds = W\,dZ, \qquad A^2\theta = a\varepsilon^2.$$

On a (n° 30, IV)

$$(27)\qquad u = A\theta W + O(\theta^2).$$

D'où

$$\Delta = -Z + O(\theta) + c \qquad (c = \text{const.}).$$

Au point de raccordement de SA, on a (n° 25, IV) $Z = -\log s + O\left(\frac{1}{s}\right)$. D'où $\Delta = \log\xi - \log\theta + c + O(\theta)$. En comparant avec le développement de la formule (25), on en déduit $c = \log\theta A - \log\varphi_A$. Donc

$$(28)\qquad \Delta = -Z + \log\frac{\theta A}{\varphi_A} + O(\varepsilon^2).$$

Au point de raccordement de AB, on a $Z = s + 1 + O(e^{-s})$; donc

$$\Delta = -1 + \log\frac{\theta A}{\varphi_A} + O(\varepsilon^2) + \text{termes en } \xi.$$

9. *Arc* AB. — On a (nos 31 et 52, IV)

$$(29)\qquad u = \varepsilon^2\frac{x}{\varphi'} + \varepsilon^4\frac{x(\varphi' - x\varphi'')}{\varphi'^4} + O(\varepsilon^6).$$

D'où

$$\Delta = -\frac{p(x)}{\varepsilon^2} + \log\frac{a\varphi'}{x} + O(\varepsilon^2) + c \qquad (c = \text{const.}),$$

avec

$$(30)\qquad p(x) = \int_x^a \frac{\varphi'^2}{x}\,dx.$$

Au point de raccordement avec A, on a $\Delta = \log A + c + O(\varepsilon^2) +$ termes en ξ. En comparant avec le développement du n° 8, on obtient

$$c = -1 + \log\frac{\theta}{\varphi_A} + O(\varepsilon^2).$$

Donc

$$(31)\qquad \Delta = -\frac{p(x)}{\varepsilon^2} - 1 + \log\frac{a\varphi'\theta}{\varphi_A x} + O(\varepsilon^2).$$

10. *Voisinage de* B (cas I). — On utilise la variable de raccordement définie par (n° 21, IV)

$$(32)\qquad \xi = \theta_1 s, \qquad B^2\theta_1^3 = b\varepsilon^2.$$

(1) Ici, Z est changé en $-Z$.

à laquelle est associée la variable Z vérifiant

$$ds = \mathrm{W}\,dZ. \qquad \mathrm{W} = s^2 - Z,$$

et asymptotique à s^2 pour $s = +\infty$ (n° 32, IV). On a alors, d'après (93, IV),

$$u = B\theta_1^2 \mathrm{W} + O(\theta_1^3). \tag{33}$$

D'où

$$\Delta = P(s) + O(\theta_1) + c \qquad (c = \text{const.}), \tag{34}$$

avec

$$P(s) = 2\int_a^s \frac{s}{\mathrm{W}}\,ds. \tag{35}$$

Au point de raccordement de AB, on a, d'après (84, IV),

$$\frac{s}{\mathrm{W}} = 2s^2 + \frac{1}{2s} + \dots.$$

D'où

$$P(s) = g + \frac{4}{3}s^3 + \log s + \text{série en } \frac{1}{s^3}, \tag{36}$$

avec

$$g = P(s_1) - \frac{4}{3}s_1^3 - \log s_1 + \int_{s_1}^{+\infty}\left(\frac{2s}{\mathrm{W}} - 4s^2 - \frac{1}{s}\right)ds, \tag{37}$$

s_1 pouvant être choisi arbitrairement entre zéro et $+\infty$.

En remplaçant s par $\frac{\xi}{\theta_1}$, on a

$$\Delta = c + g - \log\theta_1 + O(\theta_1) + \text{termes en } \xi.$$

En développant (31), on a, d'autre part, *en posant* $q = p(b)$,

$$\Delta = -\frac{q}{\varepsilon^2} - 1 + \log\frac{2a\mathrm{B}\theta}{b\varphi_\Lambda} + O(\varepsilon^2) + \text{termes en } \xi.$$

En comparant, on obtient

$$c = -g - 1 - \frac{q}{\varepsilon^2} + \log\frac{2a\mathrm{B}\theta\theta_1}{b\varphi_\Lambda} + O(\theta_1). \tag{38}$$

Au point de raccordement avec BS′, on a (n° 59, IV)

$$\frac{s}{\mathrm{W}} = \frac{1}{s} - \frac{11}{s^3} + \dots.$$

D'où

$$P(s) = 2\log(-s) - g_1 + \frac{11}{s^2} + \dots. \tag{39}$$

avec

$$g_1 = -P(s_1) + 2\log(-s_1) + 2\int_{-\infty}^{s_1}\left(\frac{s}{\mathrm{W}} - \frac{1}{s}\right)ds \qquad (s_1 \text{ arbitraire entre zéro et } -\infty). \tag{40}$$

On a donc

$$\Delta = c - g_1 - 2\log\theta_1 + O(\theta_1) + \text{termes en } \xi. \tag{41}$$

11. *Voisinage de* B (cas II). — On peut appliquer les formules (29) et (31) jusqu'au point B. Elles donnent en ce point

$$u_{\mathrm{B}} = \varepsilon^2 \frac{b}{\mathrm{B}}, \qquad \Delta(\mathrm{B}) = -\frac{q}{\varepsilon^2} - 1 + \log \frac{\alpha \mathrm{B} \theta}{b \varphi_{\mathrm{A}}}.$$

A gauche de B, la variable de raccordement est définie par les formules (nos 21, 36, IV)

$$(42) \quad \xi = \theta_1 s, \qquad \mathrm{C}^2 \theta_1 = b\varepsilon^2, \qquad s = \mathrm{W} - \mathrm{Z}, \qquad \mathrm{W} = (\mathrm{Z}_0 + 1) e^{\mathrm{Z} - \mathrm{Z}_0} - 1, \qquad \mathrm{Z}_0 = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}.$$

On a

$$(43) \qquad u = \mathrm{C}\theta_1 \mathrm{W} + \mathrm{O}(\theta_1^2);$$

d'où

$$(44) \qquad \Delta = \mathrm{Z} - \mathrm{Z}_0 - 1 - \frac{q}{\varepsilon^2} + \log \frac{\alpha \mathrm{B} \theta}{b \varphi_{\mathrm{A}}} + \mathrm{O}(\theta_1).$$

Pour s très grand, on a (n° 38, IV)

$$\mathrm{Z} = \log s + \mathrm{Z}_0 - \log(\mathrm{Z}_0 + 1) + \text{série en } \frac{1}{s};$$

d'où

$$(45) \qquad \Delta = -\frac{q}{\varepsilon^2} - 1 + \log \frac{\alpha \mathrm{B} \theta}{b \varphi_{\mathrm{A}} (\mathrm{Z}_0 + 1) \theta_1} - \text{termes en } \xi.$$

12. *Arc* BS′ (cas I). — On a (n° 43, IV)

$$(46) \qquad u = \varphi - \varphi_{\mathrm{B}} + \mathrm{O}(\theta_1^2);$$

d'où, en se rappelant que $-\varphi_{\mathrm{B}} = \varphi_{\mathrm{A}}$,

$$(47) \qquad \Delta = \log \frac{\varphi - \varphi_{\mathrm{B}}}{\varphi_{\mathrm{A}}} + \Delta' - \mathrm{O}(\theta_1^2).$$

Au point de raccordement avec B, le développement de Δ est

$$\log \frac{\mathrm{B}}{\varphi_{\mathrm{A}}} + \Delta' + \text{termes en } \xi.$$

En comparant avec (41), on obtient

$$(48) \qquad \Delta' = c - g_1 + \log \frac{\varphi_{\mathrm{A}}}{\mathrm{B}\theta_1^2} = -1 - g - g_1 - \frac{q}{\varepsilon^2} + \log \frac{2\alpha\theta}{b\theta_1} + \mathrm{O}(\theta_1).$$

En utilisant les données numériques du n° 3, V, on trouve approximativement $g = 0{,}295$ et $g_1 = 0{,}343$. On en déduit le *décrément*

$$(49) \qquad \mathrm{S} = e^{2\Delta'} = 0{,}151\, e^{-\frac{2q}{\varepsilon^2}} \frac{8}{\varepsilon^3} \alpha^2 \left(\frac{\mathrm{B}}{b^2}\right),$$

avec une erreur relative $\mathrm{O}(\theta_1) = \mathrm{O}\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right)$.

13. *Arc* BS′ (cas II). — On a encore la formule (47), sauf l'erreur, qui vaut ici $O(\theta_1)=O(\varepsilon^2)$. Dans le voisinage de B, le développement de Δ est $\log\frac{C}{\varphi_A}+\Delta'+$ termes en ξ. En comparant avec (45), on obtient

$$\Delta'=-\frac{\eta}{\varepsilon^2}-1-\log\frac{a\mathrm{B}\theta}{b\mathrm{C}(\mathrm{Z}_0-1)\theta_1}+O(\varepsilon^2) \tag{50}$$

$$=-\frac{\eta}{\varepsilon^2}-1-\log\frac{a^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}}{b^2\mathrm{A}^2(\mathrm{B}+\mathrm{C})}-O(\varepsilon^2).$$

D'où

$$S=\frac{a^4B^4C^2}{b^4A^4(B+C)^2}e^{-\frac{2\eta}{\varepsilon^2}-2}, \tag{51}$$

On voit que, dans tous les cas, *le décrément est infiniment petit d'ordre exponentiel.* Donc, *la stabilité des oscillations autonomes augmente très rapidement* quand ε diminue, c'est-à-dire *quand le caractère de relaxation devient plus accentué.* Ceci est à rapprocher de la propriété démontrée au n° 15, IV concernant *l'accumulation des trajectoires.* A chaque tour, la distance du point M au cycle décroît en progression géométrique de raison O (exp).

14. Nous rassemblons ci-dessous les valeurs de e^{Δ} et de u. Les nombres inscrits à droite sont l'ordre de l'erreur relative pour la première colonne, de l'erreur absolue pour la seconde.

	e^{Δ}.	u.
Arc SA.....	$\frac{\varphi_A-\varphi}{\varphi_A}$, 2	$\varphi-\varphi_A$, 2
Voisinage de A.....	$\frac{A\theta}{\varphi_A}e^{-Z}$, 2	$A\theta W$, 4
Arc AB.....	$\frac{a\theta\varphi'}{x\varphi_A}e^{-1-\frac{\eta}{\varepsilon^2}}$, 2	$\varepsilon^2\frac{x}{\varphi'}$, 4
Voisinage de B (cas I)...	$\frac{2aB\theta_1}{b\varphi_A}e^{-1-z-\frac{\eta}{\varepsilon^2}+P(z)}$, $\frac{2}{3}$	$B\theta_1^2W$, 2
A gauche de B (cas II)...	$\frac{aB\theta}{b\varphi_A}e^{-1-\frac{\eta}{\varepsilon^2}-Z-Z_0}$, 2	$C\theta_1W$, 2
Arc BS′.....	$\frac{\varphi-\varphi_B}{\varphi_A}e^{\Delta'}$, $\frac{1}{3}$ (cas I), 4 (cas II)	$\varphi-\varphi_B$, $\frac{4}{3}$ (cas I), 4 (cas II).

On a enfin, avec une erreur relative $O(\theta_1)$:

$$e^{\Delta'}=\frac{2a\theta}{b\theta_1}e^{-1-z-z_1-\frac{\eta}{\varepsilon^2}},\ \text{(cas I)};\qquad e^{\Delta'}=\frac{a^2B^2C}{b^2A^2(B+C)}e^{-1-\frac{\eta}{\varepsilon^2}}\ \text{(cas II)}$$

II. — Calcul de D(F).

15. *Calcul de la constante* C. — La formule (14) s'écrit, d'après le tableau précédent :

$$V_1(M_1)=C+H(x_1)+\varepsilon^2R(x_1),\qquad H(x_1)=-\frac{1}{\varphi_A}\int_0^{x_1}\frac{dx^2}{(\varphi-\varphi_A)^2}. \tag{52}$$

D'où, par (16) et (17), en prenant M_1 au point de raccordement avec A,

$$V_2(A) = \varepsilon^2 C + \varepsilon^2 H(x_1) + \varepsilon^4 R(x_1) - \frac{e^{\Delta_1}}{u_1 x_1} + \frac{0}{a^2 \varphi_A} K(s_1) + 0^2 \varphi(s_1).$$

avec

$$K(s_1) = \int_0^{s_1} \frac{e^{-Z}}{W^2} ds = W_1 = Z_1 - s_1.$$

Comme $V_2(A)$ est indépendant de x_1, on ne doit garder que les termes constants au second membre, en supposant qu'on remplace les fonctions de x_1 par leurs développements suivant la variable ξ_1 et les fonctions de s_1 par leurs développements asymptotiques. Le seul terme non infiniment petit est $-\frac{e^{\Delta_1}}{u_1 x_1} = \frac{1}{\varphi_A x_1} + O(\varepsilon^2)$. Le terme constant de son développement est $\frac{1}{a\varphi_A}$. On a donc

$$V_2(A) = \varepsilon^2 C + \frac{1}{a\varphi_A} + O(\varepsilon^2). \tag{53}$$

16. Prenons M_2 sur BA, à distance finie de B. Nous avons, d'après (18),

$$V_1(M_2) - C' = \int_{S'}^{M_2} \frac{e^{\Delta}}{u^2} dx.$$

Sur $S'M_2$, u vaut $O(0_1)$ entre S' et B; puis $O(\varepsilon^2)$ dès que $x - b = O(1)$. Donc, le minimum de u vaut certainement $O(\varepsilon^2)$. D'autre part, Δ est minimum en B. Sur $S'M_2$, son maximum est atteint soit en S', soit en M_2. Mais, $\Delta_2 - \Delta'$ vaut asymptotiquement $\frac{q - p(x_2)}{\varepsilon^2}$. Comme $q - p(x_2) = \int_b^{x_2} \frac{\varphi_2}{x} dx$ vaut $O(1)$, $\Delta_2 - \Delta' = O(\varepsilon^{-2})$; donc, c'est Δ_2 qui est le maximum de Δ et l'on a

$$V_1(M_2) = C' + O(\varepsilon^{-6} e^{\Delta_2}); \tag{54}$$

d'où

$$V_2(M_2) = \varepsilon^2 C' + O(\varepsilon^{-4} e^{\Delta_2}) - \frac{e^{\Delta_2}}{u_2 x_2} = \varepsilon^2 C' + O(\exp).$$

d'après le tableau du n° 14.

Nous avons ensuite, d'après (17),

$$V_2(A) - V_2(M_2) < \frac{e^{\Delta_M}}{x_2^2} \int_{M_2}^{A} \frac{dx}{u} = \frac{e^{\Delta_A}}{\varepsilon x_2^2} l(AM_2).$$

le dernier facteur représentant le temps de parcours de l'arc AM_2. On sait, d'après (6, IV), que ce temps vaut $O(\varepsilon)$. D'autre part, e^{Δ_M} vaut $O(0) = O(\varepsilon^2)$, d'après le tableau du n° 14. Donc, $V_2(A) - V_2(M_2)$ vaut au plus $O(\varepsilon^2)$ et par suite

$$V_2(A) = \varepsilon^2 C' + O(\varepsilon^2).$$

Comparant avec (53), on a

$$\varepsilon^2 C + \frac{1}{a\varphi_A} + O(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 C' + O(\varepsilon^2).$$

En tenant compte de la deuxième formule (18) et se rappelant que $e^{\Delta'} = O(\exp)$, on obtient

$$C = \frac{-1}{\varepsilon^2 a\varphi_A} + O(1). \tag{55}$$

17. *Calcul de* X_1. — Sur SA, nous avons (n° 15) :

$$\varepsilon^2 V_1 = -\frac{1}{a\varphi_A} - O(\varepsilon^2); \tag{56}$$

d'où (n° 14)

$$X_1 = \frac{1}{\varepsilon^2 a(\varphi - \varphi_A)} - O(1), \quad \text{sur SA.} \tag{57}$$

Au voisinage de A, on a, d'après (16),

$$\varepsilon^2 V_1 = \frac{e^{\Delta}}{ux} + \int \frac{e^{\Delta}}{ux^2} dx = \frac{e^{-z}}{a\varphi_A W} + O(0) + h \qquad (h = \text{const.}).$$

Pour s très grand, on a asymptotiquement

$$\frac{e^{-z}}{W} = \frac{1}{-1 + e^{z}} = \frac{1}{-1 - \frac{1}{s} + \dots} = -1 + \dots$$

Le terme constant du second membre est donc $h - \frac{1}{a\varphi_A}$. En comparant avec (56), on a $h = 0$. D'où (n° 14)

$$X_1 = \frac{\Lambda}{a^2 \varepsilon^4 W} - O(\varepsilon^{-2}) \qquad \text{(voisinage de A)}. \tag{58}$$

Sur S'B, on a (n^{os} 16 et 14) :

$$\varepsilon^2 V_1 e^{-\Delta'} = -\frac{1}{a\varphi_A} - O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right) \text{ (cas I)} \quad \text{ou} \quad O(\varepsilon^2) \text{ (cas II)}. \tag{59}$$

D'où

$$X_1 = -\frac{1}{\varepsilon^2 a(\varphi - \varphi_B)} - O\left(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right) \text{ (cas I)} \quad \text{ou} \quad O(1) \text{ (cas II)} \quad \text{(sur S'B)}. \tag{60}$$

Au voisinage de B, on a, d'après (16) et (17) :

$$\varepsilon^2 V_1 e^{-\Delta'} = \frac{e^{\Delta - \Delta'}}{ux} + \int \frac{e^{\Delta - \Delta'}}{ux} dx.$$

Dans le cas I, ceci donne

$$\varepsilon^2 V_1 e^{-\Delta'} = \frac{e^{z_1 - P(s)}}{b\varphi_A W} + O(0_1) + h \qquad (h = \text{const.}).$$

Pour $-s$ très grand, le premier terme vaut asymptotiquement (n° 10)

$$\frac{s^2\left(1+\frac{\Pi}{s^2}+\dots\right)}{b\varphi_1 s^2\left(1-\frac{\Pi}{s^2}+\dots\right)}=\frac{1}{b\varphi_A}+\dots.$$

Le terme constant du second membre est donc $\frac{1}{b\varphi_A}+h$. En comparant avec (59), on a $h=-\frac{a+b}{ab\varphi_A}$. D'où

$$(61)\qquad X_1=\frac{1}{bB\theta_1^2\varepsilon^2}\left[\frac{1}{W}-\frac{a+b}{a}e^{-g_1-P(s)}\right]+O\left(\varepsilon^{-\frac{N}{2}}\right)\qquad\text{[voisinage de B (cas I)]}.$$

Dans le cas II, on a

$$\varepsilon^2 Y_1 e^{-\Delta}=\frac{B+C}{bB\varphi_A}\frac{e^{Z-Z_0}}{W}+O(\theta_1)+h.$$

Pour s très grand, on a asymptotiquement

$$\frac{e^{Z-Z_0}}{W}=\frac{s}{(Z_0+1)(s-\log s+\dots)}=\frac{1}{Z_0+1}+\dots.$$

Le terme constant du second membre est $h+\frac{1}{b\varphi_A}$ et h a la même valeur que dans le cas I. On en déduit

$$(62)\qquad X_1=\frac{C}{b^2\varepsilon^3}\left[\frac{1}{W}-\frac{a+b}{a(Z_0+1)}e^{Z_0-Z}\right]+O(\varepsilon^{-2})\qquad\text{[voisinage de B (cas II)]}.$$

18. Soit M_1 sur AB, M_2 sur M_1A. α_1 et α_2 les ordres de $\xi_1=x_1-b$ et $\xi_2=x_2-b$. Nous supposons $\xi_2-\xi_1\geqq O(\xi_2)$. On a, d'après (9) :

$$\Delta_2-\Delta_1=\frac{p(x_1)-p(x_2)}{\varepsilon^2}+\dots.\qquad p(x_1)-p(x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\varphi'^2}{x^2}\,dx.$$

Dans le cas I,

$$p_1-p_2=O(\xi_2^3-\xi_1^3)=O(\varepsilon^{3\alpha_2}),\qquad\frac{p_1-p_2}{\varepsilon^2}=O(\varepsilon^{3\alpha_2-2}).$$

Si $\alpha_2<\frac{2}{3}$, on a donc

$$(63)\qquad e^{\Delta_1-\Delta_2}=O(\exp).$$

Dans le cas II, on a $p_1-p_2=O(\xi_2-\xi_1)=O(\varepsilon^{\alpha_2})$; même conclusion si $\alpha_2<2$.

Nous avons maintenant, d'après (17) et (11) :

$$(64)\qquad V_2(M_2)-V_2(M_1)=\int_{M_1}^{M_2}\frac{e^{\Delta}\,d\Delta}{\varphi' x^2}=\frac{e^{\Delta_2}}{\varphi'_2 x_2^2}-\frac{e^{\Delta_1}}{\varphi'_1 x_1^2}+J,$$

avec

$$J=\int_{M_1}^{M_2}\frac{u(2\varphi'+x\varphi'')}{x^3\varphi'^3}e^{\Delta}\,d\Delta.$$

La fraction sous le signe $\int$ de J vaut au plus $O\left(\frac{\varepsilon^2}{\varphi_1'}\right) = O(\varepsilon^{2-4\alpha_1})$. Donc, $|J| \leq e^{\lambda_2} O(\varepsilon^{2-4\alpha_1})$ et l'on peut écrire, en tenant compte de (63),

$$V_2(M_2) - V_2(M_1) = e^{\lambda_2}\left[\frac{1}{\varphi_2' x_2^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha_1})\right]. \tag{65}$$

19. Cela posé, soit M un point quelconque de l'arc BA, tel que l'ordre α de $\xi = x - b$ soit $\leq \frac{1}{2}$ (n° 6). Prenons M_2 tel que $\xi_2 = k\xi$, le nombre fixe k étant compris entre zéro et 1. Prenons M_1 tel que $\frac{1}{2} < \alpha_1 < \frac{2}{3}$, ce qui entraîne $\alpha_2 = \alpha < \alpha_1$, donc $\xi_1 < \xi_2$. Nous avons d'abord (65). Mais, les conditions imposées à M_1 et à M_2, au n° 18, sont remplies par les points M_2 et M ci-dessus. On a donc

$$V_2(M) - V_2(M_2) = e^{\lambda}\left[\frac{1}{\varphi' x^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha})\right].$$

Ajoutons à (65); comme $e^{\lambda_2 - \lambda} = O(\exp)$, on a

$$V_2(M) = V_2(M_1) + e^{\lambda}\left[\frac{1}{\varphi' x^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha})\right].$$

Or,

$$V_2(M_1) = e^{\lambda_1}\left[\varepsilon^2 X_1(M_1) + \frac{1}{u_1 x_1}\right].$$

Le point M_1 pouvant être pris pour point de raccordement, nous pouvons lui appliquer les formules (61) et (62), qui nous montrent que le crochet ci-dessus a un ordre infinitésimal fini. Comme $e^{\lambda_1 - \lambda} = O(\exp)$, on a asymptotiquement

$$V_2(M) = e^{\lambda}\left[\frac{1}{\varphi' x^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha})\right];$$

d'où

$$\varepsilon^2 X_1(M) = e^{\lambda}\left[\frac{1}{ux} - \frac{1}{\varphi' x^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha})\right].$$

Mais, $\frac{1}{ux}$ vaut asymptotiquement $\frac{\varphi'}{\varepsilon^2 x^2}$. Dans le crochet, le rapport du second terme au premier vaut $O\left(\frac{\varepsilon^2}{\varphi'}\right)$, soit $O(\varepsilon^2)$ dans le cas II et $O(\varepsilon^{2-2\alpha})$ dans le cas I. Comme $2\alpha < 1$, on a asymptotiquement, dans tous les cas :

$$X_1(M) = \frac{\varphi'}{\varepsilon^4 x^2} + O(\varepsilon^{-2}) \quad \text{sur BA.} \tag{66}$$

Nous connaissons maintenant la valeur asymptotique de la fonction $X_1(M)$ tout le long de l'arc SAS'.

20. *Force perturbatrice fonction de x.* — Nous supposons que cette fonction et sa dérivée sont continues et valent $O(1)$. Appelons M_1, M_2, M_3, M_4 les points

de raccordement rencontrés successivement quand on parcourt SAS′ dans le sens rétrograde. L'intégrale D(F) se décompose en cinq intégrales $D_1, \ldots, D_5$, correspondant respectivement aux arcs $SM_1, \ldots, M_4S'$.

D'après (57), $D_1 = O(\varepsilon^{-2})$. D'après (58), $D_2 = \int_{s_1}^{s_2} F(M) X_1 \theta ds$ vaut $O(\varepsilon^{-2})$. Il en est de même de D_4 et D_5, d'après (61), (62), (60). Enfin, d'après (66), $D_3 = O(\varepsilon^{-4})$. On a donc la formule asymptotique

$$D(F) = \varepsilon^{-4} \int_A^B F(M) \frac{d\varphi_1}{x^2}.$$

D'après le n° 5, nous pouvons remplacer $F(x)$ par $\frac{F(x) - F(-x)}{2}$. En appliquant la formule (23) ci-dessus et la formule (25.1), l'accroissement de période est donné par

$$\Delta T = -\frac{\lambda}{\varepsilon} \int_A^B \frac{F(x) - F(-x)}{x^2} d\varphi_1. \tag{67}$$

21. *Force résistante fonction de la vitesse.* — Bornons-nous à considérer le cas où cette force est de la forme $\pm \lambda k \dot{\varphi}^m$, $m \geq 0$, $k > 0$; le signe à prendre est opposé à celui de $\dot{\varphi}$.

Nous avons d'abord, d'après (6) :

$$F = -\frac{k}{\varepsilon^m}(-u)^m \quad \text{sur SA}, \qquad F = \frac{k}{\varepsilon^m} u^m \quad \text{sur AS}'. \tag{68}$$

On a, en gardant les notations du n° 20,

$$D_1 = \frac{k}{a} \varepsilon^{-m-2} \int_S^{M_1} (\varphi_A - \varphi)^{m-1} dx.$$

Si $m > 0$, on peut intégrer jusqu'en A. L'erreur commise sur D_1 vaut, en appelant α_1 l'ordre de ξ_1, $O(\varepsilon^{-m-2+m\alpha_1}) = O(\varepsilon^{m-2})$, car α_1 peut être pris infiniment voisin de 2.

L'intégrale D_2 est du même ordre que $\varepsilon^{m-2} \int_{Z_1}^{Z_2} |W^m dZ| = \varepsilon^{m-2} [O(s_2) + O(s_1')]$ d'après les développements asymptotiques du n° 8. Le crochet vaut $O(\varepsilon^{\alpha_2 - 2}) + O(\varepsilon^{m\alpha_1 - 2m}) = O(1)$, car on peut prendre α_1 et α_2 infiniment voisins de 2. Donc, $D_2 = O(\varepsilon^{m-2})$ et l'on peut écrire asymptotiquement

$$D_1 + D_2 = \frac{k}{a} \varepsilon^{-m-2} \int_0^a (\varphi_A - \varphi)^{m-1} dx \qquad (m > 0), \tag{69}$$

$$D_1 + D_2 = O(\varepsilon^{-2}) \qquad (m = 0). \tag{70}$$

Bien entendu, dans tout ce qui précède, le symbole $O(\varepsilon^n)$ indique un ordre infinitésimal infiniment peu inférieur à n.

22. Nous avons ensuite

$$D_3 = k\varepsilon^{m-1}\int_a^{x_3} x^{m-2}\varphi^{1-m}\,dx,$$

en remplaçant la borne inférieure par a, ce qui donne, pour l'intégrale, une erreur $O(\xi_2) = O(\varepsilon^{\alpha_2}) = O(\varepsilon^2)$.

Dans le cas I, D_4 est de l'ordre de

$$\varepsilon^{m-2}\theta_1^{2m-1}\int_{s_3}^{s_4}\left[\frac{1}{W} - \frac{a+b}{a}e^{-s_1-P(s)}\right]W^m\,ds.$$

Pour le deuxième terme du crochet, on peut prendre $s_3 = +\infty$. Pour $-s$ très grand, ce deuxième terme vaut $O\left(\frac{1}{s^2}\right)$ et $W = O(s^2)$; la fonction sous le signe $\int$ vaut $O(s^{2m-2})$; l'intégrale vaut $O(s_4^{2m-1})$ si $m \geq \frac{1}{2}$ et $O(1)$ si $m < \frac{1}{2}$. Or, $s_4 = O\left(\varepsilon^{\alpha_4 - \frac{2}{3}}\right)$, α_4 pouvant être pris infiniment voisin de $\frac{2}{3}$. Dans les deux cas, l'intégrale vaut $O(1)$.

Pour le premier terme du crochet, même conclusion en ce qui concerne la borne supérieure. Pour s très grand, $W = O\left(\frac{1}{s}\right)$; la borne inférieure donne $O(s_3^{2-m})$ si $m < 2$, $O(1)$ si $m > 2$. Or, $s_3 = O\left(\varepsilon^{\alpha_3 - \frac{2}{3}}\right)$, α_3 pouvant être pris infiniment voisin de $\frac{2}{3}$. Dans les deux cas, l'intégrale vaut encore $O(1)$. Il s'ensuit que $D_4 = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right)$.

Si $m < 2$, on peut prendre $x_3 = b$ dans D_3. Sinon,

$$D_3 = O(\varepsilon^{m-1}\xi_3^{2-m}) = O[\varepsilon^{2\alpha_3 - 1 + m - 1 - \alpha_3}].$$

En prenant $\alpha_3 = \frac{2}{3} - o$, ceci donne $D_3 = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right)$. En définitive, on peut écrire asymptotiquement

$$D_3 + D_4 = k\varepsilon^{m-1}\int_a^b x^{m-2}\varphi^{1-m}\,dx \qquad \text{si} \quad m < 2; \tag{71}$$

$$D_3 + D_4 = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right) \qquad \text{si} \quad m \geq 2 \quad \text{(cas I)}. \tag{72}$$

Dans le cas II, on peut toujonrs prendre $x_3 = b$. L'intégrale D_4 est de l'ordre de

$$\varepsilon^{m-2}\int_0^{s_4}\left[\frac{1}{W} - \frac{a+b}{a(Z_0+1)}e^{Z_0-Z}\right]W^m\,ds.$$

Pour s très grand, le crochet vaut $O\left(\frac{1}{s}\right)$ et $W = O(s)$; donc, l'intégrale vaut $O(s_4^m) = O[\varepsilon^{m(\alpha_4 - 2)}]$. Comme on peut prendre $\alpha_4 = 2 - o$, $D_4 = O(\varepsilon^{m-2})$ et l'on a encore (71).

23. Enfin,

$$D_5 = -\frac{k}{a}\varepsilon^{-m-2}\int_M^{S'}(\varphi-\varphi_B)^{m-1}\,dx.$$

Dans le *cas* I, on peut prendre M, en B si $m > \frac{1}{2}$. Si $m \leq \frac{1}{2}$, l'intégrale vaut $O(\xi_1^{2m-1})$ et $D_5 = O(\varepsilon^{-m-2+(2m-1)\alpha_4}) = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right)$.

Dans le *cas* II, mêmes conclusions qu'au n° 21.

On peut donc écrire asymptotiquement

$$(73)\qquad D_5 = \frac{k}{a}\varepsilon^{-m-2}\int_0^b(\varphi-\varphi_B)^{m-1}\,dx \quad \text{si } m>\frac{1}{2}\ \text{(cas I)} \quad \text{ou} \quad m>0\ \text{(cas II)},$$

$$(74)\qquad D_5 = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right)\ \text{si } m\leq\frac{1}{2}\ \text{(cas I)};\quad O(\varepsilon^{-2})\ \text{si } m=0\ \text{(cas II)}.$$

24. En se reportant aux formules précédentes, on obtient le tableau ci-dessous :

$$(75)\qquad D(F) = k\varepsilon^{m-4}\int_a^b x^{m-2}\varphi'^{1-m}\,dx \quad \text{si } m<1;$$

$$(76)\qquad D(F) = \frac{k}{a}\varepsilon^{-m-2}\left[\int_0^b(\varphi-\varphi_B)^{m-1}\,dx+\int_0^a(\varphi_A-\varphi)^{m-1}\,dx\right] \quad \text{si } m>1;$$

$$(77)\qquad D(F) = k\varepsilon^{-3}\left(\frac{a+b}{a}+\log\frac{b}{a}\right) \quad \text{si } m=1.$$

25. La formule (77) correspond au cas d'une *résistance visqueuse*. La *perturbation de période* est

$$(78)\qquad \Delta T = -2\lambda k\left(\frac{a+b}{a}+\log\frac{b}{a}\right).$$

A titre de contrôle, cette formule peut être établie *directement* de la manière suivante. L'introduction de la force perturbatrice $-\lambda k x'$ équivaut à augmenter la fonction $f(x)$ de $\lambda k\varepsilon$, comme le montre l'équation (1). Or, la partie principale de la période est donnée par $\varepsilon T = 2\int_B^A \frac{d\varphi}{x'}$. D'où l'on déduit, à $O(\lambda^2)$ près,

$$\varepsilon\Delta T = 2\lambda k\int_b^a \varepsilon\frac{dx}{x'}+\frac{2}{a}\Delta\varphi_A-\frac{2}{b}\Delta\varphi_B.$$

Or, $\Delta\varphi_B = -\Delta\varphi_A = \lambda k\varepsilon b$. On retrouve bien (78).

Un calcul élémentaire montre que ΔT est >0 ou <0 suivant que $\frac{b}{a}$ est supérieur ou inférieur à 0,28 environ.

26. Signalons encore le cas du *frottement constant*, qui correspond à $m = 0$. On a, d'après (75),

$$\Delta T = \frac{2\lambda k}{\varepsilon}\int_b^a \frac{\varphi'}{x^2}\,dx. \tag{79}$$

La période est augmentée.

Pour une *résistance proportionnelle au carré de la vitesse*, on a $m = 2$. La formule (76) donne

$$\Delta T = -\frac{2\lambda k}{a\varepsilon}\int_b^a x\varphi'\,dx. \tag{80}$$

Cette fois, *la période est diminuée.*

Ces exemples montrent que *l'effet des résistances passives sur la période d'un oscillateur de relaxation est totalement différent de ce qu'il est pour un oscillateur linéaire.*

27. *Synchronisation par une force sinusoïdale.* — Nous envisageons tout de suite le cas de la *synchronisation sous-harmonique* (n° 14.1).

Soit $\lambda\cos\omega' t$ la force synchronisante, avec

$$\omega' = \omega(1+\gamma), \qquad \gamma = \lambda\beta, \qquad \omega = \frac{2\pi N}{T}. \tag{81}$$

Nous avons, d'après (20) :

$$G(\mu) = L\cos\nu + M\sin\nu, \qquad \nu = \omega\mu; \tag{82}$$

$$L = 2\varepsilon^3\int_S^{S'} X_1\cos\alpha\,dx, \qquad M = 2\varepsilon^3\int_S^{S'} X_1\sin\alpha\,dx, \qquad \alpha = \omega t, \tag{83}$$

t désignant le temps de parcours de l'arc SM du cycle autonome, donné par les formules asymptotiques de (IV).

Comme au n° 20, on a asymptotiquement

$$L = \frac{2}{\varepsilon}\int_A^B \frac{\varphi'}{x^2}\cos\alpha\,dx, \qquad M = \frac{2}{\varepsilon}\int_A^B \frac{\varphi'}{x^2}\sin\alpha\,dx. \tag{84}$$

Sur AB, on a, d'après (26, IV),

$$\varepsilon t = E(M) + O(\varepsilon^2), \tag{85}$$

avec

$$E(M) = \int_M^A \frac{d\varphi}{x}. \tag{86}$$

D'autre part, $\varepsilon T = 2E(B) + O(\varepsilon^2)$. D'où

$$\alpha = \pi N\frac{E(M)}{E(B)}. \tag{87}$$

Posons

$$L + iM = \frac{2}{\varepsilon}K. \tag{88}$$

On a

$$K = \int_A^B \frac{\varphi'}{x^2} e^{ix}\,dx = -\frac{E(B)}{\pi N}\int_0^{N\pi} \frac{e^{ix}}{x}\,dx. \tag{89}$$

En intégrant par parties, on peut écrire

$$\int_0^{N\pi} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = i\frac{a+b}{ab} + i\frac{E(B)}{\pi N}\int_0^{N\pi} \frac{e^{ix}}{x\varphi'}\,dx. \tag{90}$$

Dans le cas II, on peut continuer indéfiniment cette opération; K se présente alors sous la forme d'une série asymptotique en $\frac{E(B)}{\pi N}$. Dans le cas I, on doit s'en tenir à la formule (90). Dans les deux cas, on voit que $K = O\left(\frac{1}{N}\right)$. On en conclut que *si* $N = O(\varepsilon^{-2})$, *les formules* (84) *ne sont plus suffisantes; il faut intégrer aussi sur* SA *et sur* BS'. En outre, il faut ajouter au second membre de (87) la valeur de α au point A, car cette valeur vaut $O(1)$, du fait que le temps de parcours de SA vaut $O(\varepsilon)$. *Le calcul devient plus compliqué.* Nous le ferons seulement sur l'exemple concret envisagé au Chapitre V.

28. *L'équation en* μ s'écrit

$$\beta T = L\cos\nu + M\sin\nu. \tag{91}$$

La *condition de synchronisation* est, si N est petit vis-à-vis de ε^{-2},

$$\lambda > |\gamma|\frac{E(B)}{\rho} = \lambda_0, \qquad \rho = |K|. \tag{92}$$

Comme $\rho = O\left(\frac{1}{N}\right)$, *la limite inférieure* λ_0 *est approximativement proportionnelle à* N. Il en est d'ailleurs de même si $N = O(\varepsilon^{-2})$, car L et M valent alors $O(\varepsilon)$; donc, $\lambda_0 = O(\varepsilon^{-2})$.

S'il existe des forces perturbatrices indépendantes de t, il faut ajouter les valeurs correspondantes de $-G$ au premier membre de (91); cela modifie évidemment λ_0. Par exemple, si l'oscillateur est soumis au frottement constant du n° 26, le premier membre de (91) doit être augmenté de $\frac{2k}{\varepsilon}I$, I désignant l'intégrale de la formule (79). En supposant $\rho > kI$, on a $\lambda_0 = \frac{\gamma E(B)}{\rho - kI}$ ou $\frac{-\gamma E(B)}{\rho + kI}$, suivant que γ est >0 ou <0; λ_0 est augmenté dans le premier cas, diminué dans le second.

Bien entendu, il y aurait à tenir compte, comme au n° 10. 1, de la compatibilité de cette limite inférieure avec la limite supérieure A, laquelle nous est inconnue.

L'indice de stabilité est

$$\sigma = G'(\mu) = \omega(-L\sin\nu + M\cos\nu). \tag{93}$$

Comme $\omega = O(N\varepsilon)$ et que L, M valent $O\left(\frac{1}{N\varepsilon}\right)$, on a $\sigma = O(1)$.

29. *Couplage élastique de deux oscillateurs identiques.* — Convenons de surligner les lettres correspondant au deuxième oscillateur et supposons que le couplage ait pour effet d'ajouter le terme $\lambda k(\bar{x}-x)$ au second membre de l'équation (1). Dans l'équation analogue relative au deuxième oscillateur, le terme additif est opposé au précédent. Ce couplage serait obtenu en reliant les deux oscillateurs par un ressort.

Avec les notations des nos 16.1 et 19.1, on a

$$(94)\qquad \begin{cases} g_{11}=g_{21}=0, & g_{12}=-g_{22}=k\varepsilon(z_{21}-z_{11}),\\ \mathrm{H}^1_{12}=-\varepsilon u\mathrm{X}_1, & \mathrm{H}^1_{22}=-\varepsilon\overline{u\mathrm{X}_1}, \qquad x^1_{11}=x \qquad x^1_{21}=\bar{x}. \end{cases}$$

La correspondance entre les variables x et $\bar{x}$ est définie comme suit. Appelons μ *l'avance de phase* du deuxième oscillateur sur le premier. Soient M et $\overline{\mathrm{M}}$ les deux points homologues du cycle (C), lequel est le même pour les deux oscillateurs, puisque ceux-ci sont identiques. La correspondance entre ces deux points est déterminée par la condition que *le temps de parcours de l'arc* $\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}$ *soit égal à* μ. Si l'on intervertit les deux oscillateurs, μ se change en $-\mu$.

Cela posé, la formule (34.1) nous donne

$$(95)\qquad \mathrm{G}_1(\mu)=2k\varepsilon^3\int_{\mathrm{S}}^{\mathrm{S}'}\mathrm{X}_1(\bar{x}-x)\,dx=2k\varepsilon^3\mathrm{D}(\bar{x}-x),$$

d'après (21). La fonction $\mathrm{G}_2(\mu)$ est obtenue par la même formule que ci-dessus, avec interversion des points M et $\overline{\mathrm{M}}$. Il équivaut de garder la même formule, mais *en changeant* μ *en* $-\mu$.

L'intégrale

$$(96)\qquad \mathrm{J}(\mu)=\mathrm{D}(\bar{x})$$

est une fonction déterminée de μ. Avec ces notations, on a

$$\mathrm{G}_1(\mu)=2k\varepsilon^3[\mathrm{J}(\mu)-\mathrm{J}(0)].$$

La fonction $\mathrm{G}_2(\mu)$ s'en déduit en changeant μ en $-\mu$.

Appelons $\mathrm{T}'=\mathrm{T}(1+\lambda\beta)$ la nouvelle période. Avec les notations du n° 16.1, nous avons

$$\mathrm{N}_\alpha=1, \qquad \gamma_\alpha=0, \qquad \rho=\beta, \qquad \varepsilon_\alpha=\beta.$$

Les équations (35.1) deviennent

$$\beta\mathrm{T}=2k\varepsilon^3[\mathrm{J}(\mu)-\mathrm{J}(0)]=2k\varepsilon^3[\mathrm{J}(-\mu)-\mathrm{J}(0)].$$

D'où l'on déduit

$$(97)\qquad \mathrm{J}(\mu)=\mathrm{J}(-\mu).$$

Cette équation *détermine la différence de phase*. On a ensuite *l'accroissement de période* par la formule

$$(98)\qquad \Delta\mathrm{T}=2\lambda k\varepsilon^3[\mathrm{J}(\mu)-\mathrm{J}(0)].$$

30. Voyons la *stabilité*. Dans la formule (36.1), on doit seulement faire $h=1$ et $k=2$, comme il résulte des formules (94). On a

$$L_1^2=\int_0^T \Pi_{12}^1 y_{21}^1 \frac{g_{12}}{z_{21}}\,dt = 2k\varepsilon^3 \int_S^{S'} X_1 \bar{x}\,dx = 2k\varepsilon^3 J(\mu)=L.$$

D'après (97), $L_2^1=L$ et, d'après (37.1), $K_1^1=K_2^2=-L$. L'équation de stabilité est, d'après (105.1) :

$$\begin{vmatrix} -L-\sigma & L \\ L & -L-\sigma \end{vmatrix}=0.$$

Sa racine non nulle est $\sigma=-2L$. La *condition de stabilité*, pour λ infiniment petit, est donc

$$J(\mu)>0. \tag{99}$$

31. L'équation (97) admet la solution évidente $\mu=0$. Il lui correspond un mouvement périodique dans lequel *les deux oscillateurs sont en phase:* le couplage n'agit pas, puisque $x-x=0$. La formule (98) donne alors $\Delta T=0$, comme il était à prévoir.

Si l'on change μ en $\mu+\frac{T}{2}$, $\bar{x}$ devient $-\bar{x}$; on a donc l'identité

$$J\left(\mu+\frac{T}{2}\right)=-J(\mu). \tag{100}$$

D'où l'on déduit $J\left(\frac{T}{2}\right)=-J(0)$, $J(0)=-J\left(-\frac{T}{2}\right)$. Donc, $\mu=\frac{T}{2}$ est une autre solution de l'équation (97). Dans le mouvement correspondant, *les deux oscillateurs sont en opposition*. La formule (98) donne alors

$$\Delta T=-4\lambda k\varepsilon^3 J(0). \tag{101}$$

32. Cherchons la *valeur asymptotique de* $J(\mu)$, pour ε infiniment petit. D'après le n° 20, on a asymptotiquement

$$\varepsilon^4 J(\mu)=\int_a^b \frac{x}{x^2}\varphi'(x)\,dx. \tag{102}$$

En particulier,

$$\varepsilon^4 J(0)=\int_a^b \frac{\varphi'}{x}\,dx=-\frac{\varepsilon T}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon^4 J\left(\frac{T}{2}\right)=\frac{\varepsilon T}{2}.$$

La condition (99) n'est pas remplie pour $\mu=0$; elle l'est pour $\mu=\frac{T}{2}$. Donc, *le mouvement pour lequel les deux oscillateurs sont en phase est instable: le mouvement pour lequel ils sont en opposition est stable.*

33. Je dis maintenant qu'il n'y a *pas d'autre solution* que les deux précédentes.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\varepsilon\mu = \nu, \qquad \varepsilon^3 J(\mu) = K(\nu), \qquad \nu_1 = \frac{\varepsilon T}{2}.$$

L'équation (97) s'écrit

$$K(\nu) - K(-\nu) = 0. \tag{103}$$

Posons maintenant

$$z(M) = \int_A^M \frac{-\varphi'}{x}\, dx = \varepsilon t_A^M,$$

en appelant t_A^M la durée du parcours de A à M.

Supposons $0 < \mu < \frac{T}{2}$, donc $0 < \nu < \nu_1$. Sur AB, prenons le point M_1 tel que $t_{M_1}^B = \mu$; donc

$$\nu = z(B) - z(M_1) = \nu_1 - z(M_1). \tag{104}$$

La formule (102) s'écrit

$$K(\nu) = \int_A^B \frac{-\bar{x}}{x}\, dz = K' + K'', \qquad K' = \int_A^{M_1}, \qquad K'' = \int_{M_1}^B. \tag{105}$$

Pour K', $\bar{M}$ est sur l'arc MB; donc

$$b \leq \bar{x} < x; \qquad \frac{-\bar{x}}{x} > -1; \qquad K' > z(A) - z(M_1) = -z(M_1).$$

Pour K'', $\bar{M}$ est sur l'arc $A'M_1'$ symétrique de AM_1; donc

$$-\bar{x} > x_1 > x, \qquad \frac{-\bar{x}}{x} > 1, \qquad K'' > z(B) - z(M_1) = \nu,$$

d'après (104). D'où l'on déduit

$$K(\nu) = K' + K'' > \nu - z(M_1) = 2\nu - \nu_1.$$

L'identité (100) s'écrit $K(\nu + \nu_1) = -K(\nu)$. On en déduit $-K'(-\nu) = K(\nu_1 - \nu)$. Comme $0 < \nu_1 - \nu < \nu_1$, on a $K(\nu_1 - \nu) > 2(\nu_1 - \nu) - \nu_1 = \nu_1 - 2\nu$. Donc, $K(\nu) - K(-\nu) > 2\nu - \nu_1 + \nu_1 - 2\nu = 0$. L'équation (103) n'est par vérifiée. En définitive.

THÉORÈME. — *Dans le couplage élastique de deux oscillateurs de relaxation identiques, il n'y a que deux mouvements périodiques; l'un, pour lequel les oscillateurs sont en phase, est instable; l'autre, pour lequel ils sont en opposition, est stable.*

CHAPITRE V.

APPLICATION A DEUX EXEMPLES CONCRETS.

1. *Oscillateur de Van der Pol.* — Nous avons (n° 29. V)

$$\varphi = \frac{x^3}{3} - x, \qquad a = 2, \qquad \varphi_A = -\varphi_B = \frac{2}{3}, \qquad b = 1, \qquad A = 3, \qquad B = 1,$$

$$\theta = \frac{2}{9}\varepsilon^2, \qquad \theta_1 = \varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

La formule (31.4) nous donne

$$p(x) = \int_x^a \frac{(x^2-1)^2}{x}\,dx = -\log x + x^2 - \frac{x^4}{4} + \log a - a^2 + \frac{a^4}{4}.$$

D'où

$$q = \frac{3}{4} + \log a - a^2 + \frac{a^4}{4}.$$

La valeur $a = 2$ n'est que la partie principale. En réalité, on a (n° 51, V)

$$a = 2 + 2{,}338\,\varepsilon^{\frac{4}{3}} - \varepsilon^2\left(1{,}099 - \frac{4}{9}\log\varepsilon\right) - \frac{2}{3}(2{,}296 - 2\log\varepsilon)\,\varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^{\frac{8}{3}}\right),$$

$$a = 2 + 2{,}338\,\varepsilon^{\frac{4}{3}} + \varepsilon^2\left(\frac{16}{9}\log\varepsilon - 2{,}63\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{8}{3}}\right);$$

d'où l'on déduit

$$\frac{q}{\varepsilon^2} = 1{,}443\,\varepsilon^{-2} + 10{,}52\,\varepsilon^{-\frac{2}{3}} - 11{,}84 + 8\log\varepsilon + O\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right).$$

La formule (49.4) nous donne alors

$$S = 0{,}0298\,\varepsilon^{-\frac{5.0}{3}}\,e^{23{,}68 - 21{,}01\varepsilon^{-\frac{2}{3}} - 2{,}886\varepsilon^{-2}}. \tag{1}$$

Par exemple, pour $\varepsilon = 0{,}2$, on trouve $S = 0{,}98.10^{-41}$.

On voit que *le décrément est extrêmement petit;* le mouvement périodique autonome s'établit pratiquement aussitôt après la première oscillation.

2. Pour la *résistance visqueuse* du n° 25.4, on a $\Delta T = -1{,}614\,\lambda k$.

Pour le *frottement constant* du n° 26.4, on a $\Delta T = \frac{\lambda k}{\varepsilon}$.

Pour la force perturbatrice $-\lambda k x$, on a, d'après (68.4), $\Delta T = -1{,}614\,\frac{\lambda k}{\varepsilon}$.

3. Dans le cas de la *synchronisation par force sinusoïdale*, on a, avec les notations du n° 27.4,

$$E(M)=\int_x^2 \frac{x^2-1}{x}\,dx = 2-\log 2-\frac{x^2}{2}+\log x, \qquad E(B)=1,5-\log 2=0,80685;$$

$$\alpha=\pi N\,\frac{1,30685-\dfrac{x^2}{2}+\log x}{0,80685};$$

$$\frac{-\varepsilon\pi N}{1,6137}L=\int_A^B \frac{d(\sin\alpha)}{x}; \qquad \frac{-\varepsilon\pi N}{1,6137}M=\int_A^B \frac{d(-\cos\alpha)}{x}.$$

En calculant les intégrales ci-dessus par les trapèzes, on trouve

N.....	1.	3.	5.	7.	9.
εL.....	0,106	0,0236	0,0113	0,00705	0,00492
εM.....	−0,624	−0,226	−0,1403	−0,1017	−0,0798
$\varepsilon\sqrt{L^2+M^2}$.	0,633	0,227	0,1418	0,1019	0,0798

N.....	11.	13.	15.	17.	19.	∞.
εL.....	0,00369	0,00292	0,00240	0,00202	0,00173	0
εM.....	−0,0656	−0,0558	−0,0485	−0,0430	−0,0385	0
$\varepsilon\sqrt{L^2+M^2}$.	0,0656	0,0558	0,0485	0,0430	0,0385	0

La *condition de synchronisation* est $\sqrt{L^2+M^2}>\beta T$. Or, d'après (63,V), on a asymptotiquement $\varepsilon T=1,614$. En portant dans l'inégalité précédente, on trouve que *la limite inférieure de* $\frac{1}{\beta}$ a les valeurs suivantes :

2,55 7,11 11,47 15,83 20,2 24,6 29 33,3 37,6 42.

En divisant ces nombres par N, on trouve les quotients

2,55 2,37 2,29 2,26 2,25 2,24 2,23 2,22 2,21 2,21.

On voit que la limite ci-dessus est *à peu près proportionnelle à* N (*cf.* n° 28.4).

Les quotients ci-dessus sont les limites inférieures λ_0 (n° 28.4) dans le cas le plus défavorable où $\gamma=\frac{1}{N}$.

4. *Autre exemple.* — Il s'agit de l'oscillateur du n° 22, V. On se trouve dans le cas II (n° 2.4). On a

$$\varphi=-x \quad \text{pour } 0<x<1, \qquad \varphi=x-2 \quad \text{pour } x>1,$$
$$n=3, \qquad \varphi_1=1, \qquad b=1, \qquad A=B=C=1, \qquad \theta=3\varepsilon^2, \qquad \theta_1=\varepsilon^2.$$

La formule (31.4) donne

$$p(x)=\log a-\log x, \qquad q=\log a.$$

La valeur exacte de a est (n° 26, V)

$$a = 3 + \varepsilon^2\left(1 + 3\log\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\log\varepsilon\right) + O(\varepsilon^4).$$

D'où

$$q = \log 3 + \varepsilon^2\left(\frac{1}{3} + \log\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\log\varepsilon\right) + O(\varepsilon^4).$$

Le *décrément* est, d'après (52.4),

$$S = \frac{81}{4}\, e^{\frac{-2\log a}{\varepsilon^2} - 2} = 9\varepsilon^{-\frac{8}{3}} e^{\frac{-2\log 3}{\varepsilon^2} - \frac{8}{3}}. \tag{2}$$

Par exemple, pour $\varepsilon = 0,2$, on a approximativement $S = 2,23.10^{-20}$.

5. Pour la *résistance visqueuse* du n° 25.4, on a

$$\Delta T = -2\lambda k\left(\frac{4}{3} - \log 3\right) = -0,469\,\lambda k.$$

Pour le *frottement constant*, la formule (79.4) donne $\Delta T = \frac{4\lambda k}{3\varepsilon}$. Pour la force perturbatrice $-\lambda k x$, la formule (67.4) donne

$$\Delta T = -\frac{2\lambda k}{\varepsilon}\log 3 = -2,2\frac{\lambda k}{\varepsilon}.$$

6. *Synchronisation par une force sinusoïdale.* — La formule (86.4) donne

$$E(M) = \log 3 - \log x, \qquad E(B) = \log 3.$$

D'où

$$\alpha = \pi N\frac{\log 3 - \log x}{\log 3}, \qquad x = 3e^{-m\alpha}, \qquad m = \frac{\log 3}{\pi N}.$$

La formule (89.4) s'écrit alors

$$K = -\frac{m}{3}\int_0^{N\pi} e^{m-i\alpha}\, d\alpha = \frac{4m}{3(m - i)}.$$

D'où

$$L = \frac{8m^2}{3\varepsilon(m^2+1)}, \qquad M = \frac{-8m}{3\varepsilon(m^2+1)}.$$

L'*équation de synchronisation* s'écrit, d'après (91.4),

$$3\beta\log 3 = \frac{4m}{m^2+1}(m\cos\gamma - \sin\gamma). \tag{3}$$

L'indice de stabilité est, d'après (93.4),

$$\sigma = \frac{-8}{3(m^2+1)}(m\sin\gamma \quad \cos\gamma). \tag{4}$$

7. *Étude directe.* — L'intérêt de cet oscillateur réside en ce que l'on peut en faire l'étude directe et, par suite, *contrôler la théorie générale* faisant l'objet du présent Mémoire.

Nous nous contenterons d'examiner le cas de la *synchronisation sous-harmonique* par une force sinusoïdale.

Pour $-1<x<1$, l'équation différentielle du mouvement est

$$(5)\qquad x''-\frac{x'}{\varepsilon}+x=\lambda\cos\varphi,\qquad \varphi=\omega t-\nu,\qquad \omega=\frac{2\pi}{T'},\qquad T'=\frac{T}{N(1-\lambda\zeta)}.$$

L'intégrale générale est

$$(6)\qquad x=Ce^{rt}+C'e^{r't}+\lambda X,$$

r et r' désignant respectivement les petite et grande racines de l'équation caractéristique

$$r^2-\frac{r}{\varepsilon}+1=0$$

et X la fonction

$$(7)\qquad X=-\frac{\varepsilon}{\Delta}[\varepsilon(\omega^2-1)\cos\varphi+\omega\sin\varphi],\qquad \Delta=\varepsilon^2(\omega^2-1)^2+\omega^2.$$

D'après le n° 26, V, on a $T=\dfrac{2\log 3}{\varepsilon}+O(\varepsilon)$; donc (n° 6),

$$\omega=\frac{\varepsilon}{m}+O(\varepsilon^3).$$

Si N *est fini*, on a asymptotiquement $\Delta=\varepsilon^2\dfrac{m^2-1}{m^2}$; d'où

$$(8)\qquad X=\frac{m}{m^2-1}(m\cos\varphi-\sin\varphi)+O(\varepsilon^2).$$

Pour $x>1$ ou <-1, il suffit de changer ε en $-\varepsilon$, donc r en $-r$ et r' en $-r'$. Nous conviendrons de *surligner toutes les lettres correspondantes*. En particulier, on a $\bar{X}(\varphi)=X(-\varphi)$.

En résolvant la formule (6) et celle qui donne la vitesse v par rapport à C et C', on obtient les *fonctions invariantes*

$$(9)\qquad r'\log(\xi+\lambda Y)-r\log(\eta+\lambda Z)$$

et

$$(10)\qquad -\frac{t}{\varepsilon}+\log(\xi+\lambda Y)+\log(\eta+\lambda Z),$$

en posant

$$(11)\qquad \xi=x-rv,\qquad \eta=v-rx,\qquad Y=-X+r\omega X',\qquad Z=rX-\omega X',\qquad X'=\frac{dX}{d\varphi}.$$

Cette invariance signifie que, pour des conditions initiales déterminées, chacune des fonctions ci-dessus garde la même valeur tant que x ne sort pas de l'intervalle $(-1,+1)$. Pour $x>1$ ou $x<-1$, on a deux fonctions analogues, obtenues en surlignant et changeant le signe de ε, r, r'.

8. *Équation de synchronisation.* — Employons la méthode du n° 9. 1. Partons du point A d'abscisse $+1$, avec la phase φ_1 et la vitesse négative v_1, supposée assez voisine de la vitesse normale V_1 pour que le mobile atteigne A', d'abscisse -1, sans revenir auparavant en A. Nous arrivons en A' avec la phase φ_2 et la vitesse v_2; nous y revenons avec la phase φ_3 et la vitesse v_3; nous atteignons A avec la phase φ_4 et la vitesse v_4 et nous y revenons avec la phase φ_5 et la vitesse v_5. Au point (φ_4, v_4) nous faisons correspondre le point $(\varphi_5 - 2N\pi, v_5)$.

Cherchons d'abord les *variables canoniques*. Pour $\lambda = 0$, nous avons $v_5 = P(v_4)$ et $\varphi_5 - 2N\pi = \varphi_1 + Q(v_1)$, P et Q désignant des fonctions déterminées. On a d'abord $dv_5 = P'(v_4)\,dv_4$. On en déduit que v_1 est la deuxième variable canonique x_2; le décrément correspondant est $S = P'(v_4)$.

La première variable canonique est

$$x_1 = v_1 Q'(V_1) + (1 - S)\varphi_1. \tag{12}$$

On a en effet

$$dX_1 = Q'(V_1)\,dv_5 + (1 - S)\,d\varphi_5 = Q'(V_1)\,S\,dv_1 + (1 - S)\,[d\varphi_1 - Q'(V_1)\,dv_1] = dx_1.$$

L'équation de synchronisation s'écrit maintenant

$$Q'(V_1)\frac{\partial v_5}{\partial \lambda} + (1 - S)\frac{\partial \varphi_5}{\partial \lambda} = 0.$$

Si l'on appelle t_i les temps correspondant aux φ_i, on a

$$\varphi_5 - \varphi_1 = \omega(t_5 - t_1) = \frac{2\pi N}{T}(1 + \lambda\beta)(t_5 - t_1);$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \lambda} = \frac{2\pi N}{T}\left[\frac{\partial (t_5 - t_1)}{\partial \lambda} + \beta T\right].$$

L'équation précédente s'écrit donc

$$\beta T = \frac{\partial (t_5 - t_1)}{\partial \lambda} \qquad \frac{T}{2\pi N(1 - S)}\,Q'(V_1)\frac{\partial v_5}{\partial t}. \tag{13}$$

Le second membre est la fonction $H(\mu)$ du Chapitre I.

9. Le calcul peut être considérablement simplifié si l'on tient compte de la *symétrie de la courbe fondamentale*. Posons

$$v_5 = F(v_1, t_1, \lambda), \qquad t_5 - t_1 = G(v_1, t_1, \lambda).$$

Si l'on change x en $-x$ et λ en $-\lambda$, l'équation (5) ne change pas; donc,

$$v_5 = -F(-v_5, t_5, -\lambda), \qquad t_5 - t_1 = G(-v_5, t_5, -\lambda). \tag{14}$$

Pour $\lambda = 0$, les fonctions F et G dépendent seulement de v_1; appelons s et g leurs

dérivées pour $v_1 = V_1$. Les dérivées $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial G}{\partial \lambda}$ sont, pour $\lambda = 0$, des fonctions de v_1 et φ_1. Appelons A et B leurs valeurs pour $v_1 = V_1$; ce sont des fonctions de φ_1.

Si l'on change φ en $\varphi + N\pi$ et λ en $(-1)^N\lambda$, l'équation (5) ne change pas; il en est donc de même des fonctions F et G. Quant aux fonctions A et B, elles sont multipliées par $(-1)^N$. Or, pour les conditions normales, on a $\varphi_3 = \varphi_1 + N\pi$, $-V_3 = V_1$. On en conclut que, pour ces conditions, les dérivées partielles des seconds membres de (14) par rapport à λ ont les valeurs respectives $(-1)^N A$ et $(-1)^{N+1} B$.

Cela posé, différentions totalement les formules (14) à partir des conditions conditions normales :

$$dv_3 = s\,dv_3 + (-1)^N A\,d\lambda, \qquad dt_3 - dt_3 = -g\,dv_3 + (-1)^{N+1} B\,d\lambda.$$

D'autre part,

$$dv_3 = s\,dv_1 + A\,d\lambda, \qquad dt_3 - dt_1 = g\,dv_1 + B\,d\lambda.$$

Donc,

$$dv_3 = s^2\,dv_1 + A[(-1)^N + s]\,d\lambda, \qquad dt_3 - dt_1 = (1-s)g\,dv_1 + [B + (-1)^{N-1}B - gA]\,d\lambda.$$

On en déduit d'abord (n° 8) que $S = s^2$ et $Q'(V_1) = \frac{2\pi N}{T}(1-s)g$.

L'équation (13) devient ainsi

$$\beta T = [1 - (-1)^N]\left(\frac{gA}{1+s} - B\right).$$

Si N *est pair*, le second membre est nul; *la synchronisation est impossible pour les petites valeurs* (1) *de* λ, comme nous l'avons déjà vu dans le cas général (n° 5, 4). *Nous supposerons* donc dorénavant N *impair*, auquel cas *l'équation de synchronisation* devient

$$\beta T = \frac{2gA}{1+s} - 2B. \tag{15}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer s, g, A, B.

10. Égalons les différentielles de la fonction (9) aux temps t_1 et t_2, *pour les conditions normales* :

$$\frac{-dv_2 + r'Y_2\,d\lambda}{\xi_2} - r\frac{dv_2 + Z_2\,d\lambda}{\eta_2} = \frac{-dv_1 + r'Y_1\,d\lambda}{\xi_1} - r\frac{dv_1 + Z_1\,d\lambda}{\eta_1}.$$

D'où l'on tire

$$v_2\,dv_2 = a_2\,d\lambda + \frac{\eta_2}{\xi_2}(v_1\,dv_1 - a_1\,d\lambda), \tag{16}$$

(1) Mais pas nécessairement pour les grandes valeurs, comme nous le verrons plus loin (n° 18).

en posant

$$(17)\qquad \zeta = \xi\eta, \qquad a = \frac{r'\mathrm{Y}\eta - r\mathrm{Z}\xi}{\rho} = \varphi\omega\mathrm{X}' + \mathrm{X}\left(x - \frac{\varphi}{\varepsilon}\right), \qquad \rho = 1 - r^2.$$

On en déduit, en augmentant les indices d'une unité, surlignant et remarquant que $\varphi_3 = -\varphi_1$, $\overline{\zeta}_3 = \overline{\zeta}_1$, $\overline{a}_3 = \overline{a}_1$:

$$-\varphi_1\, d\varphi_3 = \overline{a}_1\, d\lambda + \frac{\overline{\zeta}_1}{\overline{\zeta}_2}\left(\varphi_2\, d\varphi_2 - \overline{a}_2\, d\lambda\right)$$

ou, en tenant compte de (16),

$$d\varphi_3 = s\, d\varphi_1 + \Lambda\, d\lambda,$$

avec

$$(18)\qquad s = -\frac{\zeta_1\zeta_2}{\overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2}, \qquad \Lambda\varphi_1 = -sa_1 - \overline{a}_1 + \frac{\zeta_1}{\overline{\zeta}_2}(\overline{a}_2 - a_2).$$

11. Égalons de même les différentielles de la fonction (10) :

$$-\frac{dt_2}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{Y}_2\, d\lambda - r\, d\varphi_2}{\xi_2} + \frac{\mathrm{Z}_2\, d\lambda + d\varphi_2}{\eta_2} = -\frac{dt_1}{\varepsilon} + \frac{\mathrm{Y}_1\, d\lambda - r\, d\varphi_1}{\xi_1} + \frac{\mathrm{Z}_1\, d\lambda + d\varphi_1}{\eta_1}.$$

D'où l'on tire

$$(19)\qquad dt_2 - dt_1 = \frac{b_2}{\zeta_2}\, d\varphi_2 - \frac{b_1}{\zeta_2}\, d\varphi_1 + \left(\frac{c_2}{\zeta_2} - \frac{c_1}{\zeta_1}\right) d\lambda,$$

en posant

$$(20)\quad b = \varepsilon(\xi - r\eta) = r(x - 2\varepsilon\varphi), \qquad c = \varepsilon(\xi\mathrm{Z} + \eta\mathrm{Y}) = r\mathrm{X}(2\varepsilon x - \varphi) - b\omega\mathrm{X}'.$$

Augmentons les indices d'une unité et surlignons, en remarquant que $\overline{b}_3 = -\overline{b}_1$ et $\overline{c}_3 = \overline{c}_1$

$$dt_3 - dt_2 = -\frac{b_1}{\overline{\zeta}_1}\, d\varphi_3 - \frac{\overline{b}_2}{\overline{\zeta}_2}\, d\varphi_2 + \left(\frac{\overline{c}_1}{\overline{\zeta}_1} - \frac{\overline{c}_2}{\overline{\zeta}_2}\right) d\lambda.$$

Ajoutons à (19) et remplaçons $d\varphi_3$ et $d\varphi_2$ par leurs valeurs (n° 8); en prenant les coefficients de $d\varphi_1$ et $d\lambda$, nous obtenons

$$g = -\frac{b_1}{\zeta_1} - s\frac{\overline{b}_1}{\overline{\zeta}_1} + \frac{\varphi_1}{\zeta_1\varphi_2}\left(b_2 - \overline{b}_2\frac{\zeta_2}{\overline{\zeta}_2}\right) = \frac{2r^2(\varphi_1 + \varphi_2)}{\varepsilon\zeta_1\overline{\zeta}_2},$$

$$\mathrm{B} = -\Lambda\frac{\overline{b}_1}{\overline{\zeta}_1} + \left(\frac{b_2}{\zeta_2} - \frac{\overline{b}_2}{\overline{\zeta}_2}\right)\frac{a_2\zeta_1 - a_1\zeta_2}{\zeta_1\varphi_2} + \frac{\overline{c}_1}{\overline{\zeta}_1} - \frac{c_1}{\zeta_1} + \frac{c_2}{\zeta_2} - \frac{\overline{c}_2}{\overline{\zeta}_2}.$$

On a

$$1 + s = \frac{2r^2(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1\varphi_2 + 1)}{\varepsilon\zeta_1\overline{\zeta}_2}, \qquad \frac{g}{1+s} = \frac{1}{\varphi_1\varphi_2 + 1}.$$

L'équation (15) s'écrit

$$25\qquad \frac{\beta\mathrm{T}}{2}(\varphi_1\varphi_2 + 1) = \Lambda - \mathrm{B}(\varphi_1\varphi_2 + 1).$$

En remplaçant B par la formule ci-dessus, on trouve que le coefficient de A est $\frac{c_1 D}{\zeta_1}$, en posant $D = r\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\varepsilon + c_1 - c_2 - 2\varepsilon c_1 c_2\right)$. Puis, en ordonnant par rapport aux a_i, on obtient

$$(21)\quad \frac{\beta T}{2}(c_1 c_2 + 1) = \bar{D}\left(\frac{a_1}{\zeta_1} - \frac{a_2}{\zeta_2}\right) + D\left(\frac{\bar{a}_2}{\bar{\zeta}_2} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{\zeta}_1}\right) + (1 + c_1 c_2)\left(\frac{c_1}{\zeta_1} - \frac{c_2}{\zeta_2} - \frac{\bar{c}_1}{\bar{\zeta}_1} + \frac{\bar{c}_2}{\bar{\zeta}_2}\right).$$

En remplaçant les a_i, c_i par leurs valeurs, on trouve que le coefficient de X_1 est $-\frac{1}{\varepsilon}(1 + \varepsilon c_2)$; celui de X_1' est *un*. Remarquons maintenant que si l'on change ε en $-\varepsilon$, r en $-r$, X en $\bar{X}$ et X′ en $\bar{X}'$, le second membre de (21) change de signe. Il est invariant si l'on change ε en $-\varepsilon$, c_1 en c_2, c_2 en c_1, X_1 en $-X_2$, X_2 en $-X_1$, X_1' en X_2', X_2' en X_1'. On en déduit les autres coefficients et l'on obtient finalement *l'équation de synchronisation* sous la forme

$$(22)\quad \begin{aligned}\frac{\beta T}{2}(c_1 c_2 + 1)\varepsilon = &-X_1(1 + \varepsilon c_2) + X_2(\varepsilon c_1 - 1)\\ &+ \bar{X}_1(\varepsilon c_2 - 1) - \bar{X}_2(\varepsilon c_1 + 1) + \varepsilon\omega(X_1' + X_2' - \bar{X}_1' - \bar{X}_2').\end{aligned}$$

D'après (13.1), l'expression de βT est la fonction $G(\mu)$. *L'indice de stabilité* est $\sigma = G'(\mu)$, d'après (8.1). D'après (5) ci-dessus, on a $\frac{d}{d\mu} = -\omega\frac{d}{d\varphi}$; d'où

$$(23)\quad \begin{aligned}\frac{\sigma}{2}(c_1 c_2 + 1)\varepsilon = &\quad \omega X_1'(\varepsilon c_2 + 1) + \omega X_2'(1 - \varepsilon c_1)\\ &+ \omega\bar{X}_1'(1 - \varepsilon c_2) + \omega\bar{X}_2'(\varepsilon c_1 + 1) + \varepsilon\omega^2(X_1 + X_2 - \bar{X}_1 - \bar{X}_2).\end{aligned}$$

12. *Formules asymptotiques.* — Les formules précédentes sont *rigoureusement exactes* quel que soit ε. Voyons maintenant ce qu'elles deviennent asymptotiquement quand ε est infiniment petit, c'est-à-dire quand on a véritablement un oscillateur de relaxation.

Pour les conditions normales, la formule (23, V), où l'on doit changer r en $-r$, nous donne $c_1 = -r$, d'où $\gamma_{11} = 0$. Pour obtenir la partie principale de γ_{11}, il faut reprendre le calcul de c_1.

Partons du point terminal avec une vitesse nulle. Nous avons

$$x = C(e^{-rt} - r^2 e^{-rt}), \qquad v = rC(e^{-rt} - e^{-rt});$$

d'où

$$\gamma_1 = v + rx = C\rho r e^{-rt} = \frac{\rho r x e^{-\rho r t}}{1 - r^2 e^{-\rho r t}}.$$

Pour $x = 1$, on a (p. 86, V)

$$t = r^2\log a + r + \frac{r^2}{2} + \ldots, \qquad -\rho r t = -\frac{\log a}{\varepsilon^2} + 3\log a - 1 + O(\varepsilon^2).$$

D'où

$$\gamma_1 = 27\varepsilon e^{-\frac{\log a}{\varepsilon^2} - 1} = O(\exp).$$

D'autre part, on a la valeur asymptotique (p. 95, V) $c_2 = -2r'$. D'où l'on déduit les parties principales :

$$\xi_1 = \bar{\xi}_1 = 1, \qquad \eta_1 = -2r, \qquad \xi_2 = 1, \qquad \bar{\xi}_2 = -3, \qquad \eta_2 = \bar{\eta}_2 = -2r',$$
$$\zeta_1 = -2r, \qquad \bar{\zeta}_1 = \bar{\eta}_1, \qquad \zeta_2 = -2r', \qquad \bar{\zeta}_2 = 6r'.$$

Portant dans (18), on a

$$s = -\frac{9}{2} e^{-\frac{\log a}{\varepsilon^2} - 1}.$$

En élevant au carré, *on retrouve* (2).

On a maintenant (1), d'après (52, V), $\frac{\varepsilon T}{2} = \log 3$; l'équation (22) s'écrit

$$3\beta \log 3 = X_1 - X_2 - 3\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + O(\varepsilon^2).$$

Mais, $t_2 - t_1 = O(\varepsilon)$; donc, $\varphi_2 - \varphi_1 = O(\varepsilon^2) = X_2 - X_1 = \bar{X}_2 - \bar{X}_1$. D'autre part, t_1 vaut asymptotiquement $\frac{T}{2}$; donc, $\varphi_1 = \pi - \nu$. L'équation (22) s'écrit donc asymptotiquement

$$3\beta \log 3 = -4\bar{X}_1 = \frac{4m}{m^2+1}(m\cos\nu - \sin\nu).$$

On retrouve bien la formule (3).

13. *Étude numérique de la synchronisation.* — Pour avoir des renseignements plus précis sur le mécanisme de la synchronisation, en particulier pour les grandes valeurs de λ, j'ai fait une étude numérique du problème, en prenant $\varepsilon = 0,2$ et faisant varier le rapport $N' = \frac{T}{T'}$ entre 10 et 12.

Supposons qu'on parte d'un point quelconque, avec une vitesse quelconque et une phase quelconque pour la force synchronisante. Le point M finit nécessairement par sortir du segment AA'. En effet, s'il n'en sortait pas, son abscisse serait de la forme (6) et tendrait vers $\pm\infty$ suivant le signe de C' (2).

Supposons, par exemple, qu'il sorte par A, avec une vitesse non infiniment petite (3). Tant qu'il ne revient pas en A, on a une équation de la forme

$$x = Ce^{-rt} + C'e^{-r't} + \lambda\bar{X}, \tag{24}$$

avec

$$C = \frac{\xi_0 + \lambda Y_0}{2}, \qquad C' = r'\frac{\eta_0 + \lambda\bar{Z}_0}{2}. \tag{25}$$

(1) Dans (52, V), T désigne la demi-période; il faut donc doubler.

(2) Sauf si $C = C' = 0$ et si le maximum de $\lambda\bar{X}$ est < 1. On a, dans ce cas, un mouvement périodique sinusoïdal; mais, il est évidemment instable, car il suffit de modifier infiniment peu les conditions initiales pour que C et C' ne soient pas nuls.

(3) Il est évidemment possible que cette vitesse soit infiniment petite. S'il en est de même de l'accélération, c'est-à-dire de $\lambda\cos\varphi_0 - 1$, la durée du retour sera très petite. Mais, il ne saurait en être ainsi indéfiniment pour les sorties par A ou A'.

Le retour en A se fait au bout d'un temps fini, pour lequel l'exponentielle e^{-rt} est extrêmement petite vis-à-vis de l'autre (¹). On peut donc, pour ce retour, négliger le second terme de la formule (24). La vitesse v_1 est alors donnée par

$$v_1 = -r - \lambda Z_1 + O(\exp). \tag{26}$$

A partir de ce moment et à O(exp) près, *le mouvement ne dépend plus que*

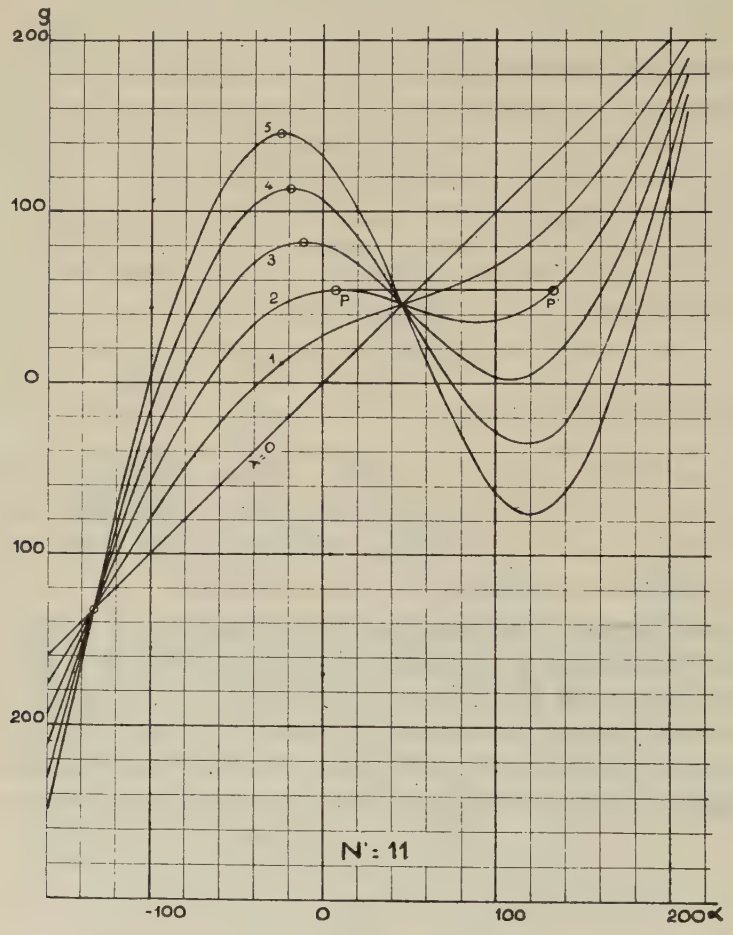

Fig. 6.

d'un seul paramètre, qui est la phase $\varphi_1 = \alpha$. C'est là une *propriété fondamentale, inhérente au caractère accentué de relaxation.*

(¹) Par exemple, pour $t = 2{,}6$ le rapport des deux exponentielles vaut à peu près $0{,}67.10^{-5}$. La durée *normale* de l'aller et retour étant approximativement 5,66, l'erreur relative commise en négligeant le second terme de (24) est de l'ordre de 10^{-10}.

La valeur de α est donnée par l'équation

$$g(\alpha) = h, \tag{27}$$

en posant (¹)

$$g(\alpha) = \alpha + \omega r' \log[1 - \lambda \bar{X}(\alpha)], \qquad h = \varphi_0 + \omega r' \log C, \tag{28}$$

et désignant par φ_0 la phase au départ de A. On peut l'obtenir, pour toute valeur de h, en construisant une fois pour toutes la courbe (g) représentant la fonction $g(\alpha)$. Cette courbe peut affecter les différentes formes indiquées par la figure 6 (²). Si λ est petit, elle n'a pas de tangente horizontale; il y a une seule racine et α peut prendre n'importe quelle valeur. Si λ dépasse une certaine valeur λ', dépendant de N', la courbe a des tangentes horizontales. Suivant la valeur de h, l'équation (27) peut admettre une ou plusieurs racines, dont on doit seulement retenir la plus petite qui soit $> \varphi_0$.

De toute manière, la vitesse $v_1 = -r - \lambda \bar{Z}_1(\alpha)$ doit être négative. Or $g'(\alpha) = r' \dfrac{r + \lambda \bar{Z}(\alpha)}{1 - \lambda \bar{X}(\alpha)}$ a le signe de $-v_1$. Donc, la racine à adopter est toujours telle que $g'(\alpha)$ soit > 0; c'est l'abscisse du point de rencontre de la droite Δ d'ordonnée h avec un arc de la courbe (g) à pente positive. Il s'ensuit que, pour $\lambda > \lambda'$, il faut exclure de l'intervalle de variation de α le segment compris entre le point le plus haut de la courbe et le point de rencontre de la tangente en ce point avec la courbe.

14. Supposons qu'on se donne la valeur numérique de α. On peut calculer φ_2 et v_2 (n° 8), soit par la formule (6) en résolvant l'équation $x = -1$, soit en utilisant l'invariance des fonctions (9) et (10). C'est cette dernière méthode qui nous a paru la plus commode pour le calcul des points de synchronisation et des décréments correspondants.

En tenant compte de (26), on a

$$\xi_1 + \lambda Y_1 = \frac{r}{\varepsilon} + \lambda H_1, \qquad \eta_1 + \lambda Z_1 = -2r + \lambda K_1,$$

en posant

$$H = -X - r^2 \bar{X} + r(X' - \bar{X}'), \qquad K = Z - \bar{Z}.$$

Les inconnues v_2 et φ_2 sont ensuite déterminées par le système

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{r}{\omega} \gamma, \qquad \log(\xi_2 + \lambda Y_2) = \log(\xi_1 + \lambda Y_1) + r^2 \gamma, \tag{29}$$

en posant

$$\gamma = \log(-\eta_2 - \lambda Z_2) - \log(-\eta_1 - \lambda Z_1).$$

(¹) Nous supposons λ assez petit pour que $1 - \lambda \bar{X}(\alpha)$ soit > 0 quel que soit α.

(²) Sur cette figure, ainsi que dans les suivantes, l'unité d'angle est le degré.

On le résout par approximations successives, en devinant les valeurs de φ_2, φ_2 substituées dans γ. La première équation donne φ_2; puis, la deuxième donne φ_2. La deuxième approximation est toujours suffisante, la première l'est souvent.

On a ensuite φ_3 en faisant $x=-1$ dans (24), négligeant la deuxième exponentielle et remplaçant C par $\frac{\bar{\xi}_2+\lambda\bar{Y}_2}{\rho}$. La constante C étant négative, on a, en posant $\varphi_3=N\pi+\alpha_1$ et tenant compte de ce que N est impair :

$$g(\alpha_1)=\varphi_2-N\pi+\omega r'\log\frac{-\bar{\xi}_2-\lambda\bar{Y}_2}{\rho}=f(\alpha).$$

Le second membre étant connu numériquement, on a α_1 en coupant la courbe (g) par la droite d'ordonnée $h=f(\alpha)$. On peut alors construire la courbe (α_1) donnant la phase $N\pi+\alpha_1$ à la fin de la première alternance (1) en fonction de la phase α au début de cette alternance. Par des itérations successives, on en déduit la courbe (α_p) donnant la phase $pN\pi+\alpha_p$ au bout de la $p^{\text{ième}}$ alternance.

15. *Remarque.* — Pour que les calculs précédents soient valables, il faut que le point M arrive en A′ avec une vitesse négative assez grande en valeur absolue. Cette condition peut ne pas être remplie si λ est grand.

Le mouvement de A à A′ est donné par une équation se déduisant de (24) en changeant r en $-r$, r' en $-r'$, $\bar{X}$ en X. Les constantes C et C′ sont données par les formules (25), où l'on fait les mêmes changements. Si $C'<0$, il est évident que le point A′ est sûrement atteint. Mais, il n'est pas sûr qu'il en soit de même si $C'>0$. Il peut se faire que le point M rebrousse chemin, sous l'effet de la force périodique, avant d'arriver en A′ et qu'il revienne en A avec une vitesse positive. Il y reviendra de nouveau ultérieurement (n° 13) et finira par atteindre A′ au bout d'un certain nombre d'oscillations analogues. Le calcul devient alors très compliqué, quoique faisable.

Il convient donc d'*écarter les cas où* C′ *est positif*, ou même négatif, mais *voisin de zéro*; car, dans ce dernier cas, on n'est pas sûr que la vitesse v_2 sera assez grande pour que les conclusions du n° 13 soient légitimes.

16. *Pour que le mouvement soit périodique*, il faut et il suffit que, pour une valeur paire de p, soit $p=2q$, la différence $\alpha_p-\alpha$ soit un multiple de 2π, soit $\alpha_p-\alpha=2k\pi$. *Pendant une période, le point* M *effectue p alternances*, donc q *allers et retours;* et *la phase de la force augmente de* $2(pN+k)\pi$.

(1) Nous appelons *alternance* le passage de A (vitesse positive) à A′ (vitesse négative), ou de A′ (vitesse négative) à A (vitesse positive).

Le cas intéressant est évidemment celui pour lequel $q = 1$, de telle manière que la période ne comprenne qu'un seul aller et retour, comme dans le mouvement périodique autonome.

Il peut arriver, plus particulièrement, que l'on ait $\alpha_1 = \alpha$. Dans ce cas, *les deux alternances ont même durée*. La période vaut NT'.

17. Pour découvrir les mouvements ci-dessus, il suffit, d'une manière générale, de *couper la courbe* (α_p) par la droite $\alpha_p = \alpha + 2k\pi$. A tout point de rencontre correspond un mouvement synchronisé. Un tel point sera dit *point de synchronisation*.

Pour que le mouvement correspondant soit stable, il faut et il suffit que le décrément correspondant ait un module < 1. Or, ce décrément est la dérivée $F'_p(\alpha)$. Donc, *la condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un point de synchronisation est que la tangente en ce point à la courbe* (α_p) *ait une pente comprise entre* -1 *et* $+1$.

Dans le cas où $p = 1$, cette pente est le *décrément par alternance*, que nous avons appelé s au n° 9. Si $p = 2$, on a le décrément S du n° 4.

Le décrément peut être évalué graphiquement, en traçant la tangente ci-dessus. Mais, ce procédé est peu précis. Dans le cas où $p = 1$, on a la formule suivante :

$$s(\xi_2 + \lambda \overline{Y}_2)\left(1 - \frac{\lambda r' \overline{X}'_1}{1 - \lambda \overline{X}_1}\right) = \xi_2 - \lambda(X_2 + rX'_2) - \frac{\lambda\omega(\xi_2 + \lambda Y_2)H'_1}{\rho\varepsilon(\xi_1 + \lambda Y_1)} - \frac{2\lambda\omega r^2(\eta_2 + \lambda Z_2)K'_1}{\rho(\eta_1 + \lambda Z_1)}.$$

Malgré sa complication, cette formule se prête bien au calcul numérique, parce que la plupart des quantités qui y figurent ont déjà été calculées antérieurement (n° 13).

18. *Exemples numériques.* — Nous allons indiquer quelques exemples, au sujet desquels nous signalerons les différentes particularités qui peuvent se présenter.

I. $N' = 11$, $\lambda = 1$. — La figure 7 reproduit la courbe (α_1), qui coupe la droite D, d'équation $\alpha_1 = \alpha$, aux points A et B. Le second seul est *stable*. Les flèches indiquent les valeurs prises par la phase à la fin des alternances successives, en partant d'une phase quelconque. On voit clairement que ces valeurs tendent vers l'abscisse de B et l'on se rend compte de la rapidité avec laquelle cette limite est pratiquement atteinte. On constate que *la synchronisation a lieu quelles que soient les conditions initiales; le domaine de stabilité est infini* (n° 6.1).

II. $N' = 11$, $\lambda = 2$. — La courbe $\lambda = 2$ de la figure 6 possède une tangente horizontale PP'. Les abscisses des points P et P' sont respectivement 7 et 133.

On en déduit l'intervalle de variation (133, 367) pour α. La courbe (α_1) est (*fig.* 8) EABGG'F. Elle présente *une discontinuité* pour $\alpha = 324$ environ; l'ordonnée α_1 passe brusquement de 367 à 493. Elle coupe la droite D en A et B; A est *stable*, B est instable.

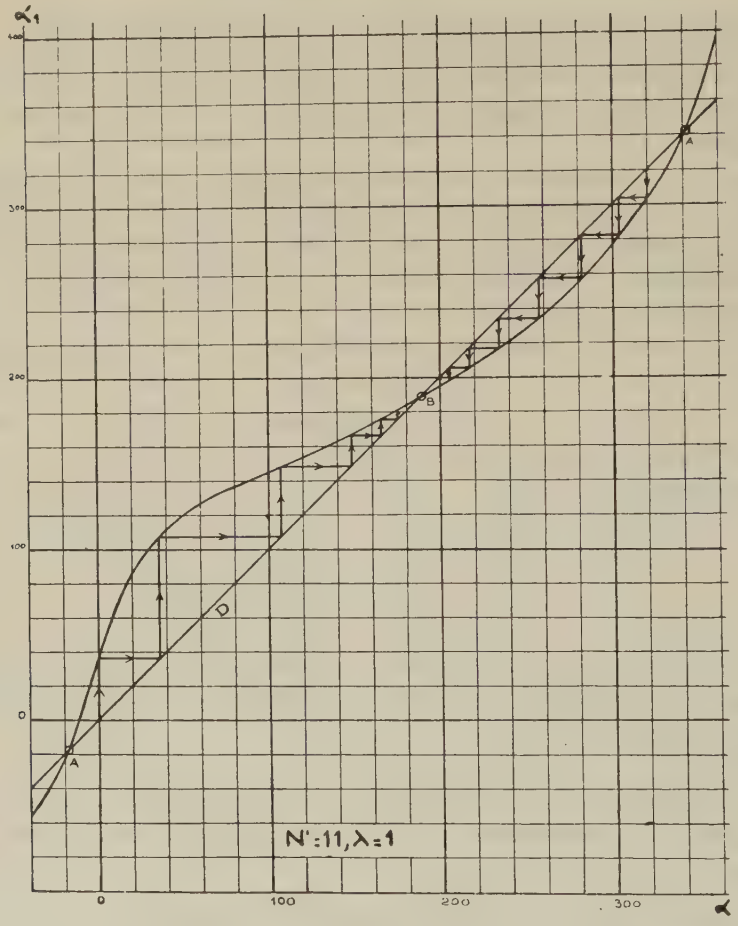

Fig. 7.

La courbe (α_2) est HABH'JJ'K. Elle passe toujours par A et B, bien entendu. Elle présente *deux discontinuités*. Pour une valeur de α très légèrement supérieure à 320, α_2 passe brusquement de 367 à 493, par suite de la discontinuité subie par α_1. Pour $\alpha = 324$, α_2 passe de 493 à 540 environ.

La courbe (α_3) présenterait trois discontinuités, provenant des deux discontinuités de α_2 et de celle de α_1. Plus généralement, la courbe (α_p) présente p discontinuités.

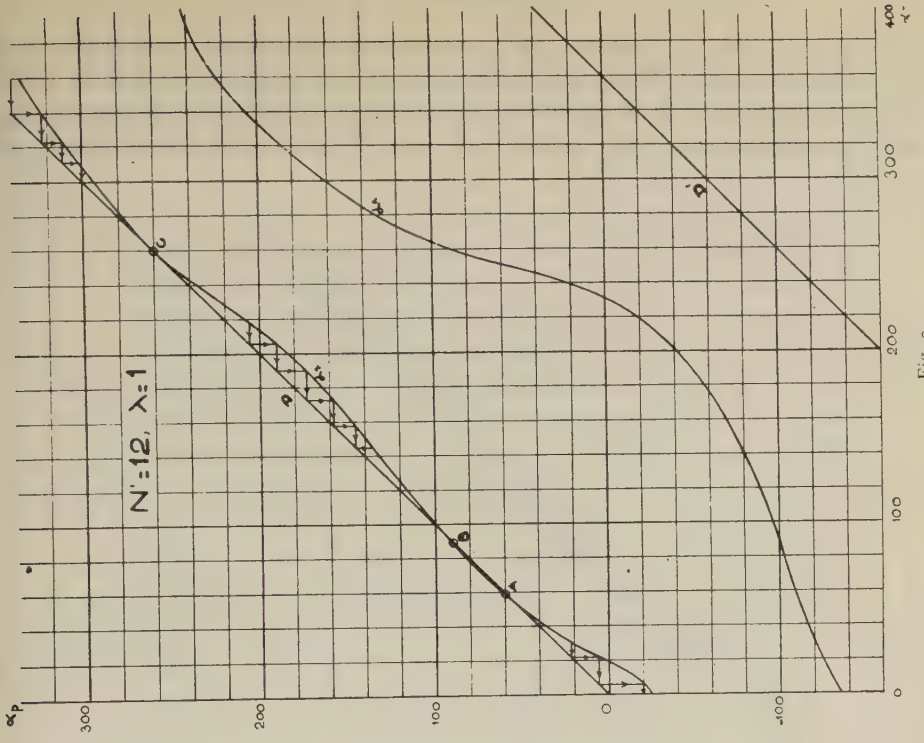
N'=12, λ=1
300
200
100
0
-100
400
300
200
100
0

Fig. 9.

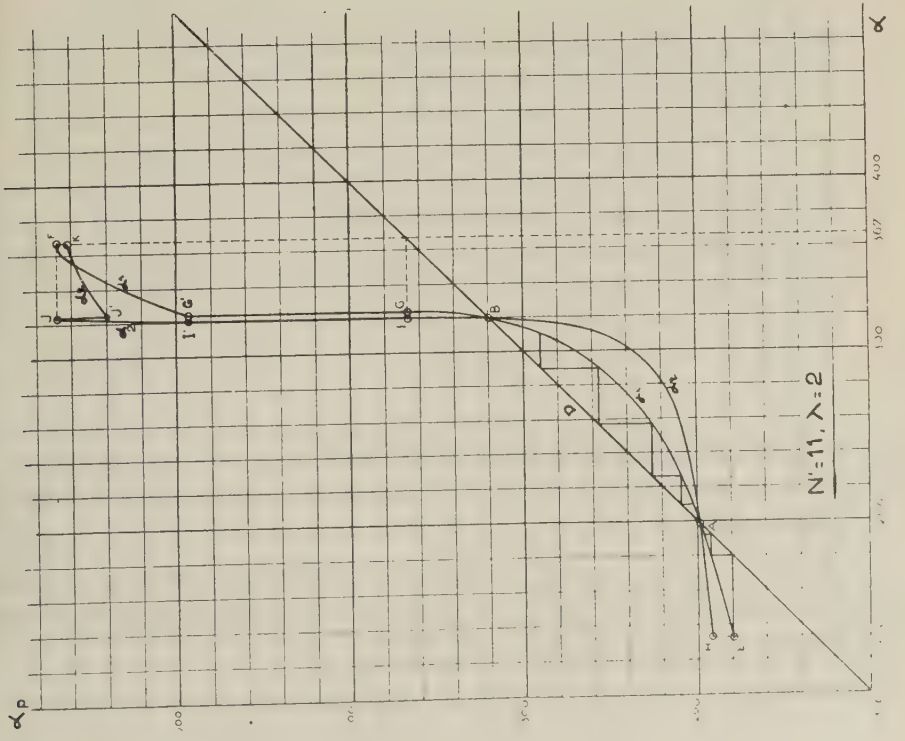
N'=11, λ=2
B
J
K
400
300
200
100

Fig. 8.

III. $N'=12$, $\lambda=1$. — La courbe (α_1) est comprise entre D et D'; il n'y a *pas de synchronisation par alternance*. La courbe (α_2) coupe la droite D en deux points très rapprochés A et B; elle lui est à peu près tangente au point C. Le point B est *stable à droite et à gauche*; le point C est *stable à droite, instable à*

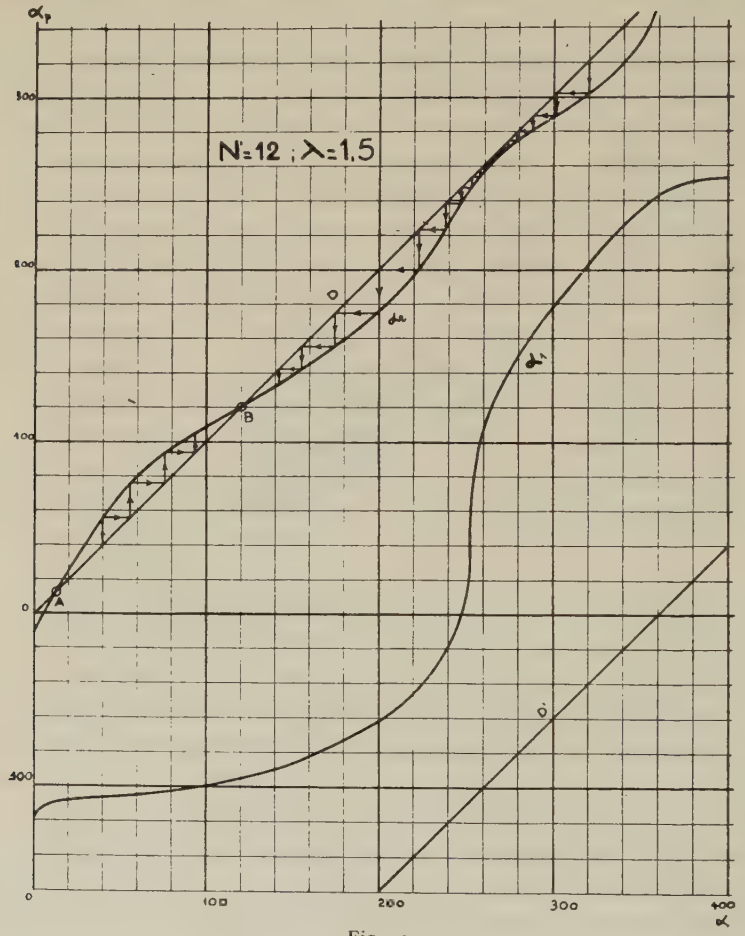

Fig. 10.

gauche. Si la valeur initiale de α est comprise entre 60 et 260, α tend vers 90, abscisse de B. Si la valeur initiale de α est comprise entre 260 et 420, α tend vers 260, abscisse de C.

IV. $N'=12$, $\lambda=1,5$ (*fig.* 10). — Cas analogue au précédent, avec cette seule différence que la courbe (α_2), tout en s'approchant beaucoup de D, ne lui est plus tangente.

V. $N'=12$, $\lambda=1,75$ (*fig.* 11). — L'intervalle de variation va de 103 à 385.

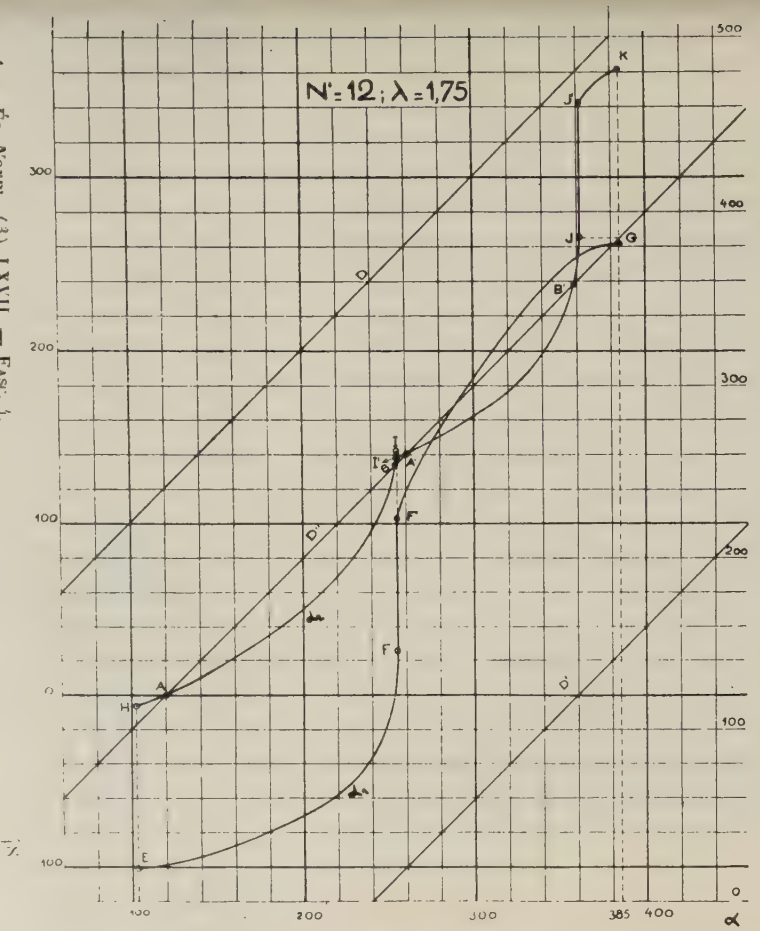
N'=12 ; λ=1,75
K
J
J'
G
B
I
I'
A
F
F'
D'
D
H
E
300
200
100
0
400
385
α

Fig. 11.

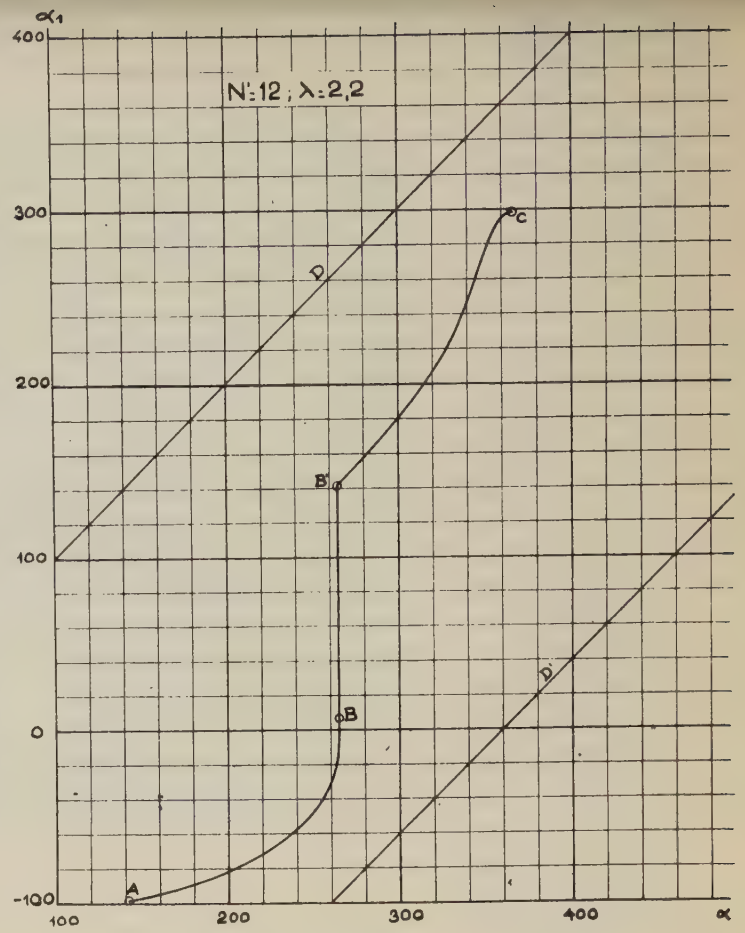
N'=12 ; λ=2,2
α1
C
B'
B
A
D
D'
400
300
200
100
0
-100
α

Fig. 12.

La courbe (α_1), ou EFF'G, ne coupe ni D, ni D'. Elle a une discontinuité FF' pour $\alpha = 225$, α_1 passant de 25 à 103.

Pour diminuer l'encombrement, on a descendu la courbe (α_2), ainsi que la droite D, qui vient en D''; l'échelle correspondante est indiquée à droite. La courbe (α_2), ou HABII'AB'JJ'K, possède deux discontinuités : II' et JJ'. Elle coupe D'' en A, B, A', B' : A et A' sont stables, B et B' sont instables.

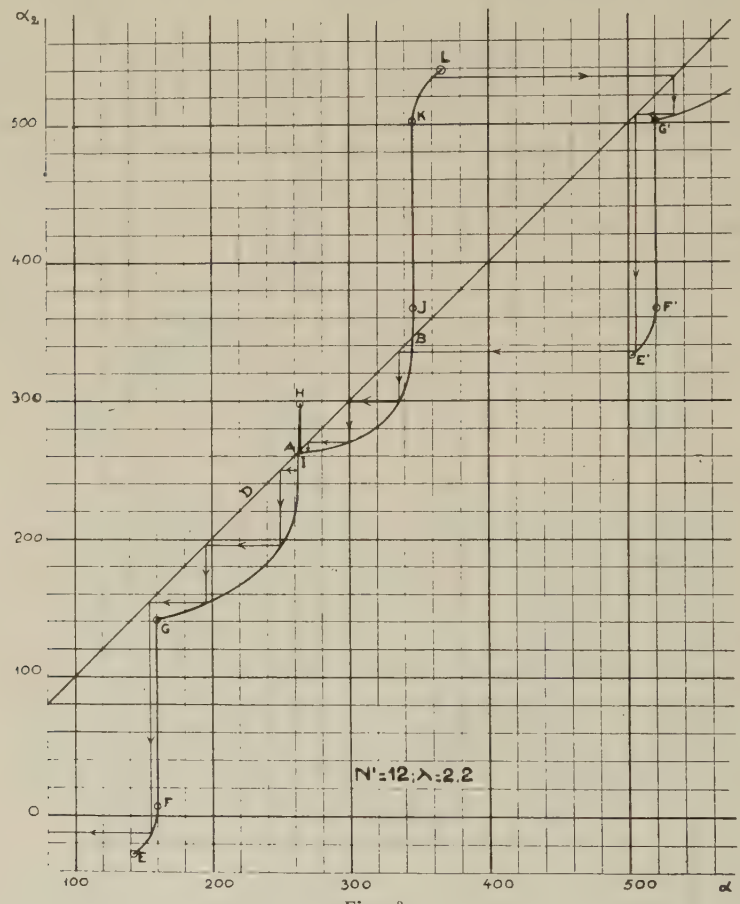

Fig. 13.

Pour ne pas embrouiller le dessin, on n'a pas tracé les cheminements indiquant les phases atteintes après les doubles alternances successives. Mais, il est facile de voir qu'en partant d'un point quelconque de l'arc HAB, on arrive en A; en partant d'un point quelconque de l'arc BII'A'B', on arrive en A'; en partant d'un point quelconque de l'arc B'JJ'K, on arrive au point A'' déduit de A par la translation 360 suivant les deux axes.

VI. $N' = 12$, $\lambda = 2,2$. — L'intervalle de variation va de 142 à 367. La

courbe (α_1) (*fig.* 12), ne coupe ni D, ni D'; elle présente la discontinuité BB' pour $\alpha = 265$ environ.

La courbe (α_2) (*fig.* 13) possède trois discontinuités. La première FG a lieu pour $\alpha = 160$ environ, parce que α_1 traverse la valeur $-95 = 265 - 360$, qui donne la discontinuité BB' (*fig.* 12) pour α_2; on a donc FG = BB'. La deuxième

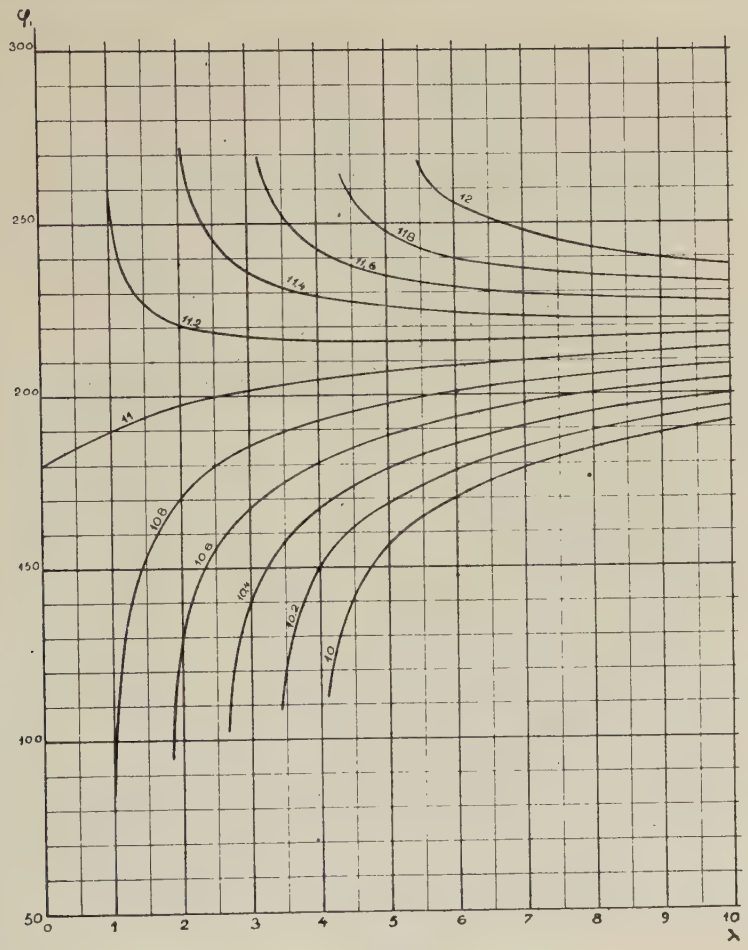

Fig. 14.

discontinuité HI a lieu pour $\alpha = 265$, du fait que α_1 subit la discontinuité BB'. La troisième JK = BB' a lieu pour $\alpha = 346$ environ, parce que α_1 traverse la valeur 265.

L'arc E'F'G'..., déduit de EFG... par la translation 360 suivant les deux axes, est le début de la courbe correspondant à une augmentation de α égale à 360.

Il y a *deux points de synchronisation* A et B, *tous deux instables*.

19. *Possibilité de la synchronisation par alternance quel que soit le rapport des périodes.* — J'ai fait le calcul des points de synchronisation stables pour des valeurs de N′ échelonnées de 0,2 entre 10 et 12. *Pour* $N'=11$, *la synchronisation a lieu quel que soit* λ. Pour $\lambda=0$, la limite de α est donnée par l'équation (22), où l'on fait $\beta=0$. On a, d'autre part, d'après les résultats

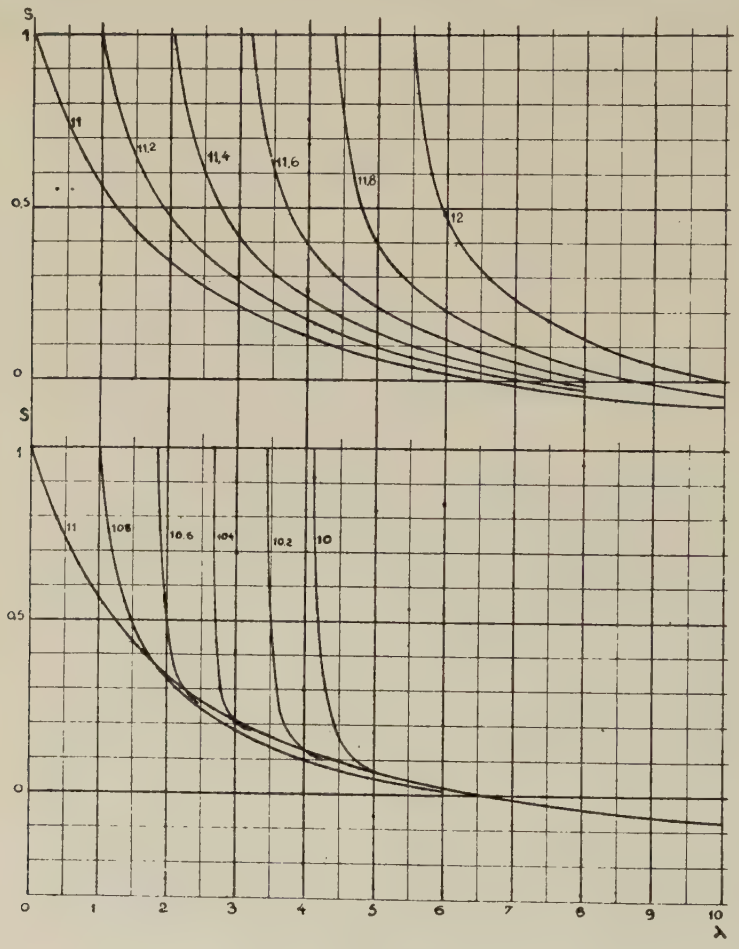

Fig. 15.

obtenus dans (V) (¹) et le calcul de la trajectoire correspondant au mouvement périodique autonome

$$r_1=-r=-0,2087, \qquad r_2=-10,54, \qquad t_2-t_1=0,66975, \qquad T=12,912.$$

(¹) Je signale à ce propos une erreur commise dans le calcul du temps t_s de la page 97 (due à une fausse lecture de logarithme). Au lieu de 0,73877, il faut lire 0,72497; ce qui ramène l'erreur de la formule asymptotique à 0,00606 au lieu de 0,01986 et l'erreur relative à 0,0084 au lieu de 0,027. La vérification est donc encore meilleure que ce que j'avais annoncé.

En portant dans (22), on trouve

$$\beta T = -0,002435\cos\varphi_1 - 0,244\sin\varphi_1.$$

Pour $\beta = 0$, on trouve que la racine stable est $\varphi_1 = 179°,4$. La formule asymptotique (2) donnerait 178°,2; *l'accord est bon.*

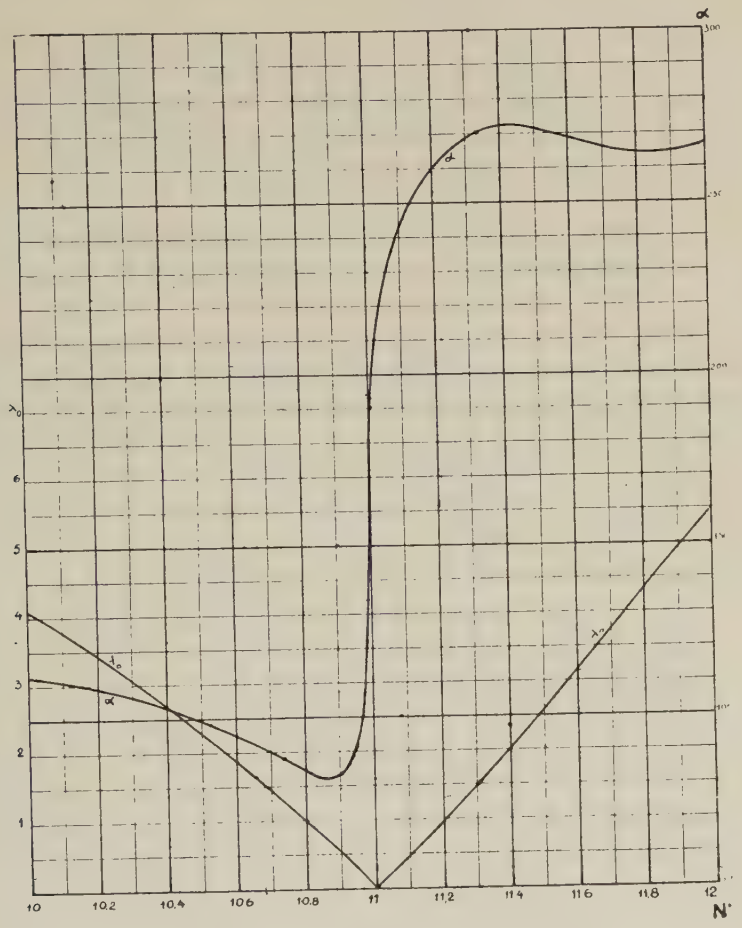

Fig. 16.

Pour les autres valeurs de N', *la synchronisation n'est possible* que si λ dépasse une certaine valeur λ_0, fonction de N'. On s'en rend compte sur la figure 14.

La figure 15 donne le *décrément s par alternance*. Pour $\lambda = \lambda_0$, ce décrément vaut *un*.

La figure 16 donne λ_0 en fonction de N', ainsi que la valeur correspondante de α.

Ceci nous montre que *quel que soit le rapport* N' *des périodes, il est toujours*

possible de synchroniser, à condition que l'intensité de la force synchronisante soit suffisamment grande.

A vrai dire, cette proposition n'a été établie qu'en faisant varier N' entre les deux nombres pairs consécutifs 10 et 12. Mais, il est probable qu'elle est générale, sans que nous puissions toutefois l'affirmer avec une entière certitude.

Les courbes de la figure 15 montrent que, pour les grandes valeurs de λ, s devient <0. On pourrait craindre qu'il devienne <-1, ce qui rendrait la synchronisation instable. En conséquence, j'ai calculé la limite de s pour $\lambda=\infty$. On trouve d'abord que la limite de α (point de synchronisation) est la racine de l'équation $\overline{X}(\alpha)=0$ pour laquelle $\overline{X}'(\alpha)>0$. Puis, la limite de s est $-e^{-\frac{\pi}{\omega}}$. Elle est toujours >-1. On ne peut évidemment en conclure que s demeure compris entre -1 et $+1$ quel que soit λ; mais, cela paraît probable.

On peut enfin se demander *si les conclusions précédentes sont valables pour tous les oscillateurs de relaxation*. Cela me paraît assez vraisemblable; mais, la démonstration rigoureuse reste à faire et constitue sans doute un problème fort difficile.

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES
DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES
DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION

PAR M. PIERRE LELONG.

I. — Introduction.

1. Nous rappellerons tout d'abord un résultat de H. Poincaré (1) : si $f(z_1, \ldots, z_p) = f(M)$ est une fonction holomorphe des p variables complexes $z_1, z_2 \ldots z_p$, $\log|f(M)|$ est égal à une fonction harmonique $H(M)$ de l'espace R^{2p} (R^{2p} désigne l'espace à $2p$ dimensions réelles, support de l'espace C^p des p variables complexes z_i), augmentée d'un potentiel $U^\mu(M) = \int \frac{d\mu(Q)}{MQ^{2p-2}}$ où μ est une distribution positive portée par la variété $f(z_1, \ldots, z_p) = 0$ avec une densité constante.

Comme préliminaire, nous donnerons de ce résultat une démonstration très simple déjà esquissée dans un travail antérieur (2), où nous avions rattaché le le théorème de Poincaré à une propriété générale des fonctions plurisousharmoniques.

Nous adopterons ici un point de vue élémentaire et nous tirerons les conséquences d'une propriété simple de la moyenne $\lambda|\log|f|; M; R|$ de $\log|f|$, prise sur une sphère (3) $S(M; R)$ de centre M, de rayon R : λ est une fonction continue, non décroissante, convexe de $u_0 = \log R$. Cette propriété (valable d'ailleurs également pour les fonctions plurisousharmoniques) est prise comme point de départ; elle permet d'établir rapidement le théorème de Poincaré : celui-ci donne, en substance, la décomposition de F. Riesz de la fonction $\log|f(M)|$, sousharmonique dans R^{2p}.

(1) *Sur les propriétés du potentiel et les fonctions abéliennes* (*Act. Math.*, 22, 1899, p. 159).

(2) *Les fonctions plurisousharmoniques* (*Ann. E. N. S.*, 69, 1945, p. 324, *cf.* théorème 4). La définition des fonctions plurisousharmoniques est rappelée au paragraphe V de ce travail.

(3) $S(M; R)$ désigne la frontière de la boule pleine $B(M; R)$, de centre M, de rayon R.

La convexité de $\lambda(\log R)$ fournit toutefois notablement plus et donne des précisions sur la distribution μ, c'est-à-dire sur l'aire de la variété $f=0$. Nous démontrerons la propriété simple suivante du continu formé par une variété analytique complexe V^{p-1} (l'indice supérieur indique le nombre de dimensions complexes) : l'aire (à $2p-2$ dimensions réelles) de la variété à l'intérieur d'une boule $B(M; R)$ de centre M, de rayon R, a la valeur

$$\sigma(R)=\tau_{2p-2}\nu(M; R)R^{2p-2},$$

où τ_{2p-2} est la mesure de la boule unité dans C^{p-1} et $\nu(M; R)$ désigne une fonction *non décroissante* de R, pour laquelle $\nu(M, 0)$ est égal à l'ordre de multiplicité de M sur la variété; en conséquence $\sigma(R)$ est toujours au moins égal à l'aire découpée par $B(M; R)$ sur le plan ou le cône tangent en M à la variété; $\nu(M; R)$ que nous appellerons *le degré moyen* de la variété dans la boule $B(M; R)$ est une fonction de R qui croît dans le cas d'une variété algébrique depuis l'ordre de M sur la variété jusqu'au degré de celle-ci quand R augmente indéfiniment. La propriété indiquée peut être considérée comme une précision métrique au théorème des fonctions implicites, celui-ci étant essentiellement un théorème d'existence. Elle suppose seulement $B(M; R)$ contenue dans le domaine où la variété est définie. Elle permet, étant donnée une division simpliciale de l'espace, de majorer le nombre des simplexes qui contiennent des points de la variété. On verra qu'elle correspond à une particularité de la distribution de masse d'une fonction plurisousharmonique.

Les variétés analytiques complexes seront, sauf indication contraire, définies d'une manière globale, c'est-à-dire en annulant (pour une variété V^{p-1} dans C^p) une fonction analytique f. On sait d'ailleurs qu'on peut passer de la définition locale (donnée de Cousin) à la définition globale dans une boule $B(M; R)$ ou dans un domaine cylindrique défini par $z_i \in d_i$, $(1 \leq i \leq p)$ quand les d_i sont simplement connexes.

Terminons cet avant-propos par une remarque : en passant de $\log|f|$ à la moyenne $\lambda[\log|f|; M; R]$, on réalise pour les masses μ qui interviennent dans la décomposition de Poincaré un balayage qui conserve le caractère plurisousharmonique de la fonction.

Nombre de résultats élémentaires de la théorie des fonctions, et des polynomes en particulier (on se reportera pour un exemple aux théorèmes 5 et 6 et à leurs corollaires, au paragraphe V du présent travail), sont démontrés pour $p=1$ en utilisant explicitement la possibilité d'isoler les zéros d'une fonction $f(z)$ qui sont portés par un compact K (ensemble fermé et borné) de C^1, grâce à l'opération de la division qui consiste à écrire $f(z)=P(z)f_1(z)$, avec $f_1(z)\neq 0$ pour $z\in K$; $P(z)$ est un polynome qui ne s'annule plus dans le complémentaire de K.

Il est clair qu'il n'existe pas pour $p\geq 2$ d'opération *algébrique* sur les fonctions de p variables permettant d'effectuer une telle décomposition sur l'ensemble des

zéros. Le passage à la théorie du potentiel, une fois effectuée la décomposition de Poincaré-Riesz, donne sous forme additive, et relativement à $\log|f|$, toutes les facilités de décomposition que l'algèbre ne fournit plus pour $p \geq 2$. Toutefois, le potentiel de Poincaré des masses portées par un sous-ensemble compact d'une variété analytique V^{p-1} n'est jamais une fonction plurisousharmonique. L'étude de la moyenne λ faite ici revient à opérer, plutôt qu'une décomposition des masses, une modification de la distribution qui n'altère pas le caractère plurisousharmonique et permet de conserver à certaines propriétés simples des fonctions analytiques le caractère élémentaire qu'elles ont pour $p = 1$.

II. — Convexité de la moyenne sphérique $\lambda[\log|f|; M; R]$ par rapport à $\log R$; démonstration du théoréme de Poincaré.

2. Nous considérerons dans ce paragraphe des sphères concentriques $S(M; R)$ de centre M, de rayon variable R, contenues à l'intérieur d'un domaine D où est définie une fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ analytique des p variables complexes z_k. Par abréviation, si $M = [z_1, z_2, \ldots, z_p]$ on notera aussi $S(z_k; R)$, $B(z_k; R)$ respectivement la sphère et la boule de centre M, de rayon R, quand il sera utile d'expliciter les coordonnées de M.

On désignera par ω_{2p} la mesure (à $2p-1$ dimensions réelles) de la sphère unité $S(M; 1)$; si α_k $(1 \leq k \leq p)$ sont p paramètres complexes liés par $\sum_1^p |\alpha_k|^2 = 1$, on aura en posant $\alpha_k = r_k e^{i\theta_k}$, avec $\sum_1^p r_k^2 = 1$:

$$d\omega_{2p}(\alpha_k) = d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_p r_2 dr_2 \ldots r_p dr_p$$

et $S(M; 1)$ est décrite pour $0 \leq \theta_k < 2\pi$, $\sum_2^p r_j^2 \leq 1$. On a $\omega_{2p} = \int d\omega_{2p} = \frac{2\pi^p}{(p-1)!}$.

On désignera par $\lambda[\log|f|; M; R]$ la moyenne de $\log|f|$ sur $S(M; R)$ on posera :

$$(1) \qquad I(\zeta) = \lambda[\log|f|; z_k; R] = \omega_{2p}^{-1} \int \log|f(z_1 + \zeta\alpha_1, \ldots, z_p + \zeta\alpha_p)|\, d\omega_{2p}(\alpha_k).$$

Il est immédiat que $I(\zeta)$ ne dépend que de $R = |\zeta|$; la multiplication de ζ par $e^{i\varphi}$ équivaut en effet à augmenter de φ tous les arguments θ_k des paramètres α_k dans l'intégration (1). On peut donc prendre tout d'abord la moyenne de $\log|f(z_1 + \zeta e^{i\varphi}\alpha_1, \ldots, z_p + \zeta e^{i\varphi}\alpha_p)|$ par rapport à φ en posant :

$$(2) \qquad U(z_k; \alpha_j; \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(z_1 + \zeta e^{i\varphi}\alpha_1, \ldots, \zeta_p + \zeta e^{i\varphi}\alpha_p)|\, d\varphi$$

et calculer (1) en remplaçant $\log|f|$ par U sous le signe d'intégration ; U est une

fonction non décroissante, convexe de $u_0 = \log R$, à valeurs sur la droite réelle demi-fermée $-\infty \leq U < \infty$; $\lambda[\log|f|; z_k; R]$ est donc une fonction non décroissante, convexe (donc continue) de $\log R$.

En particulier, la continuité de $\log|f|$ entraîne

$$\log|f(z_k)| = \lim_{R=0} \lambda[\log|f|; z_k; R] \leq \lambda[\log|f|; z_k; R],$$

qui est la propriété classique de la moyenne pour les fonctions sousharmoniques dans l'espace R^{2p}, et caractérise ces fonctions quand on est assuré de la semi-continuité supérieure. En résumé on a déjà établi que $\log|f|$ est (si $f \not\equiv 0$) une fonction sousharmonique; il en résulte que la moyenne λ n'a pas la valeur $-\infty$ pour $R > 0$. Nous énoncerons :

Proposition 1. — *La moyenne* $\lambda[\log|f|; z_k; R]$ *de* $\log|f|$ *sur une sphère* $S(z_k; R)$ *est une fonction continue, convexe, non décroissante de* $u_0 = \log R$.

On pourra, remarquons-le, se contenter de supposer f holomorphe *sur la sphère* $S(z_k; R)$, cette condition entraînant d'après un résultat bien connu que f soit holomorphe dans le domaine $B(z_k; R)$ qu'elle limite, pour $p \geq 2$.

3. La fonction $\log|f|$ étant sousharmonique, on a par la décomposition de Riesz

$$\log|f(M)| = H(M) - U^{\mu}(M),$$

où $U^{\mu}(M) = \int d\mu(Q)\, MQ^{2-2p}$ est un potentiel de masses positives. Pour achever la démonstration du théorème de Poincaré, il suffit de préciser la distribution μ. D'après (2), si f ne s'annule pas dans $B(z_k; R)$, on a, quels que soient les α_k et $|\zeta| \leq R$,

$$\log|f(z_k)| = U(z_k; \alpha_k; \zeta) = \lambda[\log|f|; z_k; |\zeta|];$$

$\log|f|$ est donc harmonique dans tout domaine où f ne s'annule pas; la distribution μ est portée par la variété $f = 0$.

Pour préciser, calculons selon la formule de Gauss la masse $\mu(S)$ portée par un élément S d'une division simpliciale T de l'espace; nous supposerons que T possède les propriétés suivantes : S est un cylindre défini par $z_i \subset d_i$, où d_i est un domaine simplement connexe, de frontière f_i rectifiable, à tangente continue, sauf en un nombre fini de points; de plus f_i ne porte aucun des points z_i^{ν} correspondant aux valeurs de z_i pour lesquelles f s'annule identiquement par rapport aux $p-1$ autres variables. Si F est la frontière de S, on a $F = \sum_1^p F_i$ avec $F_i = d_1 \times d_2 \ldots d_{i-1} \times f_i \times d_{i+1} \ldots \times d_p$. D'autre part, remarquons que la normale à la face F_i n'est autre que la normale ν_i à f_i dans le plan de f_i. On a donc, par le calcul élémentaire du flux $\varphi(S)$,

$$(1) \qquad \varphi(S) = \sum_i \int \frac{\partial \log|f|}{\partial \nu_i}\, dF_i = \sum_{i=1}^{p} \int_{z_k \in d_k} ds_1 ds_2 \ldots ds_{i-1} ds_{i+1} \ldots ds_p \int_{f_i} \frac{\partial \log|f|}{\partial \nu_i}\, df_i.$$

où $ds_k (k \neq i)$ est l'élément d'aire de d_k. Désignons par $n_i[z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}; (d_i); z_{i-1} \ldots z_p]$ le nombre de zéros de f pour lesquels $z_i \subset d_i$, en fonction des $z_k (k \neq i)$ supposés donnés, par $\sigma_i(S)$ l'aire de la projection sur le sous-espace C^{p-1} des $z_k (k \neq i)$ de la partie de la variété $f = 0$ intérieure à S. On a

$$(4) \qquad \varphi(S) = 2\pi \sum_1^p \int n_i[z_1, \ldots z_{i-1}; (d_i); z_{i+1}, \ldots z_p]\, ds_1 \ldots ds_{i-1} ds_{i+1} \ldots ds_p$$

$$\varphi(S) = 2\pi \sum_1^p \sigma_i(S).$$

Dans le passage de (3) à (4), le nombre entier positif ou nul n_i peut être non défini pour certaines valeurs (z_k), $(k \neq i)$, si f_i porte un zéro de f; mais d'après la restriction faite plus haut sur la frontière de S, cette éventualité n'a lieu que pour un ensemble de mesure nulle dans le champ

$$[d_1 \times d_2 \ldots \times d_{i-1} \times d_{i+1} \ldots \times d_p].$$

La propriété $\varphi(S) = 2\pi \sum_i \sigma_i(S)$ s'étend à une somme de simplexes et par suite à un ensemble ouvert quelconque. Si $\bar{D}$ est un domaine fermé sur lequel f est holomorphe et si l'aire $\sigma(F)$ à $2p - 2$ dimensions réelles de l'intersection de sa frontière F avec la variété $f = 0$ est nulle, on a $\sigma_i(F) \leq \sigma(F) = 0$. On en déduit

$$(5) \qquad \varphi(\bar{D}) = 2\pi \sum_1^p \sigma_i(D).$$

Par suite, *la quantité* $\sum_1^p \sigma_i$ *somme des projections sur les sous-espaces coordonnés d'un élément de variété* V^{p-1} *est un invariant des transformations unitaires de* C^p.

Considérons un élément $d\sigma$ de la variété contenue dans une boule $B(M; \eta)$ centrée sur la variété et faisons le calcul de $\sum_1^p d\sigma_i$ par rapport à un repère pour lequel $z_1 = 0$ est la variété linéaire tangente en M à $d\sigma$. Il est aisé de voir qu'on peut choisir η assez petit pour que les projections $d\sigma_k$ de $d\sigma$ satisfassent :

$$|d\sigma_1 - d\sigma| < \varepsilon d\sigma \qquad \text{et} \qquad d\sigma_k < \varepsilon d\sigma \qquad \text{si } k \neq 1.$$

On a donc $\left| d\sigma - \sum_1^p d\sigma_i \right| < p\varepsilon d\sigma.$

D'où :

L'aire d'une variété V^{p-1} *est égale à la somme de ses projections sur les sous-espaces coordonnés.*

Nous n'insisterons pas sur ce résultat rencontré ici incidemment : il est vrai (*) pour une variété V^q quel que soit $q < p$ et se démontre aisément par le calcul direct.

A partir de (4) on a alors, pour la masse $\mu(D)$,

$$\mu(D) = [(2p-2)\omega_{2p}]^{-1}\varphi(D) = 2\pi\omega_{2p}^{-1}(2p-2)^{-1}\sum_1^p \sigma_i(D);$$

$$\mu(D) = \omega_{2p-2}^{-1}\sum_1^p \sigma_i(D) = \omega_{2p-2}^{-1}\sigma(D). \tag{6}$$

La démonstration du théorème de Poincaré est ainsi achevée : $\log|f|$ *est une fonction sousharmonique de* R^{2p}; *la distribution de masse positive correspondante est portée par la variété* $f = 0$, *avec une densité constante égale à* ω_{2p-2}^{-1} *où* ω_{2p-2} *est l'aire de la sphère unité* $\sum_1^{p-1} |z_i|^2 = 1$.

Remarque. — Considérons une transformation ponctuelle G définie par

$$Z = A + iB = G(z_1, z_2, \ldots, z_p) \tag{7}$$

du domaine $S = E[z_k \subset d_k;\ 1 \leq k \leq p]$ de C^p dans $C^1(Z)$; on suppose la transformation G continue. Le second membre de (4) conserve un sens sous des hypothèses assez générales; nous supposerons que la variété $Z = 0$, définie dans S par les équations $A = 0$, $B = 0$ a une mesure $2p-2$ dimensionnelle finie σ; dans ces conditions on a $\sigma_i \leq \sigma$, et l'intégrale

$$\sigma_i(S) = \int n_i[z_1, \ldots, z_{i-1}; (d_i); z_{i+1}, \ldots, z_p]\, ds_1 \ldots ds_{i-1} ds_{i+1} \ldots ds_p \tag{8}$$

a un sens.

Considérons (7) comme une application de $C^1(z_i)$ dans $C^1(Z)$ quand on fixe les $p-1$ variables z_j où j est différent de i, et désignons respectivement par n_i^+, n_i^- le nombre des points $z_i^{(n)}$ qui donnent $Z = 0$ par l'application avec conservation ou au contraire avec modification de l'orientation du plan $C^1(z_i)$ au voisinage de $z_i^{(n)}$; on aura $n_i = n_i^+ + n_i^-$. D'où : $\sigma_i(S) = \sigma_i^+(S) + \sigma_i^-(S)$.

D'autre part, dans la transformation $z_i \to Z$, on a évidemment

$$n_i^+ - n_i^- = \chi_i[0; z_j; G(f_i)]$$

où le second membre désigne le degré *algébrique* de la représentation de $Z = 0$ pour $z_i \subset d_i$, à z_j constants ($j \neq i$), ou, si l'on préfère, ce nombre calculé par l'intégrale de Kronecker dans le plan $C^1(Z)$ relativement à $Z = 0$ et à $G(f_i)$ image de f_i. Finalement, on aura

$$k_i = \int_{z_j \subset d_j} \chi_i[0; z_j; G(f_i)]\, ds_1 \ldots ds_{i-1} ds_{i+1} \ldots ds_p = \sigma_i^+ - \sigma_i^-.$$

(*) *Voir* WIRTINGER, *Monatshefte für Math. und Physik*, 44, 1936, p. 343.

Ainsi $K=\sum_i K_i=\sum_i(\sigma_i^+-\sigma_i^-)$ ne dépend que de l'image G(F) de la frontière F de S, et du repère choisi dans C^p.

La propriété s'étend à un domaine D somme de simplexes S : *la quantité* $\sum_i[\sigma_i^+(D)-\sigma_i^-(D)]$ *se calcule à partir de l'image de la frontière de* D, *et du repère* T_0 de C^p.

En supposant pour fixer les idées $K>0$, la somme $W=\sum_i \sigma_i(D)$ relative à la variété $G=0$ dans D est minima quand on a $\sum_i \sigma_i^-(D)=0$, et dans ce cas on a

$$W=\sum_i \sigma_i(D)=\sum_i \sigma_i^+(D)=K;$$

elle n'est fonction que de l'image G(F) *de la frontière de* D *et du repère* T_0. En particulier : *pour une transformation intérieure par rapport à chacune des variables* z_i, *la quantité* W *se calcule à partir de* G(F). *Pour une transformation quelconque* G' *telle que* G'(F) = G(F) *on a nécessairement*

$$W'=\Sigma\sigma_i'(D)\geqq W.$$

III. — Propriétés de l'intersection d'une variété V^{p-1} avec une boule de rayon variable.

4. Nous considérerons une variété analytique à $p-1$ dimensions complexes V^{p-1} dans C^p à l'intérieur de domaines sphériques; d'après une remarque déjà faite, dans de tels domaines V^{p-1} peut toujours être considérée comme la variété zéro d'une fonction f.

Soit f holomorphe dans la boule $B(M; R_0)$; et soit B(M; R) une boule de rayon variable $R<R_0$. Nous démontrerons :

Théorème 1. — *La moyenne* $\lambda[\log|f|; M; R]$ *sur la sphère* S(M; R) *est une fonction dérivable de* R *pour* $p\geqq 2$; *on a*

$$\sigma(R)=\tau_{2p-2}R^{2p-2}\frac{d\lambda}{d\log R}, \tag{9}$$

où $\sigma(R)$ *désigne l'aire de la variété* $f=0$ *contenue dans* B(M; R); $\tau_{2p-2}=(2p-2)^{-1}\omega_{2p-2}$ *est la mesure de la boule unité* $\sum_2^p|z_k|^2\leqq 1$.

Désignons par $\mu_-(R)$ la masse portée par la boule *ouverte* $B(z_i; R)$ dans la distribution μ relative à $\log|f|$, et par $\mu_+(R)$ la masse portée par la même boule *fermée*. On a $\mu(R)=\mu_+(R)$ si la frontière $S(z_i; R)$ porte une masse

nulle, c'est-à-dire, d'après le théorème de Poincaré, coupe la variété V^{p-1} définie par $f=0$ suivant un ensemble de points d'aire $2p-2$ dimensionnelle nulle. S'il en est ainsi, on a, d'après (6),

$$\sigma(R)=\omega_{2p-2}\mu(R)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{d}{dR}\log|f(z_k+R\alpha_k)|\,R^{2p-1}\,d\omega_{2p}(\alpha_k),$$

$$\sigma(R)=\frac{\omega_{2p}}{2\pi}R^{2p-2}\frac{d}{d\log R}\lambda[\log|f|;z_k;R],$$

qui démontre (9).

Reste à établir que la sphère $S(z_k;R)$ ne peut porter une aire $2p-2$ dimensionnelle positive de points de V^{p-1}. S'il en était ainsi, il existerait un point P de l'intersection au voisinage duquel V^{p-1} serait représentée par des équations $z'_k-z_k=\psi_k(t_1,\ \ldots\ t_{p-1})$, et où, par suite, l'équation $\Sigma|\psi_k(t_j)|^2-R^2=0$ serait satisfaite pour un ensemble ω de valeurs (t_j) de mesure $2p-2$ dimensionnelle positive. En explicitant $t_j=t'_j+it''_j$, l'équation s'écrit $H(t'_j,t''_j)=0$, $1\leq j\leq p-1$, où H est une fonction analytique des variables réelles t'_j, t''_j.

Si l'on avait $H=0$ sur (ω), l'équation $\Sigma|\psi_k(t_j)|^2-R^2=0$ serait une identité; il existerait donc une variété irréductible V_1^{p-1} appartenant à V^{p-1} et portée par $S(z_k;R)$; ce qui est impossible, car dans la boule $B(z_k;R')$, de rayon R' un peu plus grand que R, V_1^{p-1} serait définie par une équation $g(z_k)=0$, g ne s'annulant pas sur $S(z_k;R')$.

Donc $H=0$ définit une variété analytique réelle de dimension $2p-3$; l'ensemble d'intersection de V^{p-1} avec $S(z_k;R)$ a une mesure $2p-3$ dimensionnelle finie. On a $\mu_-(R)=\mu_+(R)$, ce qui établit aussi l'existence de $\frac{d\lambda}{d\log R}$ et l'impossibilité pour la courbe convexe $\lambda=F(\log R)$ d'avoir des sommets pour $p\geq 2$.

Remarques. — 1° L'exemple $f=z_1-a=0$, montre que λ n'a pas en général de dérivée seconde continue pour $p=2$, ni de dérivée d'ordre q continue pour $q\geq p$;

2° L'égalité (9) est valable aussi pour $p=1$, avec $\tau_0=\frac{1}{2\pi}$;

3° Le théorème de Poincaré a pour conséquence directe que λ est fonction convexe de $u_{2p-2}=-\frac{1}{R^{2p-2}}$. Cette propriété est *moins précise* que la convexité par rapport à $u_0=\log R$ si $p\geq 2$. Soient en effet $\lambda=\lambda[R(u)]$, où $\lambda(R)$ et $R(u)$ sont des fonctions croissantes et dérivables : la croissance convexe de λ par rapport à u s'exprime par

$$\lambda' R'>0,\qquad \lambda''_{u^2}=\lambda''_{R^2}(R'_u)^2+\lambda'_R R''_{u^2}\geq 0$$

ou

$$\frac{d}{dR}\log\lambda'_R\geq\frac{d}{du}(R'_u)^{-1}=\alpha.$$

Le calcul des valeurs α_0 et α_{2p-2} relatives aux deux variables

$$u_0 = \log R, \quad u_{2p-2} = -\frac{1}{R^{2p-2}}$$

donne

$$\alpha_0 = -\frac{1}{R}, \qquad \alpha_{2p-2} = \frac{1-2p}{R}.$$

Par suite, on a $\alpha_0 > \alpha_{2p-2}$ dès que p est au moins égal à 2, ce qui établit d'après (10) que la convexité en $u_0 = \log R$ est la propriété la plus précise des deux.

5. Nous allons étudier la courbe convexe C(M) qui représente la fonction

$$\lambda[\log|f_1|; M; R] = F(\log R).$$

Nous supposerons que les boules B(M; R) considérées demeurent portées par un compact D_1 intérieur au domaine D dans lequel f est analytique et vérifie $|f| \leq A$, D_1 étant d'ailleurs aussi voisin de D que l'on voudra. Dans ces conditions, $\lambda = F(\log R)$ est une fonction définie pour $-\infty < \log R < \log d(M)$, $d(M)$ étant la distance de M à la frontière de D_1 : la courbe C(M) est constituée par un arc croissant convexe qui aboutit à droite à un point de coordonnées $u_1 = \log d(M)$, $\lambda_1 \leq \log A$.

Si $f(M) \neq 0$, on a $\lambda = \log|f(M)|$ pour $-\infty < \log \delta_M$, où δ_M est la distance de M à la variété $f = 0$ dans D_1 : la courbe C(M) débute par une demi-droite horizontale $\lambda = \log|f(M)| = \text{const.}$, et se prolonge éventuellement par un arc convexe de longueur finie.

Si l'on a $f(M) = 0$, c'est-à-dire si le centre des boules B(M; R) est pris sur la variété V^{p-1}, λ tend vers $-\infty$ en même temps que $\log R$. Nous allons préciser cette branche infinie toujours par des considérations simples ; nous supposerons que M est pris pour origine dans C^p, et nous utiliserons le développement de f en série de polynomes homogènes de degrés croissants

$$f(z_k) = \psi_\nu(z_k) + \psi_{\nu+1}(z_k) + \dots, \qquad 1 \leq k \leq p. \tag{11}$$

ψ_ν est le premier de ces polynomes non identiquement nul ; ν est l'ordre de multiplicité de M sur V^{p-1}. Comme plus haut nous poserons

$$z_i = \zeta \alpha_i, \qquad \text{avec} \qquad \sum_i |\alpha_i|^2 = 1, \qquad 1 \leq i \leq p$$

et

$$f(\zeta \alpha_k) = \zeta^\nu [\psi_\nu(\alpha_k) + \zeta \psi_{\nu+1}(\alpha_k) + \dots] = \zeta^\nu \Phi(\zeta; \alpha_k),$$

de sorte que l'on a

$$\lambda[\log|f|; M; R] = \nu \log R + \lambda[\log|\Phi|; 0; 1].$$

Le calcul de la moyenne de $\log|\Phi|$ est fait en considérant ζ comme un paramètre; on a vu que cette moyenne ne dépend en fait que de $|\zeta| = R$ et est une fonction non décroissante, convexe, continue de $\log R$; sa valeur pour $\zeta = 0$ est

$$\gamma_M = \lambda[\log|\psi_\nu(\alpha_k)|; 0; 1].$$

On a donc

$$\lambda[\log|f|; M; R] = \nu \log R + \gamma_M + \varepsilon(R),$$

où $\varepsilon(R)$ *est une fonction convexe non décroissante de* R *avec* $\lim_{R=0} \varepsilon(R) = 0$.

Nous allons préciser $\varepsilon(R)$ en fonction de quantités liées à la variété $f = 0$.

Étant donné un faisceau (π) de plans analytiques complexes issus d'un point M, nous définirons une mesure $d\pi$ sur le faisceau : nous poserons

$$d\pi = \omega_{2p}^{-1}\, dE,$$

où dE est la mesure (à $2p-1$ dimensions réelles) de l'ensemble E d'intersection de (π) avec $S(M; 1)$; chaque plan du faisceau coupe $S(M; 1)$ selon un grand cercle; E est engendré par les cercles d'intersection relatifs aux plans de (π). On peut aussi, comme on le voit aisément, poser

$$d\pi = \frac{1}{2}\omega_{2p-1}^{-1}\, dE',$$

où E' est l'ensemble parcouru par le point m défini sur le cercle d'intersection par la condition qu'une des coordonnées α_k, par exemple α_1, soit réel et positif.

Si $\varphi(\alpha_k)$ est une fonction homogène, c'est-à-dire est définie sur le faisceau des plans issus de M, on aura

$$\int \varphi(\alpha_k)\, d\pi = \omega_{2p}^{-1} \int \varphi(\alpha_k)\, dE.$$

Dans ces conditions désignons par $n(t; \alpha_k)$ le nombre de racines en ζ de l'équation

$$\Phi(\zeta; \alpha_k) = 0, \tag{12}$$

pour lesquelles $0 < |\zeta| < t$, en fonction du plan d'équations $z_k = \zeta\alpha_k$ défini par les paramètres $\alpha_k\,(1 \leq k \leq p)$. On a

$$n(t; \alpha_k) = \frac{d}{d\log t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\Phi(te^{i\theta}; \alpha_k)|\, d\theta - \log|\psi_\nu(\alpha_k)|\right]. \tag{13}$$

Prenons les moyennes, le point (α_k) parcourant la sphère unité, on aura

$$n(t) = \int n(t; \alpha_k)\, d\pi = \frac{d}{d\log t}\left[\lambda[\log|\Phi|; 0; 1] - \gamma_M\right].$$

Nous poserons

$$N(M; R) = \int_0^R \frac{n(t)}{t}\, dt = \int_0^R \frac{dt}{t} \int n(t; \alpha_k)\, d\pi. \tag{14}$$

On obtient

$$\lambda[\log|\Phi|; 0; 1] = \gamma_M + N(M; R).$$

Finalement

$$(15) \qquad \lambda[\log|f|]; M; R] = \nu \log R + \gamma_M + N(M; R) = \nu \int_0^R \frac{dt}{t} + \gamma_M + \int_0^R \frac{n(t)}{t}\, dt.$$

Désignons d'autre part par $\sigma_1(t)$ l'aire découpée par $B(M; t)$ sur le cône tangent en M d'équation $\psi_\nu = 0$, et par $s(t)$ la mesure (à $2p-1$ dimensions réelles) de l'ensemble E_t balayé sur la sphère $S(M; t)$ par le faisceau π_t des plans issus de M qui intersectent la variété en un point autre que M à l'intérieur de la boule $B(M; t)$; nous conviendrons que $s(t)$ est calculée comme une projection de la variété faite à partir de M, l'élément projetant étant un plan analytique $z_k = \zeta\alpha_k (1 \leq k \leq p)$ issu de M; pour préciser, sur un cercle d'intersection d'un tel plan par $S(M; t)$, un point est compté avec la multiplicité $n(t; \alpha_k)$. Dans ces conditions, on a

$$(16) \qquad \sigma_1(t) = \tau_{2p-2} t^{2p-2} \frac{d}{d\log t} \lambda[\log|\psi_\nu|; 0; t] = \nu\tau_{2p-2} t^{2p-2}$$

et

$$(17) \qquad s(t) = \omega_{2p} t^{2p} n(t).$$

D'où, d'après (15), $\sigma(R)$ désignant l'aire de la variété elle-même dans $B(M; R)$:

$$(18_a) \qquad \sigma(R) = \tau_{2p-2} R^{2p-2} \frac{d}{d\log R} \lambda[\log|f|; M; R] = \sigma_1(R) + \frac{s(R)}{2\pi R}$$

$$(18_b) \qquad \lambda[\log|f|; M; R] = \gamma_M + \int_0^R \frac{\sigma_1(t)}{t^{2p-1}}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^R \frac{s(t)}{t^{2p}}\, dt.$$

De ces différentes expressions nous retiendrons surtout (15), qui donne l'expression de la moyenne $\lambda[\log|f|; M; R]$ dans une boule $B(M; R)$ en fonction de la constante γ_M et *de quantités liées à la variété* $f = 0$; $n(t)$ *est dans* (15) *la mesure du faisceau* π_t *qui intersecte la variété dans* $B(M; t)$, *chaque plan étant compté pour le nombre de points d'intersection dans* $B(M; t)$ différents de M. D'autre part, nous poserons

$$\nu(R) = \frac{d}{d\log R} \lambda[\log|f|; R],$$

$\nu(R)$ sera appelé *le degré en moyenne de la variété* $f = 0$ *dans* $B(M; R)$; *il a la valeur*

$$\nu(R) = \nu(0) + n(R),$$

où $\nu(0) = \nu$ est la multiplicité de M sur la variété.

Nous énoncerons pour résumer le résultat concernant la variété V^{p-1} :

Théorème 2. — 1° *L'aire* $\sigma(R)$ *découpée sur une variété* V^{p-1} *par une boule* $B(M; R)$ *centrée sur elle est toujours au moins égale à l'aire* $\tau_{2p-2} R^{2p-2}$ *découpée sur le*

plan (ou le cône) tangent en M, *sous la seule réserve que la variété* V^{p-1} *soit définie sur* B(M; R).

2° *La différence* $\sigma(R) - \sigma_1(R)$ *est une fonction non décroissante de* R *égale d'après* (18_a) *au quotient par* $2\pi R$ *de l'aire* $s(R)$, *projection de* $\sigma(R)$ *sur la sphère* S(M; R) *faite au moyen des plans analytiques complexes issus de* M. *Le degré moyen de la variété* V^{p-1} *dans* B(M; R), *soit* $\nu(R)$, *quotient de* $\sigma(R)$ *par la mesure* $\tau_{2p-2}R^{2p-2}$ *de la boule de rayon* R *dans* C^{p-1}, *est égal à l'ordre de multiplicité* $\nu = \nu(o)$ *de* M *sur la variété, augmenté d'une quantité non décroissante* $n(R)$; $n(R)$ *est la mesure du faisceau* (π_R) *des plans analytiques complexes issus de* M *qui intersectent* V^{p-1} *à l'intérieur de* B(M; R) *en des points différents de* M, *chaque plan de* (π_R) *étant compté pour le nombre de ces points d'intersection.*

Remarques. — 1° Si l'on considère le continu à $2p-2$ dimensions formé par la variété V^{p-1}, passant par M, l'inégalité $\sigma(R) \geqq \tau_{2p-2}R^{2p-2}$ exclut certaines singularités tels les points coniques pour $p \geqq 2$, singularités que présentent les variétés analytiques réelles dans l'espace R^{2p}.

2° Si l'on considère la mesure $\pi(R)$ du faisceau (π_R) des plans analytiques complexes sécants définis plus haut, on a $\pi(R) \leqq n(R)$; par suite l'intégrale $\int \pi(R)\frac{dR}{R}$ converge quand R tend vers zéro; de plus puisque $n(R)$ est non décroissant, on a nécessairement $\pi(R) \leqq n(R) = o\left(\frac{1}{\log \frac{1}{R}}\right)$.

3° Si, pour une boule $B(M, R_0)$, l'aire $\sigma(R_0)$ n'est pas plus grande que l'aire $\sigma_1(R_0)$ découpée sur le cône tangent, alors on a $\sigma(R) = \sigma_1(R)$ pour $o < R \leqq R_0$. Dans ce cas la *variété se décompose en une variété formée par le cône* $\psi_\nu = o$, *et une autre variété qui n'a pas de point dans* B(M; R). En effet s'il existait un point $P[\zeta_0; \alpha_j^0]$ sur la variété définie par $\Phi(\zeta; \alpha_j) = o$, pour lequel $|\zeta| < R_0$, il existerait une fonction implicite $\zeta = h(\alpha_j)$ définie au voisinage des valeurs considérées (α_j^0), ce qui entraîne $n(t; \alpha_j) \geqq 1$ pour $R_0 > t \geqq R_0' > |\zeta_0|$, (α_j) appartenant à un voisinage de (α_j^0) dont la mesure sur la sphère unité des (α_j) est positive. On aura donc $n(t) > o$ dès que t surpassera R_0', contrairement à l'hypothèse. Donc $\varphi(\zeta; \alpha_j)$ ne s'annule pas dans $B(M; R_0)$, et la variété est définie dans $B(M; R_0)$ par $\psi_\nu = o$. *On a l'identité de la division* $f \equiv \psi_\nu f_1$, $f = o$ définissant la variété dans $B(M; R_0)$.

IV. — Application aux recouvrements simpliciaux.

6. Nous désignerons dans ce paragraphe par T_ρ une division de l'espace en simplexes égaux, obtenue en formant une grille composée de tous les hyperplans de R^{2p} (à $2p-1$ dimensions réelles) :

(19) $$x_k = \alpha_k + t_k\rho \qquad \text{ou} \qquad y_j = \beta_j + t_j'\rho,$$

où t_k, t'_j, $(1 \leq k \leq p,\ 1 \leq j \leq p)$ prennent toutes les valeurs entières positives et négatives; le point de coordonnées (α_k, β_j) est l'origine de T_ρ; le nombre positif ρ est le pas de la grille.

Un simplexe de T_ρ est le domaine fermé obtenu en faisant varier t_k, t'_j chacun d'eux parcourant l'intervalle de deux entiers consécutifs.

Étant donné un simplexe a_s, nous serons amenés à lui associer tous ceux de T_ρ qui ont avec lui un point commun au moins: ils seront dits contigus à a_s et désignés par $a'_{s,j}$. L'ensemble

$$A_s = a_s + \sum_j a'_{s,j}$$

constitue l'élément d'un recouvrement simplicial $T_{3\rho}$ de R^{2p}; il est clair que si l'on excepte les points situés sur les hyperplans (19) de la grille T_ρ, le degré du recouvrement $T_{3\rho}$ est au plus égal à 3^{2p}.

Nous dirons qu'une variété analytique complexe V^{p-1} est définie sur un domaine de T_ρ si elle est définie sur un certain nombre de simplexes *fermés* de T_ρ, donc dans un domaine ouvert un peu plus grand contenant ceux-ci. Un simplexe de T_ρ est défini par $z_i \subset d_i$, où d_i est un carré; une variété V^{p-1} donc a_s peut toujours être considérée comme définie globalement comme variété zéro dans a_s et même dans un domaine de même forme, un peu plus grand.

Nous dirons que la grille T_ρ est normale pour une variété V^{p-1} si aucun des hyperplans (19) ne contient une variété $z_i = \text{const.}$ appartenant à V^{p-1}; il revient au même de dire que T_ρ est normale par rapport à la distribution μ associée à $\log|f|$, f étant une fonction analytique qui ne s'annule que sur V^{p-1}.

Nous démontrerons :

Proposition 2. — *Soit V^{p-1} une variété analytique complexe définie localement sur un domaine simplicial E de T_ρ, la grille T_ρ étant supposée normale par rapport à V^{p-1}. Soit N le nombre des simplexes a_s de T_ρ qui possèdent les propriétés suivantes :*

a. a_s contient au moins un point de V^{p-1};

b. $A_s = a_s + \sum_j a'_{s,j}$ formé par la réunion de a_s et de ses contigus appartient encore à E.

Alors, on a

$$N \leq \frac{3^{2p}\sigma}{\pi^{2p-2}\rho^{2p-2}}, \tag{20}$$

où σ est l'aire de V^{p-1} contenue dans $E' = \sum A_s \subset E$, E' étant l'ensemble des a satisfaisant à a et à b augmenté de leurs contigus.

En effet, si A_s est construit à partir d'un élément a_s satisfaisant a et b, on a $A_s \subset E$, d'où $\Sigma A_s = E' \subset E$. Soit σ_s l'aire de la variété dans A_s; il existe un point M_s de V^{p-1} dans a_s d'après a, a_s étant l'élément central de A_s. Considérons la boule $B(M_s, \rho)$; elle est contenue dans A_s. On a donc, d'après le théorème 1,

$$\sigma_s \geqq \tau_{2p-2}\rho^{2p-2},$$

$$\sum_s \sigma_s \geqq N\tau_{2p-2}\rho^{2p-2}.$$

Par ailleurs, sauf sur un ensemble d'aire nulle sur V^{p-1} formé de points des hyperplans (19) de T_ρ, le degré du recouvrement $T_{3\rho}$ constitué par les A_s est au plus 3^{2p}. On a donc, si σ désigne l'aire de V^{p-1} dans $E' = \sum_s A_s$,

$$3^{2p}\sigma \geqq \sum_s \sigma_s \geqq N\tau_{2p-2}\rho^{2p-2},$$

qui démontre (20).

De là nous déduirons :

Théorème 3. — *Soit une variété analytique complexe V^{p-1} définie localement sur un domaine D fermé, d'aire totale σ sur D; soit $\tau_{1\rho}$ un ensemble de points de D qui possèdent les propriétés suivantes :*

a. ils sont à distance ρ au plus ($\rho > 0$) de la variété V^{p-1};

b. ils sont points intérieurs de D, à distance au moins $\delta = 3\rho\sqrt{2p}$ de la frontière.

Alors $\tau_{1\rho}$ peut être recouvert par N boules égales B_i, de diamètre δ; la mesure $2p-2$ dimensionnelle du recouvrement $R = \sum_i B_i$, soit

$$A_{2p-2}(R) = \tau_{2p-2} N\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2p-2},$$

étant bornée par $K_p\sigma$.

On peut également obtenir un recouvrement R' de $\tau_{1\rho}$ par des boules égales B'_i centrées sur V^{p-1}, de rayon $2\rho\sqrt{2p}$ pour lequel on a

$$A_{2p-2}(R') = \tau_{2p-2} N(2\rho\sqrt{2p})^{2p-2} \leqq K'_p\sigma.$$

Les coefficients K_p, K'_p ne dépendent que de p.

En effet, fixons l'origine (α_k, β_j) de la grille T_ρ donnée par (19) de manière qu'elle soit normale par rapport à la variété V^{p-1}. Soit E_1 l'ensemble des a_s de T_ρ qui satisfont aux conditions : 1° a_s contient un point au moins de la variété V^{p-1}; 2° $A_s = a_s + \sum_j a'_{sj}$ formé par la réunion de a_s et de ses contigus contient un point au moins de $\tau_{1\rho}$.

Nous poserons $E' = \sum_s A_s$, E' étant ainsi la réunion de tous les éléments de la grille $T_{3\rho}$ construits autour d'un a_s appartenant à E_1. On a $E_1 \subset E' \subset D$; en effet, un point de E' est à une distance au plus $\delta = 3\rho\sqrt{2p}$ de l'ensemble $\gamma_{1\rho}$ d'après 1°, donc appartient à D d'après la condition *b* de l'énoncé.

D'autre part on a $\gamma_{1\rho} \subset E'$ puisque, si M appartient à $\gamma_{1\rho}$, la boule $B(M; \rho)$ contient un point de V^{p-1}; le simplexe a_s de T_ρ qui porte ce dernier satisfait évidemment aux conditions 1° et 2°; M appartient donc sinon toujours à a_s, du moins nécessairement à l'élément A_s associé. Finalement on a établi: $\gamma_{1\rho} \subset E' \subset D$.

Il suffit de considérer maintenant la variété V^{p-1} définie sur le domaine simplicial E de T_ρ qu'occupe E'; les éléments a_s de E_1 satisfont aux conditions de la Proposition 3 par rapport à E; soit N leur nombre, on a

$$N \leq \frac{3^{2p}\sigma(E')}{\tau_{2p-2}\rho^{2p-2}}, \tag{21}$$

où $\sigma(E') < \sigma$ est l'aire de la variété V^{p-1} sur $E' = \sum_s A_s$.

Soit B_s la boule circonscrite à A_s; elle est de diamètre $\delta = 3\rho\sqrt{2p}$. On a donc, d'après la majoration (21),

$$A^{2p-2}(R) = \tau_{2p-2} N \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2p-2} \leq K_p \sigma(E') \leq K_p \sigma,$$

avec $K_p = p^{p-1} 3^{4p-2} 2^{1-p}$.

On obtient le recouvrement R' de l'énoncé en choisissant dans l'élément central a_s de $A_s \subset E'$ un point M_s et prenant la boule $B'_s = B'(M_s, 2\rho\sqrt{2p})$ comme élément de recouvrement; R' recouvre E', donc aussi $\gamma_{1\rho}$ et l'on a

$$A^{2p-2}(R') = \tau_{2p-2} N (2\rho\sqrt{2p})^{2p-2} \leq K'_p \sigma(E') \leq K'_p \sigma,$$

avec $K'_p = p^{p-1} 3^{2p} 2^{3p-3}$ calculé à partir de (20).

Le théorème 3 est établi; on pourra d'une façon plus précise remplacer σ par $\sigma(E')$; on pourra également ne considérer pour le calcul de σ que les points de la varité V^{p-1} à distance au plus δ de l'ensemble $\gamma_{1\rho}$ étudié.

V. — Propriétés relatives aux fonctions plurisousharmoniques et aux familles de fonctions analytiques.

7. Rappelons qu'une fonction V définie dans un domaine D de C^n y est dite plurisousharmonique si elle satisfait aux conditions suivantes (A):

a. Elle est à valeurs réelles prises sur la droite demi-fermée $-\infty \quad V < +\infty$: on n'a pas $V \equiv -\infty$ dans D.

b. Elle est bornée supérieurement sur tout compact.

c. Si l'on considère sur un plan P^1 analytique à une dimension complexe un

domaine d où elle est définie, elle est sousharmonique ou est identique à $-\infty$ dans d.

Nous avons démontré (5) que les propriétés (A) entraînaient la semi-continuité supérieure de V.

Dans ces conditions la démonstration faite au début du paragraphe II s'applique si l'on remplace $\log|f|$ par une fonction plurisousharmonique V, et l'on obtient :

Proposition 1 *bis.* — *Si* V *est une fonction plurisousharmonique dans la boule* B(M; R), *la moyenne* $\lambda[V; M; R]$ *est une fonction convexe, non décroissante, continue de* $u_0 = \log R$.

L'inégalité $V(M) \leq \lambda[V; M; R]$ donne une démonstration du résultat connu (6) : *une fonction plurisousharmonique dans* C^p *est une fonction sousharmonique dans* R^{2p}. Mais, suivant une remarque faite au paragraphe III, n° 4, la convexité par rapport à $u_0 = \log R$ est une propriété plus précise pour la moyenne λ que la convexité par rapport à $u_{2p-2} = -\frac{1}{R^{2p-2}}$: celle-ci est vraie d'une fonction sousharmonique quelconque dans R^{2p}; il en résulte que *la distribution* μ *relative à une fonction plurisousharmonique* V *qu'on décompose dans un domaine borné* D *sous la forme*

$$V(M) = H(M) - \int \frac{d\mu(Q)}{MQ^{2p-2}} = H(M) - U^{\mu}(M), \tag{21}$$

n'est pas une distribution positive quelconque sur D; (21) est, rappelons-le, la décomposition de Riesz de la fonction sousharmonique V(M) dans R^{2p} sous la forme d'une fonction harmonique dans D (mais non plurisousharmonique en général) diminuée du potentiel $U^{\mu}(M)$ relatif à l'espace R^{2p}.

Suivant une notation utilisée plus haut, nous désignerons par $\mu_-(R)$ la masse portée par la boule *ouverte* B(M, R). On a alors

$$\mu_-(R) = (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \left(\frac{d\lambda}{d\log R}\right)_- = \left(\frac{d\lambda}{du_{2p-2}}\right)_-.$$

La même égalité subsiste entre μ_- masse de la boule compacte et la dérivée à droite de λ ; nous écrirons simplement :

$$\mu(R) = (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \frac{d\lambda}{d\log R} = \frac{d\lambda}{du_{2p-2}}, \tag{22}$$

étant entendu qu'on prendra μ_- et dérivée à gauche, ou μ et dérivée à droite si S(M; R) porte une masse $\mu_+ - \mu_-$ non nulle.

---

(5) *Les fonctions plurisousharmoniques* (*Ann. E. N. S.*, 62, 1945, p. 308, théorème 1).

(6) *Ibid.*, p. 316, théorème 2.

8. Avant de tirer les conséquences de la Proposition 1 *bis*, rappelons quelques propriétés classiques des fonctions sousharmoniques.

Une famille de fonctions sousharmoniques sera dite famille F dans un domaine D si elle possède les deux propriétés :

a. il existe sur tout compact K de D une borne supérieure finie $A(F, K)$ pour les fonctions de la famille;

b. il n'existe pas de fonction limite dans la famille qui soit identiquement $-\infty$.

Il est bien connu que si *a* était réalisé sans que *b* le soit, une suite V_n appartenant à la famille convergerait uniformément vers $-\infty$ dans D.

Pour une famille F il est immédiat d'après la décomposition de F. Riesz que la masse $\mu(V; K)$ relative à une fonction V de la famille et portée par un compact $K \subset D$ a une borne $\beta(F, K)$ finie.

Rappelons encore : pour une famille F de fonctions sousharmoniques dans D, la moyenne $\lambda[V; M; R]$ est une fonction également continue de M et de R, pour $R \geq \delta > 0$, et $B(M; R)$ portée par un compact $\Delta \subset D$. Plus précisément on a

$$\frac{d\lambda}{du_{2p-2}} = (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \frac{d\lambda}{d \log R} \leq \beta(F, \Delta). \tag{23}$$

Faisons intervenir maintenant la proposition 1 *bis* spéciale aux fonctions plurisousharmoniques : $\frac{d\lambda}{d \log R}$ est une fonction non décroissante; (22) permet d'énoncer :

Théorème 3. — *Pour une famille F de fonctions plurisousharmoniques dans* D *et pour toute boule* $B(M; R)$ *portée par un compact* $\Delta \subset D$, *la dérivée (à gauche ou à droite)* $\frac{d\lambda}{d \log R}$ *est bornée. On a*

$$\frac{d\lambda}{d \log R} = (2p-2) \frac{\mu(M; R)}{R^{2p-2}} \leq (2p-2) \frac{\beta(F, D_1)}{\delta^{2p-2}} = \omega(F, \Delta). \tag{24}$$

D_1 *désigne un domaine compact intermédiaire* $\Delta \subset D_1 \subset D$ et $\delta > 0$ *la plus courte distance d'un point de* Δ *à la frontière de* D_1. Nous poserons encore :

$$\nu(M; R) = \frac{d}{d \log R} \lambda[V; M; R]. \tag{25}$$

On a donc $\nu(M; R) \leq \omega(F, \Delta)$ pour $B(M; R) \subset \Delta$ et $V \in F$.

De plus, $\nu(M; R)$ est fonction non décroissante de R.

Corollaires. — 1° *Une fonction plurisousharmonique ne possède pas de masse ponctuelle.*

En effet, d'après (24), on a $\mu(M;R)\leq\omega(V;\Delta)\,R^{2p-2}(2p-2)^{-1}$, donc $\mu(M;R)$ tends vers zéro avec R, et même est de l'ordre de R^{2p-2}.

2° *Si une fonction* V *est plurisousharmonique dans* D, *ou bien elle a une masse nulle (auquel cas elle est la partie réelle d'une fonction analytique de variables complexes), ou bien il existe un point* $M_0\subset D$, *un nombre* $R_0>0$ *et un nombre* $a>0$ *tel que toute boule* $B(M_0;R)\subset D$ *et de rayon* $R>R_0$ *contienne une masse*

$$\mu(M_0;R)\geq aR^{2p-2}(2p-2)^{-1}.$$

En effet, il existe au mòins une boule $B(M_0;R_0)$ avec $\mu(M_0;R_0)>0$, et $\nu(M_0;R_0)=a>0$; on a alors pour $R>R_0$: $\nu(M_0;R)\geq\nu(M_0;R_0)$.

En particulier si V est défini dans tout l'espace C^p et n'y est pas la partie réelle d'une fonction entière, on a, à partir d'une certaine valeur de R,

$$\mu(O;R)\geq a'R^{2p-2}\qquad(a'>0). \tag{26}$$

3° *Si l'on considère une fonction plurisousharmonique* V, *la distribution associée* μ, *et la restriction* $\bar{\mu}$ *de* μ *a un compact* K *de* C^p, *alors le potentiel* $U^{\bar{\mu}}$ *n'est jamais une fonction plurisousharmonique hors de* K.

En effet $U^{\bar{\mu}}$ est défini dans tout l'espace et y est de masse totale bornée; $\bar{\mu}$ s'évanouit donc identiquement. Nous n'insisterons pas sur cette remarque qu'on pourrait notablement préciser; elle montre que le potentiel de Poincaré relatif à un sous-ensemble fermé d'une variété analytique V^{p-1} n'est jamais une fonction plurisousharmonique.

9. Le théorème 3 permet de préciser les propriétés d'une famille F de fonctions sousharmoniques quand cette famille est formée de fonctions *plurisousharmoniques*; $\lambda[V;M;R]$ est alors une fonction également continue de M et de $u_0=\log R$ *pour toutes valeurs de* R, $B(M;R)$ appartenant à un compact $\Delta\subset D$.

Nous démontrerons la propriété suivante d'une telle famille F :

Théorème 4. — *Soit dans* D *une famille* F *de fonctions plurisousharmoniques et deux boules* $B(M;R)$, $B(M_0;R_0)$, *avec* $R\leq R_0$, *portées par un compact* $\Delta\subset D$ *tel qu'on passe par déplacement de* $B(M_0;R_0)$ *à* $B(M;R_0)$ *à l'intérieur de* Δ. *Alors on a*

$$\lambda[V;M;R]-\lambda[V;M_0;R_0]=\xi\left[k_1+\frac{2p-2}{R_0^{2p-2}}\beta\right].MM_0+\theta'\omega(\log R-\log R_0), \tag{27}$$

où k_1, β, ω *sont des constantes positives ne dépendant que de* F *et de* Δ, *et* ξ *et* θ' *sont dans les intervalles* $-1\leq\xi\leq 1$, $0\leq\theta\leq 1$.

Pour établir (27), partons de la décomposition de F. Riesz :

$$V(M)=H(M)-U^{\mu}(M)$$

faite dans un domaine fermé D_1 intermédiaire : $\Delta\subset D_1\subset D$; $H(M)$ est harmo-

nique dans D_1 ; $U^{\mu}(M)=\int d\mu(Q)MQ^{2p-2}$ est un potentiel de masse portée par D_1. Pour $V \in F$, les fonctions $H(M)$ sont également continues dans Δ. On a donc :

$$(28) \qquad |\lambda[H; M; R]-\lambda[H; M_0; R_0]| = |H(M)-H(M_0)| \leq k_1(F, \Delta).MM_0.$$

D'autre part le calcul de $\lambda[U^{\mu}; M; R]$ revient à subsistuer dans U^{μ} au noyau $h(M, Q)=MQ^{2-2p}$, le noyau continu $h_R(M, Q)$ qui vaut $h(M, Q)$ si $MQ \geq R$ et vaut R^{2-2p} si $MQ \leq R$. On a donc

$$(29) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{M}} h_R(M, Q)\right| \leq \frac{2p-2}{R^{2p-2}}.$$

D'où

$$\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{M}} \lambda[U^{\mu}; M; R]\right| \leq \frac{2p-2}{R^{2p-2}} \beta(F, D_1);$$

$\beta(F, D_1)$ est une borne supérieure de la masse portée par $D_1 \subset D$ pour $V \in F$. On a donc

$$(30) \qquad |\lambda[V; M; R_0]-\lambda[V; M_0; R_0]| \leq k_1(F, \Delta).MM_0+\frac{2p-2}{R^{2p-2}}\beta(F, D_1).MM_0$$

et d'autre part, d'après (24),

$$(31) \qquad 0 \leq \nu(M_0; R)=\frac{d}{d\log R}\lambda[V; M_0; R] \leq \nu(M_0; R_0) \leq \omega(F, \Delta).$$

Finalement (27) est établi comme conséquence de (30) et (31).

Pour qu'une famille de fonctions plurisousharmoniques soit une famille F dans D, il faut et il suffit qu'elle soit bornée sur tout compact de D et qu'on ait $\lambda[V; M_0; R_0] \geq a$ pour une boule $B(M_0; R_0)$ donnée dans D. Comme conséquence de (27) nous énoncerons :

COROLLAIRE. — *Soit dans* D *une famille F de fonctions plurisousharmoniques. Δ un compact contenu dans* D : *il existe deux constantes a, ω, dépendant de Δ et de F, mais non de $V \in F$, telles que pour toute boule $B(M, R) \subset \Delta$, on ait*

$$(32) \qquad \lambda[V; M; R] \geq a+\omega \log R.$$

Soit en effet D_1 un domaine fermé intermédiaire $\Delta \subset D_1 \subset D$, toute boule de rayon $\delta > 0$, centrée sur Δ étant portée par D_1. Pour $R > \delta$, et $B(M; R) \subset \Delta$, $\lambda[V; M; R]$ a une borne inférieure finie, comme il résulte de (30) et d'une condition $\lambda[V; M_0; \delta] \geq a$ imposée en M_0 pour définir F. D'autre part, pour $R \leq \delta$, (32) est vérifiée d'après le théorème 4, ce qui établit une inégalité de la forme (32) dans tous les cas.

En particulier (32) montre que si l'on a $V(M)=-\infty$, la moyenne $\lambda[V; M; R]$ est, quand R tend vers zéro, de l'ordre de $\log R$ comme dans le cas $V=\log|f|$, et f analytique. On remarquera aussi le caractère d'unifor-

mité, le coefficient de log R étant borné par ω pour toute fonction $V \in F$ et tout point $M \in \Delta$.

10. *Application aux fonctions et aux variétés analytiques.* — Les résultats précédents s'appliquent aux familles de fonctions analytiques f dans un domaine D : on associera à f deux nombres, a_f, b_f, $a_f > 0$, de manière que les fonctions $V = a_f \log|f| + b_f$ forment une famille ayant le caractère F dans D.

Définition. — *Nous appellerons degré moyen d'une variété analytique complexe* V^{p-1} *dans une boule* B(M; R) *la quantité*

$$\nu(M; R) = \frac{\sigma(R)}{\tau_{2p-2} R^{2p-2}} = \frac{d}{d \log R} \lambda[\log|f|; M; R], \tag{33}$$

où $\sigma(R)$ *est l'aire* ($2p-2$ *dimensionnelle*) *de la variété dans* B(M; R).

La définition résulte de l'étude locale faite au parapraphe III, n° 5; elle suppose que la variété est définie sur la boule B(M; R) *fermée*, c'est-à-dire dans une boule ouverte B(M; R') un peu plus grande; dans cette dernière la variété peut être définie en annulant une fonction analytique f; d'où la seconde expression (33).

Le théorème 4 permet d'énoncer :

Théorème 5. — *Soit* Φ *une famille de fonctions analytiques* f *dans* D; *si* a_f, b_f *sont associés à* $f \in \Phi$, *avec* $a_f > 0$, *de manière que la famille des fonctions*

$$V = a_f \log|f| + b_f$$

soit bornée supérieurement sur tout compact de D *et n'ait pas la fonction limite* $-\infty$, *alors :*

1° *Pour toute boule* B(M; R) *sur un compact* $\Delta \subset D$, $a_f \nu(M; R)$ *défini par* (33) *est borné supérieurement; il en est de même des quantités* $a_f \sigma(R) R^{2-2p}$ *relatives aux variétés* $f = 0$;

2° *En particulier les quantités* $a_f \nu(M)$, *où* $\nu(M) = \nu(M; 0)$ *est la multiplicité de* M *sur la variété* $f = 0$, *sont bornées supérieurement pour* $M \in \Delta$, $f \in \Phi$;

3° *Il existe deux nombres* a, ω *qui ne dépendent que de* Φ *et de* Δ, *tels que*, B(M; ρ) *étant portée par* Δ, *on ait*

$$|f(M)| \geq [e^{a - b_f} \rho^{\omega}]^{\frac{1}{a_f}} \tag{34}$$

en tout point M *dont la distance à la variété* $f = 0$ *est au moins* $\rho > 0$, *et pour toute fonction* $f \in \Phi$.

Pour démontrer 3° on applique à $V = a_f \log|f| + b_f$ le Corollaire du théorème 4 et l'inégalité (32); on a

$$V(M) = \lambda[V; M; \rho] \geq a + \omega \log \rho.$$

On obtient ainsi (34) : on remarquera que la constante a dépend du comportement de la famille dans l'ensemble du domaine D ainsi que du compact Δ, tandis que le coefficient ω de $\log\rho$ peut être remplacé par $\nu(M, R_0)$, R_0 étant un nombre fixe supérieur à ρ, sous la seule réserve que $B(M; R_0)$ soit porté par Δ.

Considérons le cas particulier où l'on peut choisir $a_f = 1$, $b_f = 0$:

COROLLAIRE. — *Étant donnée une famille* Φ *de fonctions analytiques* f *bornées en module dans* D *et n'ayant pas la fonction limite nulle :*

1° *Le degré moyen* $\nu(M; R)$ *de la variété* $f = 0$ *est borné supérieurement pour* $B(M; R)$ *portée par un compact* $\Delta \subset D$ *et* $f \in \Phi$; *de même la quantité* $\sigma(R)R^{2-2p}$, *où* $\sigma(R)$ *est l'aire de la variété dans* $B(M; R)$.

2° *En particulier* $\nu(M; 0)$ *ordre de* M *sur la variété* $f = 0$ *est borné dans* Δ.

3° *Il existe deux nombres* A, ω *positifs, ne dépendant que de* Δ *et de* Φ *tels qu'on ait*

$$|f(M)| \geq A\rho^{\omega} \tag{35}$$

lorsque $B(M; \rho)$ *est portée par* Δ *et ne contient pas de point de la variété* $f = 0$; ω *est une borne supérieure du degré moyen* $\nu(M; R_0)$ *de la variété* $f = 0$, R_0 *étant un nombre fixe supérieur à* ρ, *tel que les boules* $B(M; R_0)$ *considérées soient portées par* Δ.

11. L'intérêt de la notion de degré moyen d'une variété V^{p-1} dans une boule est marqué par le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *Si une suite* f_n *de fonctions holomorphes converge uniformément dans* D *vers une fonction* f *non identiquement nulle, alors pour toute boule* $B(M; R)$ *dans* D, *les degrés moyens* $\nu_n(M; R)$ *relatifs aux variétés* $f_n = 0$ *convergent vers* $\nu(M; R)$ *degré moyen relatif à la variété* $f = 0$; *la convergence est uniforme en* M *et en* R, *pour* $R \geq a > 0$, *et* $B(M; R)$ *portée par un compact intérieur à* D.

La propriété énoncée par le théorème 6 distingue en effet le degré moyen $\nu(M; R)$ du degré local $\nu(M; 0)$, ordre de multiplicité de M sur la variété. Pour celui-ci on a seulement

$$\nu(M; 0) \geq \lim_n \sup \nu_n(M; 0).$$

Pour établir le théorème 6 remarquons que les fonctions $\log|f_n|$ forment une famille F. Il en est de même des fonctions

$$\log|g_n^M(Q)| = \log|f_n(Q - M)|,$$

où M appartient à un compact δ intérieur à D. Les fonctions

$$\psi_n^M(\log R) = \lambda[\log|f_n|; M; R] = \lambda[\log|g_n^M|; 0; R]$$

sont également continues, convexes, croissantes de $\log R$ et sont définies pour $0 \leq R < b$, b étant choisi de manière que les boules $B(M; R)$ considérées, pour $M \in \hat{o}$, appartiennent à un compact $\Delta \subset D$.

Quand $f_n \to f$, $\lambda[\log|f_n|; M; R] \to \lambda[\log|f|; M; R]$; il s'agit de fonctions également continues pour $M \in \hat{o}$ et R appartenant à un intervalle $0 < a \leq R \leq b$; la convergence est uniforme. Pour établir la même propriété en ce qui concerne les dérivées $\nu_n(M; R)$ par rapport à $\log R$, il suffit de montrer leur égale continuité dans les mêmes conditions. Or si la famille des dérivées (où n, et $M \in \hat{o}$ sont des paramètres) des fonctions $\psi_n^M(\log R)$ n'était pas formée de fonctions croissantes également continues, il existerait trois suites n_j, M_j, R_j, avec $n_j \to +\infty$, $M_j \to M_0$, $R_j \to R_0$ et $\gamma_j(Q) = f_n(Q - M_j) \to \gamma_0(Q)$ holomorphe sans que $\frac{d}{d\log R}\lambda[\log|\gamma_j|; 0; R_j] = \frac{d\lambda_j}{d\log R}$ tende vers la dérivée relative à γ_0, R_0. Or on a

$$\left(\frac{d\lambda_0}{d\log R}\right)_- \leq \liminf\left(\frac{d\lambda_j}{d\log R}\right)_- \leq \limsup_j\left(\frac{d\lambda_j}{d\log R}\right)_- \leq \left(\frac{d\lambda_0}{d\log R}\right)_-$$

et l'égalité deux quantités extrêmes a été établie au théorème 1. Le théorème 6 est ainsi démontré. Ainsi qu'on le voit, il repose essentiellement sur le fait qu'une sphère $S(M; R)$ ne porte pas une variété V^{p-1}; la notion de degré moyen d'une variété s'étendrait sans peine en utilisant au lieu de boules, des domaines simplement connexes semblables à un domaine de base dont la frontière F possède la même propriété; il suffit de prendre F pseudo-convexe *au sens strict* pour l'un des deux domaines limitrophes.

12. *Cas des polynomes.* — Dans les cas des polynomes on peut préciser l'égalité (27) du théorème 4. Pour $p = 1$ on établit facilement à l'aide de la décomposition $\log|P_n| = \log|A_n| + \sum_1^n \log|z - a_i|$, qu'on a, n désignant le degré du polynome

$$(36)\qquad \lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|; M; R\right] - \lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|; M'; R'\right] = \xi\frac{MM'}{R_1} + \theta(\log R - \log R'),$$

avec $R_1 = \max(R, R')$, ξ et θ définis comme dans (27).

Pour $p \geq 2$ la décomposition de $\log|P_n|$ sous la même forme n'est plus possible et le potentiel de Poincaré étendu à la variété algébrique $P_n = 0$, diverge. Nous montrerons cependant que (36) subsiste avec une légère modification.

Posons

$$z_k = \zeta\alpha_k = \zeta'^{-1}\alpha_k.$$

On a

$$(37)\qquad P_n(z_k) = \zeta^n\psi_n(\alpha_k) + \zeta^{n-1}\psi_{n-1}(\alpha_k) = \ldots = \zeta^n\Psi(\zeta'; \alpha_k).$$

En procédant comme au paragraphe III, n° 5, pour l'étude de la branche infinie de la courbe convexe $\lambda = F(\log R)$, on a

$$(38)\quad \lambda[\log|P_n|; M; R] = n\log R + \lambda[\log|\Psi|; o; 1] = n\log R + \gamma_\infty + N_1(M; R),$$

avec

$$(39a)\qquad N_1(M; R) = \int_0^{\frac{1}{R}} n_1(t)\frac{dt}{t} = \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{dt}{t}\,\omega_{2p}^{-1}\int n_1(t; \alpha_k)\, d\omega_{2p}(\alpha_k),$$

et $\gamma_\infty = \lambda[\log|\psi_n|; o; 1]$; $n_1(t; \alpha_k)$ est le nombre de racines de $\Psi = o$ pour lesquelles $\left|\frac{\zeta'}{\zeta} = \zeta^{-1}\right| \leq t$, en fonction des α_k. On a encore

$$(39b)\qquad \nu(M; R) = n - n_1(t) = \frac{d\lambda}{d\log R}.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME 7. — *Pour une variété algébrique* $P_n = o$, *le degré moyen* $\nu(M; R)$ *varie en croissant du nombre entier* $\nu(M; o)$, *multiplicité de* M *sur la variété, jusqu'au degré* n *de celle-ci. L'aire* $\sigma(R)$ *de la variété dans une boule* $B(M; R)$ *satisfait à* $\sigma(R) \leq n\tau_{2p-2}\, R^{2p-2}$; *l'égalité pour une seule boule entraîne que* P_n *soit un polynome homogène.*

La démonstration se fait à partir des égalités (39) comme au théorème 2.

Dans le but d'étendre (36) aux polynomes de p variables, nous démontrerons maintenant :

PROPOSITION 3. — *On a uniformément sur tout compact*

$$\log|P_n(M)| = \lim_{R=\infty}[n\log R + \gamma_\infty - V_R(M)].$$

où $V_R(M) = \int d\mu(Q)\, g(M, Q)$ *est le potentiel relatif à la fonction de Green de la boule* $B(O; R)$ *et à la distribution de Poincaré restreinte à l'intersection de la variété* $P_n = o$ *avec la boule* $B(O; R)$.

On a, en effet,

$$(40)\qquad \log|P_n(M)| = H_R(M) - V_R(M),$$

où

$$H_R(M) = \omega_{2p}^{-1}\int \log|P_n(Q)|\frac{R^2 - r^2}{R^2}\left(\frac{R}{MQ}\right)^{2p} d\omega_{2p}(Q)$$

est la fonction harmonique dans $B(O; R)$, qui coïncide avec $\log P_n$ sur la frontière de la boule; on a posé $r = OM$; pour passer à la limite, posons encore $r = \beta R$, $\widehat{OM, OQ} = u$; on a

$$H_R(M) = n\log R + (1-\beta^2)\,\omega_{2p}^{-1}\int \log|\Psi(\zeta'; \alpha_k)|\,(1 - \beta^2 - 2\beta\cos u)^{-p}\, d\omega_{2p}(Q).$$

La quantité à intégrer est maintenant bornée supérieurement; on peut passer à la limite pour $R \to \infty$, $\beta \to 0$ et écrire

$$H_R(M) = n \log R + \gamma_\infty + \varepsilon(M; R), \tag{41}$$

où $\varepsilon(M; R)$ est une fonction harmonique de M qui tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{R}$ sur tout compact, ce qui établit la Proposition 3.

L'étude de $\lambda[\log|P_n|; M; \rho]$ est ainsi ramenée à celle de $\lambda[V_R; M; \rho]$. En supposant $OM \leq r < R - \rho$, et reprenant la notation adoptée plus haut où $h_\rho(M, Q)$, $g_\rho(M, Q)$ désignent les noyaux obtenus à partir de

$$h(M, Q) = MQ^{2-2p}$$

et de $g(M, Q)$ par médiation, Q étant fixe, le premier point parcourant la sphère $S(M; \rho)$, on a

$$g_\rho(M, Q) = h_\rho(M, Q) - R^{2p-2}(OQ.Q'M)^{2-2p};$$

Q' est le conjugué de Q par rapport à $B(O; R)$. On en déduit

$$\left|\frac{\partial}{\partial \vec{M}} g_\rho(M, Q)\right| \leq (2p-2)\,[\min(\rho^{1-2p}, MQ^{1-2p}) + R^{2p-2}OQ^{2-2p}Q'M^{1-2p}],$$

En posant $t = MQ < R + r = \tau$, on a

$$\left|\frac{\partial}{\partial \vec{M}} g_\rho(M, Q)\right| \leq (2p-2)\,[\min(\rho^{1-2p}, t^{1-2p}) + (R-r)^{1-2p}].$$

En intégrant sur les masses situées dans $B(O; R)$ et désignant par $\sigma(t)$ l'aire de la variété $P_n = 0$ dans la boule $B(M; t)$, on a

$$\tau_{2p-2}\left|\frac{\partial}{\partial \vec{M}}\lambda[V_R; M; \rho]\right| \leq \frac{\sigma(\rho)}{\rho^{2p-1}} + \int_\rho^\tau \frac{d\sigma(t)}{t^{2p-1}} + \frac{\sigma(\tau)}{(R-r)^{2p-1}},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \vec{M}}\lambda[V_R; M; \rho]\right| \leq (2p-1)\int_\rho^\tau \frac{\nu(t)}{t^2}\,dt + \frac{2\nu(\tau)}{\tau}(1+\varepsilon_R). \tag{42}$$

Le dernier terme tend vers zéro quand $R \to \infty$; le premier est majoré par $(2p-1)\int_\rho^\infty \frac{\nu(t)}{t^2}\,dt \leq (2p-1)\frac{n}{\rho}$. Nous énoncerons, en remarquant que la convergence uniforme $\varepsilon(M; R) \to 0$ dans (41) pour la fonction harmonique entraine celle des dérivées partielles :

Théorème 8. — *L'indice désignant le degré du polynome* P_n, *on a*

$$\left|\frac{\partial}{\partial \vec{M}}\lambda[\log|P_n|; M; \rho]\right| \leq (2p-1)\frac{n}{\rho}, \tag{43}$$

quels que soient P_n, M, ρ.

On a, de plus,

$$(44)\quad \lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|;M;R\right]-\lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|;M';R'\right]=(2p-1)\xi\frac{MM'}{R_1}+\theta(\log R-\log R'),$$

où $R_1=\max(R,R')$, ξ *et* θ *sont dans les intervalles* $-1\leq\xi\leq+1$, $0\leq\theta\leq 1$.

Le résultat (44) généralise (36), mais la constante $C_p=2p-1$ qui figure au second membre, n'est probablement pas la meilleure possible pour $p\geq 2$.

Définition. — Nous dirons qu'un ensemble de polynomes P_n appartient à une famille (Φ) si les fonctions $\frac{1}{n}\log|P_n|$ forment une famille F de fonctions plurisousharmoniques, c'est-à-dire possèdent les deux propriétés : les fonctions $\frac{1}{n}\log|P_n|$ sont bornées supérieurement sur tout compact; il n'existe pas de suite partielle qui converge vers $-\infty$ sur un domaine (auquel cas la convergence serait uniforme).

Si l'on pose

$$m_E(P_n)=\max_{M\in E}\sqrt[n]{|P_n(M)|},$$

pour qu'un ensemble de polynomes forment une famille (Φ), il faut et il suffit que $m_E(P_n)$ soit compris entre deux nombres *positifs* fixes a et b, E étant une boule de rayon positif. Nous laisserons ici de côté la détermination de la classe (C) des ensembles E qu'on peut substituer à une boule de rayon non nul pour que la condition $0<a\leq m_E(P_n)\leq b$ entraîne que les polynomes P_n forment une famille (Φ). Contentons-nous de remarquer que d'après les résultats précédents tout ensemble borné ouvert de C^n appartient à (C), car il contient une boule de rayon non nul.

13. Indiquons quelques corollaires utiles pour l'étude des séries de fractions rationnelles où l'on doit *minorer* les quantités $|P_n|$. On procédera comme au corollaire du théorème 5, en remarquant d'après (44) qu'il suffit de se donner

$$\lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|;0;1\right]=\log\beta(P_n)$$

pour pouvoir minorer $|P_n|$ au voisinage de la variété $P_n=0$, sur un compact. Pour que $\beta(P_n)$ reste compris entre deux nombres positifs fixes, il faut et il suffit que la famille de polymomes soit une famille (Φ). On pourra donc remplacer $\beta(P_n)$ par tout nombre calculé à partir de P_n, qui possède la même propriété. En résumé il sera commode d'associer à chaque polynome *d'une part son degré n, d'autre part un second coefficient qui reste compris entre deux nombres positifs pour une famille* (Φ).

Envisageons deux cas :

1° On prend comme second coefficient le nombre $\beta(P_n)$ défini plus haut. Alors (44), où l'on a

$$\frac{1}{n}\log|P_n(M)|\leq\lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n(M)|;M;R\right],$$

permet de majorer $|P_n|$ sur tout compact K en fonction de n et de $\beta(P_n)$; mais de plus, à partir de (44), on minore $|P_n|$ sur K en tout point à distance $\rho>0$ de la variété $P_n=0$. Insistons sur ce dernier point : en supposant $\rho<1$ et prenant pour K la boule $B(O;L)$, $L>1$, on aura d'après (44),

$$\frac{1}{n}\log|P_n(M)|=\lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|;M;\rho\right]\geq\log\beta(P_n)-(2p-1)L+\log\rho$$

ou

$$|P_n(M)|\geq|\alpha(K)|^n[\beta(P_n)]^{-n}\rho^n, \tag{45}$$

avec $\log\alpha(K)=-(2p-1)L$. D'après une remarque déjà faite, on pourra améliorer l'exposant de ρ en le remplaçant par une borne supérieure du degré moyen dans les boules de rayon 1 portées par K.

2° On donnera à la propriété un caractère algébrique en choisissant un coefficient calculable au moyen des coefficients de P_n. A titre d'exemple, soit

$$S(P_n)=[\Sigma|A_\alpha|^2]^{\frac{1}{2n}}, \tag{46}$$

où $\Sigma|A_\alpha|^2$ désigne la somme des carrés des coefficients de P_n. On a

$$S^{2n}(P_n)=\frac{1}{(2\pi)^p}\int|P_n^2(e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_p})|\,d\theta_1,\ldots,d\theta_p,$$

d'où l'on déduit pour $R\geq 1$

$$\lambda\left[\frac{1}{n}\log|\rho_n|;0;R\right]\leq\log S+\log R+\log\gamma_p,$$

avec $\gamma_p=\max_{n=\infty}\sqrt[n]{C^p_{n+p}}$, C^p_{n+p} désignant suivant l'usage un nombre de combinaisons.

D'autre part, le maximum de $\frac{1}{n}\log|P_n|$ sur $B(0;1)$ vaut au moins $\log S(P_n)$. La famille des fonctions plurisousharmoniques

$$V=\frac{1}{n}\log|P_n|-\log S(P_n)$$

est donc une famille F, et en procédant comme plus haut on obtient :

A tout domaine borné K *correspond un coefficient* $\alpha'(K)>0$ *qui ne dépend*

que de K *et du nombre de dimensions* p *de l'espace complexe, tel que l'on ait*

$$|P_n(M)| \geq [\alpha'(K)]^n [S(P_n)]^{-n} \rho^n, \tag{47}$$

pour $M \in K$, *situé à distance au moins* ρ *de la variété* $P_n = 0$, *la quantité* $S(P_n)$ *étant définie par* (46).

Le résultat est applicable à tout polynome quel que soit son degré n.